



MATEMATICA

per le prime

degli Istituti professionali

LORENZO PANTIERI

Questo lavoro spiega
il programma di matematica degli
Istituti professionali italiani. Ringrazio i
miei studenti per l'aiuto fornito: il libro
è più loro che mio. Se avete idee su argo-
menti da aggiungere o modificare, o se vi
dovesse capitare di notare un errore, di
battitura o di sostanza, mi fareste un
favore comunicandomelo. Spero
che possiate studiare la ma-
tematica con il mio
stesso piacere.



Lorenzo Pantieri

Matematica per gli Istituti professionali

Copyright© 2015-2019

✉ lorenzo.pantieri@gmail.com

INDICE

1	NUMERI NATURALI	1
1.1	Operazioni con i numeri naturali	3
1.2	Numeri primi	8
1.3	Massimo comune divisore e minimo comune multiplo	9
1.4	Espressioni numeriche	11
1.5	Esercizi	13
2	NUMERI INTERI	23
2.1	Rappresentazione geometrica	24
2.2	Operazioni con i numeri interi	25
2.3	Esercizi	29
3	NUMERI RAZIONALI	35
3.1	Dalle frazioni ai numeri razionali	35
3.2	Percentuali e proporzioni	47
3.3	Esercizi	52
4	CALCOLO LETTERALE	69
4.1	Monomi	70
4.2	Polinomi	77
4.3	Prodotti notevoli	81
4.4	Esercizi	84
5	EQUAZIONI LINEARI	103
5.1	Principi e definizioni	103
5.2	Risoluzione delle equazioni lineari	104
5.3	Problemi lineari in un'incognita	109
5.4	Esercizi	112
6	STATISTICA	117
6.1	Tabelle di frequenza	117
6.2	Rappresentazioni grafiche	120
6.3	Moda, media e mediana	121
6.4	Esercizi	125
7	PROVE INVALSI	133
7.1	Algebra	133
7.2	Geometria	144
7.3	Probabilità e statistica	150
7.4	Esercizi	156








1

NUMERI NATURALI

L'origine dei numeri naturali si perde nella notte dei tempi. Non sappiamo come l'uomo li abbia costruiti o scoperti. È possibile che essi siano nati contemporaneamente al linguaggio stesso della specie umana.

Possiamo immaginare che i pastori, per contare i capi del proprio gregge, praticassero tacche su bastoni via via che le pecore entravano nel recinto: una tacca per ogni pecora. Tuttavia, questo metodo non è efficace se gli oggetti da contare sono molti. Si immagini, per esempio, la difficoltà di incidere cinquecento tacche su un bastone. È possibile allora che per rappresentare numeri grandi si sia cominciato a usare simboli specifici e che contemporaneamente siano state fissate alcune regole per usarli.

Sappiamo per certo che circa seimila anni fa gli Egizi scrivevano i numeri per le potenze di 10 dipingendo particolari geroglifici.

						
1	10	100	1000	10 000	100 000	1 000 000

I Romani usavano invece sette simboli con cui, seguendo certe regole, rappresentavano qualunque numero. I simboli sono $I = 1$, $V = 5$, $X = 10$, $L = 50$, $C = 100$, $D = 500$, $M = 1000$. Il simbolo MM rappresenta $1000 + 1000 = 2000$; il simbolo VI rappresenta $5 + 1 = 6$, mentre il simbolo IV rappresenta $5 - 1 = 4$. Il numero 2015 si rappresenta con $MMXV$.

Sistema di numerazione decimale posizionale

Il modo di scrivere i numeri dei Romani era molto complicato, soprattutto nell'esecuzione dei calcoli. Il sistema moderno di scrittura dei numeri fa uso dei soli dieci simboli 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, che vengono detti *cifre*. Un *numero* è una sequenza ordinata di cifre, eventualmente ripetute.

Per rappresentare il numero dieci non si usa un simbolo diverso, ma si scrivono due cifre: il simbolo 1 a sinistra e il simbolo 0 a destra. Per chiarire questo metodo utilizziamo un pallottoliere con aste verticali, ciascuna capace di contenere fino a nove dischetti. Per rappresentare il numero nove disponiamo nove dischetti nella prima asta, quella più a destra (figura 1a). Per rappresentare il numero dieci vuotiamo la prima asta e disponiamo un dischetto nella seconda asta (figura 1b).

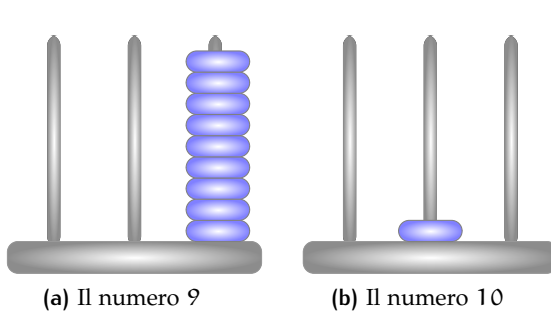


Figura 1: Il pallottoliere

Per rappresentare il numero cento vuotiamo le prime due aste (quelle più a destra) e disponiamo un dischetto nella terza. In modo analogo si possono rappresentare tutte le potenze di dieci (ovvero dieci, cento, mille, eccetera). Le potenze di 10 sono importanti nel sistema decimale perché rappresentano il “peso” di ciascuna cifra di cui è composto il numero. Nel pallottoliere ciascuna asta indica una poten-

za di dieci. Il valore di un numero si ottiene moltiplicando ciascuna cifra per il suo peso e sommando i valori ottenuti.

Per esempio, tre dischetti nella terza asta rappresentano il numero $3 \cdot 10^2 = 300$. Il numero 219, per esempio, corrisponde alla scrittura $2 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10 + 9$.

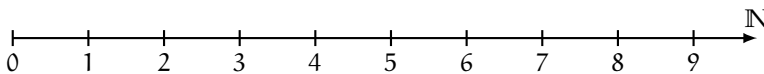
Il nostro sistema di numerazione è dunque *decimale* (o *a base dieci*), perché usiamo dieci simboli (cifre) per scrivere i numeri, e *posizionale*, perché una stessa cifra assume un peso (valore) diverso a seconda della posizione che occupa.

Rappresentazione geometrica

I numeri che si usano per contare gli oggetti o le persone si chiamano *numeri naturali*. L'insieme di questi numeri si indica con la lettera \mathbb{N} .

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, \dots\}$$

I numeri naturali si possono rappresentare su una semiretta: si identifica il numero 0 con l'origine della semiretta, si prende come verso di percorrenza quello da sinistra verso destra, si sceglie un segmento come unità di misura e lo si riporta più volte partendo dall'origine, andando a ogni passo al numero successivo.



Ogni numero naturale si costruisce a partire da 0, passando di volta in volta al numero successivo: 1 è il successivo di 0, 2 è il successivo di 1, 3 è il successivo di 2, e così via. Ogni numero naturale ha un successivo e, a eccezione di 0, un precedente. L'insieme \mathbb{N} ha 0 come elemento minimo e non ha un elemento massimo.

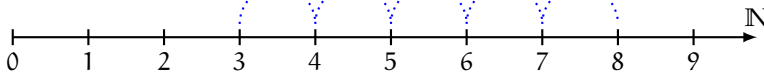
I numeri rappresentati sulla semiretta sono sempre più grandi via via che si procede da sinistra verso destra. I numeri naturali si possono quindi ordinare, e a tal fine si usa il simbolo di *disuguaglianza* \leq (si legge “minore o uguale a”) o *disuguaglianza stretta* $<$ (si legge “minore di”).

1.1 OPERAZIONI CON I NUMERI NATURALI

Somma

Definizione 1. Dati due numeri naturali a e b , detti *addendi*, si chiama *somma* un terzo numero naturale c che si ottiene partendo da a e procedendo verso destra tante volte quante indica il secondo addendo b . Si scrive $a + b = c$.

Per esempio, se vogliamo eseguire la somma $3 + 5$, dobbiamo partire da 3 e contare 5 numeri successivi:



Prodotto

Definizione 2. Dati due numeri naturali a e b , detti *fattori*, si chiama *prodotto* il numero naturale che si ottiene sommando a addendi tutti uguali a b .

Per esempio, per eseguire il prodotto $3 \cdot 2$ dobbiamo sommare $2 + 2 + 2$, ottenendo 6.

L'operazione di prodotto si indica con diversi simboli:

$$c = a \cdot b \quad c = a \times b \quad c = a * b$$

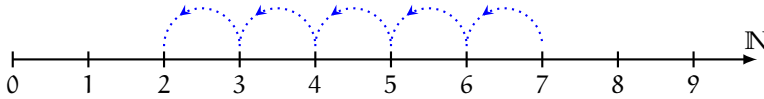
Le operazioni di somma e prodotto si dicono *operazioni interne* all'insieme dei numeri naturali, perché danno sempre come risultato un numero naturale.

Differenza

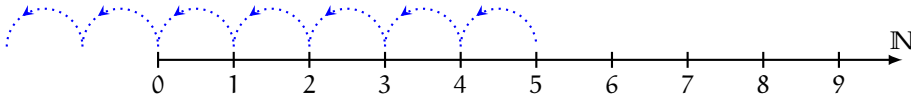
Definizione 3. Dati due numeri naturali a e b , il primo detto *minuendo* e il secondo *sottraendo*, si dice *differenza* il numero naturale c , se esiste, che aggiunto a b dà come somma a . Si scrive $a - b = c$.

Per esempio, $7 - 5 = 2$ perché $5 + 2 = 7$. Non si può fare invece la differenza tra 5 e 7, in quanto nessun numero naturale aggiunto a 7 dà 5.

Usando la rappresentazione dei numeri naturali sulla semiretta orientata, la differenza tra i numeri 7 e 5 si può trovare partendo da 7 e procedendo a ritroso di 5 posizioni.



È allora evidente perché non si può trovare la differenza tra 5 e 7: infatti partendo dal 5 non è possibile andare indietro di 7 posizioni, poiché non si può andare oltre il numero 0, che è il più piccolo dei numeri naturali.



In \mathbb{N} la differenza $a - b$ è possibile solo se $b \leq a$.

Quoziente

Definizione 4. Dati due numeri naturali a e b , con $b \neq 0$, il primo detto *dividendo* e il secondo *divisore*, si dice *quoziente* un numero naturale q , se esiste, che moltiplicato per b dà come prodotto a . Si scrive $a : b = q$. Se il quoziente esiste, si dice che a è *divisibile* per b o che a è un *multiplo* di b .

Per esempio:

- $12 : 3 = 4$, perché $4 \cdot 3 = 12$ (quindi 12 è divisibile per 3; 3 è un divisore di 12; 12 è un multiplo di 3)
- 5 non è multiplo di 3, perché non c'è alcun numero naturale che moltiplicato per 3 dia 5

Nella definizione di quoziente abbiamo richiesto che il divisore sia sempre diverso da zero. Se il divisore è 0 non c'è nessun numero che moltiplicato per 0 dia un dividendo diverso da zero. Per esempio, nella divisione $3 : 0$ dobbiamo ottenere un numero che moltiplicato per 0 dia 3; ciò non è possibile, in quanto qualsiasi numero moltiplicato per 0 dà 0. Invece nella divisione $0 : 0$ qualsiasi numero è adatto come quoziente, infatti qualsiasi numero moltiplicato per 0 dà 0.

Nel linguaggio matematico diciamo che una divisione del tipo $n : 0$, con $n \neq 0$, è *impossibile*; mentre la divisione $0 : 0$ è *indeterminata*.

Criteri di divisibilità

Per verificare se un numero è divisibile per alcuni numeri naturali si possono applicare i seguenti ben noti criteri di divisibilità:

- un numero è divisibile per 2 se la sua ultima cifra è un numero pari
- un numero è divisibile per 3 se la somma delle sue cifre è divisibile per 3

- un numero è divisibile per 5 se la sua ultima cifra è 0 o 5
- un numero è divisibile per 9 se la somma delle sue cifre è divisibile per 9
- un numero è divisibile per 10 se la sua ultima cifra è 0

Per esempio:

- 60 è divisibile per 2, per 3, per 5 e per 10, ma non è divisibile per 9
- 123 è divisibile per 3 (perché la somma delle sue cifre è $1 + 2 + 3 = 6$), ma non è divisibile per 2, per 5, per 9 e per 10

Potenza

La *potenza* di un numero naturale è un prodotto che ha tutti i fattori uguali.

Definizione 5. Dati due numeri naturali a e b , con $b > 1$, il primo detto *base*, il secondo *esponente*, la *potenza* di a con esponente b è il numero naturale c che si ottiene moltiplicando fra loro b fattori tutti uguali ad a . Si scrive $a^b = c$.

Per esempio, $2^3 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{3 \text{ volte}} = 8$.

Alla definizione precedente vanno aggiunti i seguenti casi particolari che completano la definizione:

$$a^1 = a \quad a^0 = 1 \text{ se } a \neq 0 \quad 0^0 \text{ non ha significato}$$

Queste definizioni trovano giustificazione nelle seguenti *proprietà delle potenze*.

Prodotto di due potenze con la stessa base

Il prodotto di due potenze con la stessa base è uguale a una potenza che ha per base la stessa base e per esponente la *somma* degli esponenti.

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

Per esempio, $2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7$.

Quoziente di due potenze con la stessa base

Il quoziente di due potenze con la stessa base, la prima con esponente maggiore o uguale all'esponente della seconda, è uguale a una potenza che ha per base la stessa base e per esponente la *differenza* degli esponenti.

$$a^n : a^m = a^{n-m}$$

Per esempio, $2^7 : 2^4 = 2^{7-4} = 2^3$.

Potenza di una potenza

La potenza di una potenza è uguale a una potenza che ha la base della prima potenza e per esponente il *prodotto* degli esponenti.

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

Per esempio, $(2^3)^4 = 2^{3 \cdot 4} = 2^{12}$.

Prodotto di due potenze con lo stesso esponente

Il prodotto di due potenze con lo stesso esponente è uguale a una potenza che ha per base il prodotto delle basi e per esponente l'esponente comune.

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

Per esempio, $2^4 \cdot 3^4 = (2 \cdot 3)^4 = 6^4$.

Quoziente di due potenze con lo stesso esponente

Il quoziente di due potenze con lo stesso esponente è uguale a una potenza che ha per base il quoziente delle basi e per esponente l'esponente comune.

$$a^n : b^n = (a : b)^n$$

Per esempio, $4^3 : 2^3 = (4 : 2)^3 = 2^3$.

Le definizioni dei casi particolari di potenze si giustificano nel modo seguente:

$$a^0 = a^{2-2} = a^2 : a^2 = 1 \quad a^1 = a^{3-2} = a^3 : a^2 = a$$

Alla potenza 0^0 non si assegna nessun valore perché applicando la definizione di a^0 si dovrebbe avere 1, mentre applicando la definizione di 0^a si dovrebbe avere 0.

Proprietà delle operazioni**Proprietà commutativa**

Un'operazione ha la proprietà *commutativa* se cambiando l'ordine dei numeri sui quali essa va eseguita il risultato non cambia.

La proprietà commutativa vale per le seguenti operazioni:

- somma: $a + b = b + a$; per esempio, $3 + 5 = 5 + 3 = 8$
- prodotto: $a \cdot b = b \cdot a$; per esempio, $3 \cdot 5 = 5 \cdot 3 = 15$

La proprietà commutativa *non* vale per le seguenti operazioni:

- sottrazione: $a - b \neq b - a$; per esempio, $8 - 3 = 5 \neq 3 - 8$ impossibile in \mathbb{N}
- divisione: $a : b \neq b : a$; per esempio, $8 : 4 = 2 \neq 4 : 8$ impossibile in \mathbb{N}
- potenza: $a^b \neq b^a$; per esempio, $3^2 = 9 \neq 2^3 = 8$

Proprietà associativa

Un'operazione ha la proprietà *associativa* se, presi arbitrariamente tre numeri legati da due operazioni, è indifferente da quale operazione si comincia.

La proprietà associativa vale per le seguenti operazioni:

- somma: $(a + b) + c = a + (b + c)$; per esempio, $(3 + 5) + 2 = 3 + (5 + 2) = 10$
- prodotto: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$; per esempio, $(3 \cdot 5) \cdot 2 = 3 \cdot (5 \cdot 2) = 30$

La proprietà associativa *non* vale per le seguenti operazioni:

- sottrazione: $(a - b) - c \neq a - (b - c)$; per esempio, $(9 - 5) - 2 = 2 \neq 9 - (5 - 2) = 6$
- divisione: $(a : b) : c \neq a : (b : c)$; per esempio, $(16 : 4) : 2 = 2 \neq 16 : (4 : 2) = 8$
- potenza: $(a^b)^c \neq a^{(b^c)}$; per esempio, $(2^3)^2 = 8^2 = 64 \neq 2^{(3^2)} = 2^9 = 512$

Elemento neutro

Un'operazione ha un *elemento neutro* se componendolo con qualsiasi altro numero lo lascia invariato. L'elemento neutro della somma è 0:

$$a + 0 = 0 + a = a$$

L'elemento neutro del prodotto è 1:

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

Proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma

La proprietà *distributiva* coinvolge due operazioni differenti. Moltiplicare il risultato della somma di più numeri per un altro numero dà lo stesso risultato che moltiplicare ogni addendo per il fattore e sommare i prodotti ottenuti.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Per esempio:

$$3 \cdot (2 + 4) = 3 \cdot 2 + 3 \cdot 4 = 18$$

1.2 NUMERI PRIMI

Definizione 6. Un numero naturale $p > 1$ si dice *primo* se è divisibile solo per se stesso e per l'unità.

Per esempio:

- 3 è primo, perché è divisibile solo per se stesso e per 1
- 6 non è primo, perché è divisibile per 2 e per 3

Di seguito sono riportati tutti i numeri primi più piccoli di 50:

2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47

Scomposizione in fattori primi

Scomporre un numero naturale in fattori primi significa scriverlo come prodotto di potenze di numeri di primi.

Proposizione 1 (Teorema fondamentale dell'aritmetica). Ogni numero naturale > 1 si può scrivere in modo unico come prodotto di potenze di numeri primi.

In generale, un numero si può scomporre in fattori in più modi. Per esempio, $12 = 3 \cdot 4$, ma anche $12 = 2 \cdot 6$. Il teorema fondamentale dell'aritmetica ci assicura che, se si scompone un numero in fattori *primi*, questa scomposizione è unica (a meno dell'ordine con cui si scrivono i fattori). Tornando all'esempio precedente, $12 = 2^2 \cdot 3$ è l'unico modo in cui 12 si può scomporre in fattori primi (a meno che non si scambino di posto i fattori: $12 = 3 \cdot 2^2$).

Esercizio 1. Scomponi 60 in fattori primi.

Soluzione. Usiamo il seguente schema:

60	2	60 è divisibile per 2, perché l'ultima cifra è pari
30	2	30 è divisibile per 2, perché l'ultima cifra è pari
15	3	15 è divisibile per 3, perché la somma delle sue cifre è divisibile per 3
5	5	5 è primo
1		

Quindi $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$.

□

1.3 MCD E MCM

Definizione 7. Il *massimo comune divisore* di due numeri naturali a e b , indicato con $\text{MCD}(a, b)$, è il più grande tra tutti i divisori comuni ad a e b .

Esercizio 2. Calcola il $\text{MCD}(9, 12)$ con la definizione.

Soluzione. Scriviamo tutti i divisori di 9 e 12.

divisori di 9: **1, 3, 9**

divisori di 12: **1, 2, 3, 4, 6, 12**

I divisori comuni sono 1 e 3. Il più grande è 3. Quindi $\text{MCD}(9, 12) = 3$. \square

In pratica, per calcolare il massimo comune divisore di due o più numeri si fa così:

- si scompongono i numeri in fattori primi
- si moltiplicano tra loro i fattori *comuni*, presi una sola volta e con il *minor* esponente

Esercizio 3. Calcola il $\text{MCD}(9, 12)$.

Soluzione. Scomponiamo i numeri in fattori primi:

$$9 = 3^2 \quad 12 = 2^2 \cdot 3$$

L'unico divisore comune è 3. L'esponente minimo è 1. Quindi il MCD è 3. \square

Esercizio 4. Calcola il $\text{MCD}(36, 48, 60)$.

Soluzione. Scomponiamo i numeri in fattori primi:

$$36 = 2^2 \cdot 3^2 \quad 48 = 2^4 \cdot 3 \quad 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

I divisori comuni sono 2 e 3. L'esponente minimo è 2 per il 2 e 1 per il 3. Quindi il MCD è $2^2 \cdot 3 = 12$. \square

Definizione 8. Due numeri naturali a e b si dicono *primi tra loro* se non hanno divisori comuni, a parte 1.

Per esempio:

- 4 e 9 sono primi tra loro, perché non hanno divisori comuni ($4 = 2^2$ e $9 = 3^2$)
- 6 e 8 non sono primi tra loro, perché hanno 2 come divisore comune

Definizione 9. Il *minimo comune multiplo* di due numeri naturali a e b , indicato con $\text{mcm}(a, b)$, è il più piccolo tra tutti i multipli comuni diversi da zero di a e di b .

Esercizio 5. Calcola il $\text{mcm}(9, 12)$ con la definizione.

Soluzione. Scriviamo i primi multipli di 9 e 12 diversi da zero.

multipli di 9: 9, 18, 27, **36**, 45, 54, 63, **72**, 81, 90, 99, **108**, ...

multipli di 12: 12, 24, **36**, 48, 60, **72**, 84, 96, **108**, ...

I multipli comuni sono 36, 72, 108, eccetera; il più piccolo è 36; quindi $\text{mcm}(9, 12) = 36$. □

In pratica, per calcolare il minimo comune multiplo di due o più numeri si fa così:

- si scompongono i numeri in fattori primi
- si moltiplicano tra loro i fattori *comuni e non comuni*, presi una sola volta, con il *massimo* esponente

Esercizio 6. Calcola il $\text{mcm}(9, 12)$.

Soluzione. Scomponiamo i numeri in fattori primi:

$$9 = 3^2 \quad 12 = 2^2 \cdot 3$$

Moltiplicando i fattori comuni e non comuni con il massimo esponente si trova che il mcm è $2^2 \cdot 3^2 = 36$. □

Esercizio 7. Calcola il $\text{mcm}(36, 48, 60)$.

Soluzione. Scomponiamo i numeri in fattori primi:

$$36 = 2^2 \cdot 3^2 \quad 48 = 2^4 \cdot 3 \quad 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

Moltiplicando i fattori comuni e non comuni con il massimo esponente si trova che il mcm è $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 = 720$. □

1.4 ESPRESSIONI NUMERICHE

Un'espressione numerica è una successione di operazioni da eseguire su più numeri.

- Se un'espressione contiene solo somme, le operazioni si possono eseguire in qualsiasi ordine. Per esempio, per calcolare $1 + 2 + 3$ si possono eseguire le operazioni nell'ordine in cui compaiono:

$$1 + 2 + 3 = 3 + 3 = 6$$

oppure indifferentemente eseguire per prima l'ultima somma indicata:

$$1 + 2 + 3 = 1 + 5 = 6$$

- Se un'espressione contiene solo prodotti, le operazioni si possono eseguire in qualsiasi ordine. Per esempio, per calcolare $2 \cdot 3 \cdot 4$ si possono eseguire le operazioni nell'ordine in cui compaiono:

$$2 \cdot 3 \cdot 4 = 6 \cdot 4 = 24$$

oppure si può seguire l'ordine opposto:

$$2 \cdot 3 \cdot 4 = 2 \cdot 12 = 24$$

- Se un'espressione *senza parentesi* contiene più sottrazioni, si procede eseguendole nell'ordine in cui sono scritte. Per esempio,

$$3 - 2 - 1 = 1 - 1 = 0$$

mentre è *errato* scrivere:

$$3 - 2 - 1 = 3 - 1 = 2$$

- Se un'espressione *senza parentesi* contiene solo somme e sottrazioni, le operazioni si devono eseguire nell'ordine con cui sono scritte. Per esempio:

$$1 + 2 - 3 + 4 = 3 - 3 + 4 = 0 + 4 = 4$$

- Se un'espressione *senza parentesi* contiene solo divisioni, le operazioni si devono eseguire nell'ordine con cui sono scritte. Per esempio:

$$12 : 6 : 2 = 2 : 2 = 1$$

mentre è *errato* scrivere:

$$12 : 6 : 2 = 12 : 3 = 4$$

- Se un'espressione *senza parentesi* contiene somme, sottrazioni, prodotti, divisioni e potenze, si eseguono prima le potenze, poi i prodotti e le divisioni, e poi le somme e le sottrazioni, rispettando l'ordine con cui sono scritte.

Esercizio 8. Calcola $18 : 2 : 9 + 5^2 - 2 \cdot 3^2 : 3 - 1$.

Soluzione.

$$\begin{aligned} 18 : 2 : 9 + 5^2 - 2 \cdot 3^2 : 3 - 1 &= 18 : 2 : 9 + 25 - 2 \cdot 9 : 3 - 1 \\ &= 9 : 9 + 25 - 18 : 3 - 1 \\ &= 1 + 25 - 6 - 1 = 26 - 6 - 1 = 20 - 1 = 19 \quad \square \end{aligned}$$

Se l'espressione contiene una coppia di parentesi, si eseguono prima le operazioni racchiuse nelle parentesi, rispettando le regole precedenti.

Esercizio 9. Calcola $5 \cdot (4 + 3^2 - 1)$.

Soluzione.

$$5 \cdot (4 + 3^2 - 1) = 5 \cdot (4 + 9 - 1) = 5 \cdot (13 - 1) = 5 \cdot 12 = 60 \quad \square$$

Se l'espressione contiene più ordini di parentesi, si eseguono innanzitutto le operazioni racchiuse nelle parentesi tonde, dopo di che si procede con le operazioni racchiuse nelle parentesi quadre e infine nelle parentesi graffe.

Esercizio 10. Calcola $4 : \{ [7 - (9 - 4)] \cdot 2 \}$.

Soluzione.

$$4 : \{ [7 - (9 - 4)] \cdot 2 \} = 4 : \{ [7 - 5] \cdot 2 \} = 4 : \{ 2 \cdot 2 \} = 4 : 4 = 1 \quad \square$$

1.5 ESERCIZI

Chi non risolve esercizi non impara la matematica.

1 Indica la risposta corretta.

a. La somma dei numeri 10 e 3 è:

A 13

B 30

C 103

D 310

b. La differenza tra i numeri 55 e 27 è:

A 25

B 83

C 32

D $58 - 30$

c. Il prodotto dei numeri 58 e 42 è:

A 26

B 199

C 2436

D 2634

d. La verifica della divisione $60 : 2 = 30$ è:

A $30 : 2 = 15$

B $60 \cdot 30 = 1800$

C $30 \cdot 2 = 60$

D $60 \cdot 2 = 120$

e. Quale dei seguenti è il numero ottomila e dieci?

A 80010

B 8010

C 800010

D 810

f. L'espressione $5 + 5 \cdot 2$ vale

A 12

B 15

C 20

D 50

g. L'espressione $20 - 10 : 2$ vale

A 0

B 5

C 10

D 15

h. La frase «moltiplica per quattro la somma dei numeri 9 e 2 corrisponde all'espressione:

A $4 \cdot 9 + 2$

B $9 + 2 \cdot 4$

C $(9 + 2) \cdot 4$

D $9 \cdot 2 + 4$

i. L'espressione $6 + 40 : 2 \cdot 5$ vale:

A 10

B 28

C 106

D 115

j. Quale affermazione è *falsa*?

- A Alcuni multipli di 4 sono anche multipli di 8
- B Tutti i multipli di 8 sono anche multipli di 4
- C Tutti i numeri pari sono multipli di 4
- D Alcuni numeri pari non sono multipli di 4

[Una risposta A, due B, cinque C e due D]

2 Indica la risposta corretta.

a. Quale delle seguenti *non* è una proprietà dell'insieme \mathbb{N} dei numeri naturali?

- A Ogni naturale ha un successivo. C L'insieme \mathbb{N} non ha massimo.
- B Ogni naturale ha un precedente. D L'insieme \mathbb{N} è infinito.

b. Quale delle seguenti uguaglianze è giustificata dalla proprietà distributiva del prodotto?

- A $5 + (6 \cdot 7) = (6 \cdot 7) + 5$ C $5 \cdot (6 + 7) = 5 \cdot 13$
- B $5 \cdot (9 + 7) = (5 \cdot 9) + (5 \cdot 7)$ D $5 \cdot 2 + 4 = (5 + 2) + 4 = 5 + (2 + 4)$

c. Quale delle seguenti espressioni corrisponde alla frase: «aggiungi 3 al doppio di 5»?

- A $2 \cdot 3 + 5$ B $5 + 2 \cdot 3$ C $2 \cdot 5 + 3$ D $5 + 2 + 3$

d. Quale delle seguenti divisioni si può eseguire nell'insieme dei numeri naturali?

- A $100 : 8$ B $100 : 12$ C $100 : 15$ D $100 : 25$

e. Quale delle seguenti divisioni *non* si può eseguire nell'insieme dei numeri naturali?

- A $0 : 5$ B $5 : 5$ C $5 : 1$ D $5 : 0$

f. Il risultato di $3^5 + 5^3$ è:

- A 368 B $(3 + 5)^5$ C $15 + 15$ D 8^8

g. Il risultato di $(73 + 27)^2$ è:

- A 200 B $73^2 + 27^2$ C 10^4 D 1000

[Una risposta A, due B, due C e due D]

3 Vero o falso?

- a. Ogni numero naturale è divisibile per 0. V F
- b. Ogni numero naturale è divisibile per 1. V F
- c. Lo 0 è multiplo di ogni naturale. V F
- d. Tutti i numeri primi sono dispari. V F
- e. Tutti i numeri dispari sono primi. V F
- f. Nessun numero pari è primo. V F
- g. Nessun numero primo è pari. V F

[2 affermazioni vere e 5 false]

4 Dall'uguaglianza $120 = 24 \cdot 5$ segue che:

- a. 120 è divisibile per 24 V F
- b. 120 è divisore di 24 V F
- c. 24 è divisore di 120 V F
- d. 24 è multiplo di 5 V F
- e. 120 è multiplo di 24 V F

[3 affermazioni vere e 2 false]

5 Vero o falso?

- a. 1 è un numero primo. V F
- b. 2 non è un numero primo. V F
- c. 19 è un numero primo. V F
- d. 63 è un numero primo. V F
- e. 100 è un numero primo. V F
- f. 123 è un numero primo. V F
- g. 5^3 è un numero primo. V F

[1 affermazione vera e 6 false]

Calcola il valore delle seguenti espressioni.

- 6** $50 - 14 : 2 - 2 \cdot 3$ [37] **15** $2^7 : 2^3 - 2^2$ [12]
- 7** $12 + 8 \cdot 5 - 4 \cdot 10$ [12] **16** $100 : 2 + 3^2 - 2^2 \cdot 6$ [35]
- 8** $7 \cdot 3 - 49 : 7 \cdot 2 - 1 + 21$ [27] **17** $30 - 5 \cdot 3 + 7 \cdot 2^2 - 2$ [41]
- 9** $3 + 4 \cdot 5 - 8 : 2 + 11$ [30] **18** $(20 - 16) : 4 + (8 + 20) : 4$ [8]
- 10** $18 + 3 \cdot 5 - 14 : 7 + 4 \cdot 3 - 23$ [20] **19** $(3 + 4)^2 - (3^2 + 4^2)$ [24]
- 11** $5 + 16 \cdot 4 : 2 - 2 \cdot 3$ [31] **20** $(1 + 2 \cdot 3) : (5 - 2 \cdot 2) + 1 + 2 \cdot 4$ [16]
- 12** $5 + 16 : 2 - 3 \cdot 2$ [7] **21** $5 \cdot 5^3 \cdot 5^4 : (5^2)^3 + 5$ [30]
- 13** $5 + 7 \cdot 4 - 39 : 13 + 21 : 3$ [37] **22** $32^5 : 16^4 - 2^9$ [0]
- 14** $3 + 5 \cdot 8 - 7 + 12 : 4 - 10$ [29]

Calcola il valore delle seguenti espressioni.

- 23 $9 \cdot 8 + 16 : 8 - 36 : 12 - 80 : 2 + 4$ [35]
- 24 $45 : 5 + 2 + 2 \cdot 3 + 20 : 4 + 8 : 2 - 3 + 4 \cdot 6$ [47]
- 25 $56 \cdot 2 - 72 : 8 + 8 \cdot 4 - 216 : 36 - 9 : 3 - 7 \cdot 6$ [84]
- 26 $16 : 2 - 16 : 8 + 2 \cdot 3 - 144 : 36 - 12 : 3$ [4]
- 27 $7 \cdot (5 \cdot 9 - 86 : 2) - (32 : 2 - 27 : 3) \cdot 2$ [0]
- 28 $(5 \cdot 2 - 3) \cdot 3 + 2 \cdot (4 - 1) - 3 \cdot 9$ [0]
- 29 $(8 : 2 + 3 \cdot 4) : 4 + 3 \cdot (21 : 3 - 2 \cdot 3)$ [7]
- 30 $18 + 12 : 6 \cdot 2 - (6 \cdot 3 - 3 \cdot 4) : 2$ [19]
- 31 $(2 + 1) \cdot (2 + 3) - [(16 + 2 \cdot 4) : 6 \cdot 4 - (16 + 2 \cdot 4) : (6 \cdot 4)]$ [0]
- 32 $8 - 3 \cdot 2 + (6 + 2 \cdot 3) : 4 + (8 : 4 + 6) : 2$ [9]
- 33 $[3^0 + (2^4 - 2^3)^2 : (4^3 : 4^2) + 3] : 2^2$ [5]
- 34 $(3^4 \cdot 3^3 : 3^6)^2 + (7^2 - 5^2) : 2^2$ [15]
- 35 $(3 \cdot 2^2 - 10)^4 \cdot (3^3 + 2^3) : 7 - 10 \cdot 2^3$ [0]
- 36 $(18 - 3 \cdot 2) : (16 - 3 \cdot 4) \cdot (2 : 2 + 2)$ [9]
- 37 $2 + 2 \cdot 6 - [21 - (3 + 4 \cdot 3 : 2)] : 2$ [8]
- 38 $8 \cdot (5 \cdot 9 - 86 : 2) - (32 : 2 - 27 : 3) \cdot 2 + 13$ [15]
- 39 $51 : 17 - \{ [(2 \cdot 16 - 4 \cdot 3) : (12 : 3 + 1)] - 5 : 5 \} + 0 \cdot 7 + (4 \cdot 7 : 28)$ [1]
- 40 $[3 \cdot (6 - 2 \cdot 3)^2 + 20 : (3 \cdot 2^2 - 3^2 - 1)^2] : [5 \cdot (4 \cdot 2 - 7)] + 100^4 : 10 : 10^7$ [2]
- 41 $25 - \{ 100 - [32 - 32 : (2^2 + 2^2 \cdot 3) + 2^3 \cdot 5] \} : 6 \cdot (2^2 + 1)$ [0]
- 42 $[40 - 40 : 5 - (2^2 \cdot 3 : 6)^5]^2 + (5^2)^4 \cdot (5^4)^2 : (5^2 \cdot 5^3)^3 + (7^3)^3 : 49^4$ [12]
- 43 $2 + (2^{10} \cdot 2^2)^2 : (2^3)^8 - [5 \cdot (12 - 2 \cdot 8 : 4) : 2^2]^2 : [(2 \cdot 3)^2 + (2^2 + 6 : 3 \cdot 2)^2]$ [2]
- 44 $(3 \cdot 2 - 2^2 : 2 \cdot 3)^4 + 5^9 \cdot 5^{12} : [(15 : 3)^4]^5 - 2 + 2^3 : 2 \cdot 2^2$ [19]
- 45 $\{ [(3^2)^3 : 3^5 + 1]^4 : (2^3)^2 \}^2 \cdot 4^3 : 2^{10}$ [1]
- 46 $[(2^5 \cdot 4 : 2^2 - 5)^3 \cdot 3^2 : (5 - 2)^6] : 27$ [9]
- 47 $[5^3 : 5^0 - (2^3 \cdot 2^2 : 8)^2 + 11^3 : 121] : (2^3 \cdot 5) + 9^6 : 27^3 : 3$ [12]
- 48 $\{ 15 - [(3^4)^2 \cdot (3^5)^2 : 27^5 + 3] : [(2^3)^5 : (2^7)^2] \}^{21} \cdot 15^{361}$ [0]
- 49 $333^{333} : (9^4 \cdot 81^3 : 3^{19} + 4^4 : 16 : 4 - 49^{10} : 7^{19})$ [impossibile]
- 50 $(7 + 17) : 6 + 6 \cdot 4 + 2 - 28 : 2 - (16 - 8) \cdot 2$ [0]
- 51 $[(2 \cdot 7 - 9) \cdot 3 - 3 \cdot 4] \cdot 5 - (6 : 3 \cdot 6)$ [3]
- 52 $12 - \{ [5 \cdot (3 + 4 \cdot 5) - 9 \cdot 10 - 2 \cdot 4 - 14 + 2] + (20 - 3 \cdot 6 + 1) \} + 7 - 2 \cdot 5$ [1]
- 53 $\{ 3 \cdot [2 + 2 \cdot (4 + 3 \cdot 4 - 11)] + 5 \cdot [5 + 3 \cdot 6 - 2 \cdot (3 \cdot 5 - 18 : 3 \cdot 2 + 1) - 2] \} - 9 \cdot 11$ [2]
- 54 $(3^3)^4 : 3^{10} - 9 + (16 : 2^3 - 2 + 5) \cdot 2^2$ [20]
- 55 $[(11 \cdot 4 - 5 \cdot 2^3) : 2]^3 + \{ 2 \cdot 3 - [2^3 + (13 - 2^2 \cdot 3)^4 - 2^3]^5 - 2^2 \}^7 - 3^2$ [0]
- 56 $\{ [(20 \cdot 5 + 16 : 2 - 3^3) : 3^3]^7 : 3^5 \}^4 : 3^6 - 3^2$ [0]

- 57 $[(2^4 \cdot 3 - 2^2 \cdot 5 - 3 \cdot 2^3)^2 - 2^3 - 5]^2 - (36 : 4 - 81 : 3^3 - 5)^4$ [8]
- 58 $\{[15 - (5 \cdot 2 - 4)] \cdot 2\} : (30 : 15 + 1) - \{[25 \cdot 4] : 10 - (11 - 2)\}$ [5]
- 59 $[(4^5 : 4^3) - 2^3] \cdot [(3^4 \cdot 3^3) : (3^2 \cdot 3)] : (2^2 + 2^0 + 3^1)$ [81]
- 60 $(12 - 5^2 : 5) \cdot 4^2 : 2^3 + 2^2 - 1 + [(2^4 : 2^3)^3 + 4^3 : 4 + 2^5] : 7$ [25]
- 61 $(195 : 15) \cdot \{[3^2 \cdot 6 + 3^2 \cdot 4^2 - 5 \cdot (6 - 1)^2]\} : (4^2 - 3)$ [73]
- 62 $[4 \cdot (3 \cdot 2 - 3 \cdot 1^2) - 5] - \{2 \cdot (14 : 7 + 4) : [2 \cdot (3 + 2)^2 : 10 + 1 - 4^2 : 8]\}$ [4]

63 Vero o falso?

- a. Il numero 1 è primo. V F
- b. C'è un numero naturale che sommato a 3 dà come somma 5. V F
- c. C'è un numero naturale che sommato a 12 dà come somma 7. V F
- d. C'è un numero naturale che moltiplicato per 4 dà come prodotto 12. V F
- e. C'è un numero naturale che moltiplicato per 5 dà come prodotto 11. V F

[2 affermazioni vere e 3 false]

64 Inserisci il numero naturale mancante, se esiste.

- a. $7 - \dots = 1$ c. $3 - \dots = 9$ e. $18 : \dots = 3$ g. $12 : 9 = \dots$
- b. $5 - 6 = \dots$ d. $15 : 5 = \dots$ f. $\dots : 4 = 5$ h. $36 \cdot \dots = 9$

65 Vero o falso?

- a. $5 : 0 = 0$ V F f. $0 : 0 = 0$ V F
- b. $0 : 5 = 0$ V F g. $1 : 1 = 1$ V F
- c. $5 : 5 = 0$ V F h. $1 : 5 = 1$ V F
- d. $1 : 0 = 1$ V F
- e. $0 : 1 = 0$ V F

[3 affermazioni vere e 5 false]

66 Se $c = a \cdot b$, quali tra le seguenti affermazioni sono vere?

- a. c è multiplo di b V F f. a è divisibile per b V F
- b. c è multiplo di a V F g. c è divisore di a V F
- c. a è multiplo di c V F h. b è multiplo di a V F
- d. a è multiplo di b V F
- e. c è divisibile per a V F

[3 affermazioni vere e 5 false]

67 Vero o falso?

a. 6 è un divisore di 3

 V F

d. 5 è divisibile per 10

 V F

b. 3 è un divisore di 6

 V F

c. 8 è un multiplo di 2

 V F

[2 affermazioni vere e 2 false]

68 Vero o falso?

a. $33 : 11 = 11 : 33$

 V F

g. $(28 - 7) : 7 = 28 : 7 - 7 : 7$

 V F

b. $108 - 72 : 9 = (108 - 72) : 9$

 V F

h. $(8 \cdot 1) : 2 = 8 : 2$

 V F

c. $8 - 4 = 4 - 8$

 V F

i. $(8 - 2) + 3 = 8 - (2 + 3)$

 V F

d. $35 \cdot 10 = 10 \cdot 35$

 V F

j. $(5 + 11) + 4 = 5 + (11 + 4)$

 V F

e. $9 \cdot (2 + 3) = 9 \cdot 3 + 9 \cdot 2$

 V F

f. $8 - 5 - 2 = 8 - 7$

 V F

[5 affermazioni vere e 5 false]

69 Inserisci i numeri mancanti al posto dei puntini.

a. $2^3 \cdot 2^4 = 2^{\dots}$

d. $3^2 \cdot 3^3 = 3^{\dots}$

g. $(2^3)^2 = 2^{\dots}$

j. $5^{15} : 5^{\dots} = 5^5$

b. $2^5 : 2^3 = 2^{\dots}$

e. $3^3 : 3^2 = 3^{\dots}$

h. $(3^2)^2 = 3^{\dots}$

k. $8^4 : 2^4 = 2^{\dots}$

c. $2^4 \cdot 3^4 = \dots^4$

f. $6^3 : 2^3 = (\dots)^3$

i. $7^4 \cdot 7^{\dots} = 7^5$

l. $(\dots^3)^4 = 1$

Calcola applicando le proprietà delle potenze.

70 $2^5 \cdot 2^3 : 2^2 \cdot 3^6$

[6⁶]

72 $\{[(2^3)^2 : 2^3]^3 : 2^5\} : (2^8 : 2^6)^2$

[1]

71 $(5^2)^3 : 5^3 \cdot 5$

[5⁴]

73 $[(2^1)^4 \cdot 3^4]^2 : 6^5 \cdot 6^0$

[6³]

74 Per ognuno dei seguenti numeri indica i divisori.

a. 15

b. 17

c. 24

d. 30

e. 36

f. 45

g. 60

h. 90

Calcola il risultato delle seguenti espressioni.

75 $2^2 \cdot (2^3 + 5^2)$

[132]

77 $4^4 / (2^4 + 4^2)$

[8]

76 $[(3^6 : 3^4)^2 / 3^2]^1$

[9]

78 $3^4 \cdot (3^4 + 4^2 - 2^2)^0 : 3^3 + 0 \cdot 100$

[3]

79 Spiega il significato delle seguenti espressioni:

a. numero primo

b. divisore

c. multiplo

d. fattore

80 La tabella seguente riporta i numeri naturali fino a 100. Per trovare i numeri primi seleziona 2, poi cancella tutti i multipli di 2. Seleziona 3 e cancella i multipli di 3. Seleziona il primo dei numeri che non è stato cancellato, 5, e cancella tutti i multipli di 5. Procedi in questo modo fino alla fine della tabella. Quali sono i numeri primi minori di 100?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

[2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97]

81 Rispondi alle seguenti domande.

- Che cosa vuol dire scomporre in fattori un numero naturale?
- Che cosa vuol dire scomporre in fattori primi un numero naturale?
- Ci può essere più di una scomposizione in fattori di un numero naturale?
- Ci può essere più di una scomposizione in fattori primi di un numero naturale?

82 I seguenti numeri sono scritti come prodotto di altri numeri. Sottolinea le scritte in cui ciascun numero è scomposto in fattori primi.

a. $68 = 17 \cdot 4 = 17 \cdot 2^2 = 2 \cdot 34$

f. $48 = 6 \cdot 8 = 12 \cdot 4 = 3 \cdot 2^4 = 16 \cdot 3$

b. $45 = 5 \cdot 9 = 15 \cdot 3 = 5 \cdot 3^2$

g. $60 = 2 \cdot 30 = 15 \cdot 4 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 10 \cdot 6$

c. $36 = 6 \cdot 6 = 6^2$

h. $102 = 6 \cdot 17 = 3 \cdot 34 = 2 \cdot 3 \cdot 17 = 2 \cdot 51$

d. $44 = 2 \cdot 22 = 4 \cdot 11 = 2^2 \cdot 11$

i. $200 = 2 \cdot 10^2 = 2^3 \cdot 5^2 = 2 \cdot 4 \cdot 25$

e. $17 = 17 \cdot 1$

j. $380 = 19 \cdot 10 \cdot 2 = 19 \cdot 5 \cdot 2^2$

83 Spiega la differenza che intercorre tra le affermazioni seguenti:

- a e b sono numeri primi
- a e b sono numeri primi tra loro

Fa' alcuni esempi che mettano in evidenza la differenza descritta.

84 Scomponi i seguenti numeri in fattori primi.

a. 16	e. 32	i. 42	m. 52	q. 80	u. 125
b. 18	f. 36	j. 44	n. 60	r. 90	v. 144
c. 21	g. 38	k. 45	o. 72	s. 100	w. 180
d. 30	h. 40	l. 50	p. 75	t. 121	x. 225

85 Calcola MCD e mcm in ciascuno dei seguenti gruppi di numeri.

a. 15, 5, 10	[5, 30]	d. 5, 6, 8	[1, 120]	g. 6, 8, 12	[2, 24]
b. 2, 4, 8	[2, 8]	e. 24, 12, 16	[4, 48]	h. 3, 4, 5	[1, 60]
c. 2, 1, 4	[1, 4]	f. 6, 16, 26	[2, 624]	i. 3, 6, 9	[3, 18]

86 Calcola MCD e mcm in ciascuno dei seguenti gruppi di numeri.

a. 6, 4, 10	[2, 60]	d. 6, 8, 24	[2, 24]	g. 44, 66, 12	[2, 132]
b. 5, 4, 10	[1, 20]	e. 9, 16	[1, 144]	h. 50, 120, 180	[10, 1800]
c. 16, 18, 32	[2, 288]	f. 12, 50	[2, 300]	i. 20, 40, 60	[20, 120]

87 Calcola MCD e mcm in ciascuno dei gruppi di numeri seguenti.

a. 30, 60, 27	[3, 540]	d. 30, 27, 45	[3, 270]	g. 2, 4, 5	[1, 20]
b. 45, 15, 35	[5, 315]	e. 12, 14, 15	[1, 420]	h. 15, 18, 24	[3, 360]
c. 6, 8, 10, 12	[2, 120]	f. 15, 18, 21	[1, 630]	i. 100, 120, 150	[10, 600]

88 Calcola le seguenti espressioni.

a. $15 + 7 - 2$	[20]	d. $16 : 4 \cdot 2$	[8]	g. $2^4 : 2 - 4$	[4]	j. $2^4 + 2^3$	[24]
b. $16 \cdot 2 - 2$	[30]	e. $2 + 2^2 + 3$	[9]	h. $3^3 - 2^3$	[19]	k. $2^3 \cdot 3^2$	[72]
c. $12 - 2 \cdot 2$	[8]	f. $4 \cdot 2^3 + 1$	[33]	i. $(3^2)^3 - 3^2$	[72]	l. $3^3 : 3^2 \cdot 3^2$	[27]

89 Quali delle seguenti espressioni rappresentano numeri naturali?

a. $5 + 3 - 1$	d. $7 + 2 - 10$	g. $3 \cdot 4 - 12$	j. $27 : 9 : 3$
b. $6 + 4 - 10$	e. $2 \cdot 5 : 5$	h. $12 : 4 - 4$	k. $18 : 2 - 9$
c. $5 - 6 + 1$	f. $2 \cdot 3 : 4$	i. $11 : 3 + 2$	l. $10 - 1 : 3$

[7 espressioni rappresentano numeri naturali]

90 Aggiungi le parentesi in modo che l'espressione abbia il risultato indicato.

a. $2 + 5 \cdot 3 + 2 = 35$

b. $2 + 5 \cdot 3 + 2 = 27$

91 Calcola il risultato delle seguenti operazioni nell'insieme dei numeri naturali.

- | | | | | | |
|---------------|---------------|---------------|-----------------|---------------|---------------|
| • $5 : 5$ | [1] | • $5 \cdot 1$ | [5] | • $0 \cdot 0$ | [0] |
| • $5 : 0$ | [impossibile] | • $0 : 0$ | [indeterminata] | • $1 \cdot 0$ | [0] |
| • $1 \cdot 5$ | [5] | • $10 : 5$ | [2] | • $1 : 0$ | [impossibile] |
| • $1 - 1$ | [0] | • $1 : 5$ | [impossibile] | • $1 : 1$ | [1] |
| • $10 : 2$ | [5] | • $0 \cdot 5$ | [0] | • $10 : 10$ | [1] |
| • $0 : 5$ | [0] | • $5 : 1$ | [5] | • $10 : 0$ | [impossibile] |

92 Traduci in espressioni aritmetiche le seguenti frasi e calcolane il risultato.

- a. Aggiungi 12 al prodotto tra 6 e 4. [36]
- b. Sottrai il prodotto tra 12 e 2 alla somma tra 15 e 27. [18]
- c. Moltiplica la differenza tra 16 e 7 con la somma tra 6 e 8. [126]
- d. Al doppio di 15 sottrai la somma dei prodotti di 3 con 6 e di 2 con 5. [2]
- e. Sottrai il prodotto di 6 per 4 al quoziente tra 100 e 2. [26]
- f. Moltiplica la differenza di 15 con 9 per la somma di 3 e 2. [30]
- g. Sottrai al triplo del prodotto di 6 e 2 il doppio del quoziente tra 16 e 4. [28]
- h. Il quadrato della somma tra il quoziente di 21 e 7 e il cubo di 2. [121]
- i. La somma tra il quadrato del quoziente di 24 e 8 e il quadrato del cubo di 2. [73]
- j. La differenza tra il triplo del cubo di 5 e il doppio del quadrato di 5. [325]

Risolvi i seguenti problemi.

93 Tre funivie partono contemporaneamente da una stessa stazione sciistica. La prima compie il tragitto di andata e ritorno in 15 minuti, la seconda in 18 minuti, la terza in 20 minuti. Dopo quanti minuti partiranno di nuovo insieme? [180]

94 Due aerei partono contemporaneamente dall'aeroporto di Bologna e vi ritorneranno dopo aver percorso le rispettive rotte: il primo ogni 15 giorni e il secondo ogni 18

giorni. Dopo quanti giorni i due aerei si troveranno di nuovo insieme a Bologna? [90]

95 Una cometa passa in prossimità della Terra ogni 360 anni, una seconda ogni 240 anni e una terza ogni 750 anni. Se quest'anno sono state avvistate tutte e tre, fra quanti anni si ripeterà la stessa situazione? [18 000]

96 Un'automobile percorre 18 km con un litro di benzina e il suo proprietario deve

intraprendere un viaggio di 432 km. Quanta benzina bisogna aggiungere sapendo che nel serbatoio ce ne sono già 12 litri e che l'auto deve arrivare a destinazione con ancora almeno 4 litri di carburante residuo? [16]

97 Sotto uno stesso porticato si trovano tre negozi, ciascuno dei quali ha un'insegna luminosa intermittente: la prima si spegne ogni 4 secondi, la seconda ogni 5 secondi, la terza ogni 9 secondi. Se le insegne vengono accese contemporaneamente alle 19:00 e spente contemporaneamente alle 21:00, quante volte durante la serata le tre insegne si spegneranno contemporaneamente? [40]

98 In una città, tutte le linee della metropolitana cominciano il servizio alla stessa ora. La linea rossa fa una corsa ogni 15 minuti, la linea gialla ogni 20 minuti e la linea blu ogni 30 minuti. Salvo ritardi, ogni quanti minuti le tre linee partono nello stesso momento? [60]

99 Nelle scuole, i viaggi d'istruzione sono regolati da norme di sicurezza che prevedono un insegnante accompagnatore ogni 15 studenti. Se alla gita di quest'anno partecipano 105 studenti, quanti insegnanti servono? [7]

2 | NUMERI INTERI

Con i numeri naturali non si può sempre eseguire l'operazione di differenza. In particolare, non si può sottrarre un numero più grande da un numero più piccolo, per esempio $5 - 7$. Tuttavia ci sono situazioni in cui una differenza di questo tipo deve essere eseguita.

Per esempio, si può acquistare un'auto da 7000 € pur avendo risparmi in banca di soli 5000 €. Bisogna togliere dai 5000 € i 7000 € che servono per acquistare l'auto. Materialmente non si può e si ricorre a un prestito di 2000 €.

Pensiamo a una comunicazione dei meteorologi relativa alle previsioni del tempo: «Domani la temperatura, a causa di una perturbazione proveniente dai paesi nordici, scenderà di 7 gradi». Se oggi la temperatura è di 5 gradi, come possiamo esprimere numericamente la temperatura prevista per domani? Alcuni diranno che «domani la temperatura sarà di due gradi sotto lo zero» e altri ancora che «la temperatura sarà di -2 gradi».

Leggiamo nel testo di geografia: «Il punto più alto della Terra si trova sulla cima del monte Everest, a 8855 metri sopra il livello del mare, mentre il punto più profondo della Terra si trova nella fossa delle Marianne, a 10 916 metri sotto il livello del mare». Se attribuiamo al livello del mare il valore zero, allora possiamo esprimere l'altezza del monte Everest con il numero $+8855$ e la profondità della fossa delle Marianne con il numero -10916 (figura 2).

Per rappresentare le grandezze che hanno due "versi", come crediti e debiti, temperature, altitudini e profondità, i numeri naturali non bastano. In queste situazioni si usano i *numeri interi*, che si scrivono impiegando i numeri naturali facendoli precedere dal segno $+$ se sono numeri positivi (maggiori di 0) e dal segno $-$ se sono numeri negativi (minori di 0). L'insieme dei numeri interi si indica con il simbolo \mathbb{Z} .

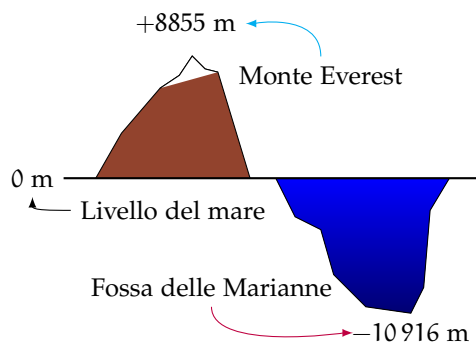
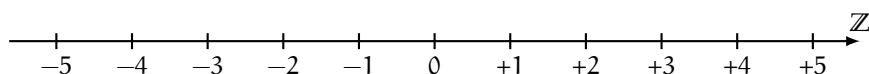


Figura 2: Il monte Everest e la fossa delle Marianne

$$\mathbb{Z} = \{ \dots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5, \dots \}$$

2.1 RAPPRESENTAZIONE GEOMETRICA

I numeri interi si possono rappresentare su una retta. Disegniamo una retta, su di essa prendiamo un punto cui associamo il numero zero, il verso di percorrenza da sinistra verso destra e un segmento come unità di misura. Riportiamo questo segmento più volte partendo da zero e procedendo nel verso stabilito aggiungiamo ogni volta 1: ai punti trovati associamo gli interi positivi. Ripetiamo l'operazione partendo dallo zero, ma con il verso di percorrenza a sinistra: ai punti trovati associamo gli interi negativi.



Possiamo interpretare questi numeri come il numero di passi da fare sulla retta, partendo dallo zero verso destra se il segno è positivo, verso sinistra se il segno è negativo.

Consideriamo il numero intero $+3$. È naturale identificarlo con il numero naturale 3. Analogamente, a ogni numero intero $+a$ maggiore o uguale a zero corrisponde il numero naturale a . Questi interi costituiscono un sottoinsieme di \mathbb{Z} , che si può identificare con \mathbb{N} . Possiamo perciò dire che \mathbb{N} è un sottoinsieme di \mathbb{Z} : scriveremo $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ e leggeremo « \mathbb{N} è contenuto in \mathbb{Z} ».

Per indicare un numero intero positivo si può dunque scrivere il numero senza il segno $+$. Per esempio, si può scrivere indifferentemente $+3$ o 3 .

Definizione 10. Due numeri interi si dicono *concordi* se hanno lo stesso segno; si dicono *discordi* se hanno segni opposti.

Per esempio:

- $+3$ e $+5$ sono concordi
- -3 e $+5$ sono discordi
- $+3$ e -5 sono discordi
- -5 e -3 sono concordi

Definizione 11. Il *valore assoluto* di un numero intero è “il numero senza il segno”.

Il valore assoluto si indica inserendo il numero intero tra due barre verticali. In linguaggio matematico:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{se } a \geq 0 \\ -a & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

Per esempio:

- $|+1| = 1$
- $|-2| = 2$
- $|+3| = 3$
- $|-4| = 4$

Definizione 12. Due numeri interi si dicono *opposti* se hanno lo stesso valore assoluto ma segni diversi.

Per esempio, sono numeri opposti:

- $+1$ e -1
- $+2$ e -2
- $+3$ e -3
- $+4$ e -4

Confronto tra numeri interi

Dati due numeri interi, quello più grande è quello che sulla retta è rappresentato più a destra. In particolare:

- ogni numero intero positivo è maggiore di ogni numero negativo
- tra due numeri positivi, il più grande è quello che ha valore assoluto maggiore
- ogni numero negativo è minore di ogni numero positivo
- tra due numeri negativi, il più grande è quello che ha valore assoluto minore
- 0 è minore di ogni numero positivo e maggiore di ogni numero negativo

Per esempio:

- $+3 > +1$: i numeri sono positivi, il maggiore è $+3$ che ha valore assoluto maggiore
- $-1 > -3$: i numeri sono negativi, il maggiore è -1 che ha valore assoluto minore
- $+3 > -1$: il numero positivo è maggiore del numero negativo

2.2 OPERAZIONI CON I NUMERI INTERI

Con i numeri interi si possono sempre eseguire le somme, le differenze e i prodotti. Questo significa che se si sommano, si sottraggono o si moltiplicano due numeri interi il risultato dell'operazione si trova sempre nella retta dei numeri interi.

Somma

La somma di due numeri interi si esegue in due modi diversi a seconda che gli addendi siano concordi o discordi:

- la somma di due numeri interi *concordi* è il numero che ha per valore assoluto la somma dei singoli valori assoluti e come segno lo stesso segno degli addendi
- la somma di due numeri interi *discordi* è il numero che ha per valore assoluto la differenza dei valori assoluti e come segno il segno del numero che ha valore assoluto maggiore

Per esempio:

- $(+3) + (+5) = +8$: gli addendi sono concordi, il loro segno è $+$, i loro valori assoluti sono 3 e 5, la loro somma è 8 e il segno è $+$
- $(-1) + (-3) = -4$: gli addendi sono concordi, il loro segno è $-$, i loro valori assoluti sono 1 e 3, la somma ha valore assoluto 4 e il segno è $-$
- $(-5) + (+2) = -3$: gli addendi sono discordi, i loro valori assoluti sono 5 e 2, la differenza è 3, il numero che ha valore assoluto maggiore è -5 , quindi il risultato ha lo stesso segno di -5 , cioè $-$
- $(-3) + (+5) = +2$: gli addendi sono discordi, i loro valori assoluti sono 3 e 5, la loro differenza è 2, il numero che ha valore assoluto maggiore è $+5$, quindi il risultato ha lo stesso segno di $+5$, cioè $+$

La somma si rappresenta nella retta dei numeri come l'azione di muoversi nel verso indicato dal segno del secondo addendo: se è positivo si va verso destra (figura 3), se è negativo verso sinistra (figura 4), cominciando dal punto che rappresenta il primo addendo.

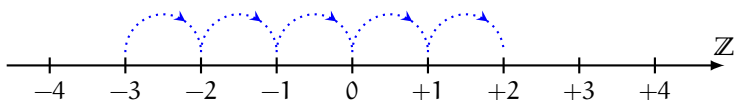


Figura 3: $(-3) + (+5) = +2$

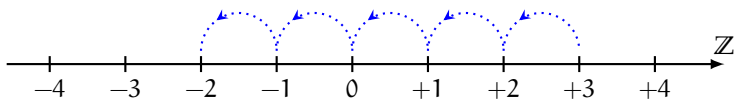


Figura 4: $(+3) + (-5) = -2$

Sottrazione

La sottrazione tra due numeri interi si esegue sommando il primo numero con l'opposto del secondo. Per esempio:

- $(+1) - (+3) = (+1) + (-3) = -2$
- $(+1) - (-3) = (+1) + (+3) = +4$

Somma algebrica

Poiché una sottrazione si può trasformare in una somma, le operazioni di somma e sottrazione di numeri interi costituiscono un'unica operazione detta *somma algebrica*. Per semplicità, la somma algebrica di numeri interi si scrive senza le parentesi, scrivendo i numeri uno dopo l'altro, ciascuno con il proprio segno. Per esempio:

- $(+1) + (+3) = 1 + 3 = 4$
- $(+1) - (+3) = 1 - 3 = -2$

Prodotto

Definizione 13. Il *prodotto* di due numeri interi, detti *fattori*, è il numero intero che ha come valore assoluto il prodotto dei valori assoluti dei fattori e come segno il segno $+$ se i fattori sono concordi, il segno $-$ se sono discordi.

Per esempio:

- $(+2) \cdot (-3) = -6$
- $(+5) \cdot (+3) = +15$
- $(-2) \cdot (-3) = +6$
- $(-1) \cdot (+2) = -2$

Se si devono eseguire più moltiplicazioni, il prodotto è negativo se il segno $-$ è presente in un numero dispari di fattori; se il segno $-$ è presente un numero pari di fattori il prodotto è positivo.

Perché meno per meno fa più?

Consideriamo le seguenti uguaglianze:

$$0 = 0 \cdot (-2) = (-3 + 3) \cdot (-2) = (-3) \cdot (-2) + (+3) \cdot (-2) = (-3)(-2) - 6.$$

Quale valore dobbiamo assegnare a $(-3) \cdot (-2)$ affinché il numero ottenuto sommato a -6 dia 0 ? Evidentemente, il numero $+6$.

Divisione

La definizione di divisione è analoga a quella della moltiplicazione. Per dividere due numeri interi se ne dividono i valori assoluti e si attribuisce al risultato il segno $+$ se i numeri da dividere sono concordi, il segno $-$ se sono discordi. Per esempio:

- $(+6) : (+2) = +3$

- $(-6) : (+2) = -3$

- $(+6) : (-2) = -3$

- $(-6) : (-2) = +3$

Mentre la somma, la differenza e il prodotto sono operazioni sempre possibili tra numeri interi, la divisione tra numeri interi non è sempre possibile (si può fare solo se il valore assoluto del divisore è multiplo del dividendo).

Potenza

La definizione di potenza di un numero intero è analoga a quella data per i numeri naturali. L'unica attenzione che dobbiamo avere è quella relativa al segno:

- se la base è positiva, la potenza è positiva
- se la base è negativa, il segno della potenza dipende dall'esponente: se l'esponente è dispari la potenza è negativa, mentre se l'esponente è pari la potenza è positiva

Per esempio:

- $(+2)^2 = (+2) \cdot (+2) = +4$

- $(-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = +4$

- $(+2)^3 = (+2) \cdot (+2) \cdot (+2) = +8$

- $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$

2.3 ESERCIZI

Chi non risolve esercizi non impara la matematica.

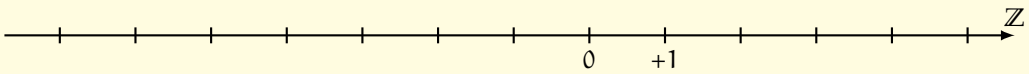
1 Riscrivi in ordine crescente (dal più piccolo al più grande) i seguenti numeri interi.

-3 0 +2 -5 -7 +1 -5

2 Riscrivi in ordine crescente (dal più piccolo al più grande) i seguenti numeri interi.

-5 -2 +3 -1 0 +7 -9

3 Disponi sulla retta orientata i seguenti numeri: $-3, +2, +5, -7, -5, -1, +3$.



4 Scrivi il valore assoluto di ciascuno dei seguenti numeri interi.

-5 -1 +10 -11 +7 -3

5 Inserisci al posto dei puntini il simbolo corretto, scegliendolo tra $>$ e $<$.

- | | | | |
|------------------|------------------|------------------|------------------|
| a. $-5 \dots -2$ | d. $-5 \dots +5$ | g. $+3 \dots -3$ | j. $+3 \dots -3$ |
| b. $-3 \dots +5$ | e. $-3 \dots -5$ | h. $-1 \dots -5$ | k. $0 \dots -2$ |
| c. $-2 \dots +2$ | f. $-1 \dots +1$ | i. $0 \dots +1$ | l. $+7 \dots +2$ |

6 Esegui le seguenti somme di numeri interi.

- | | | | | | |
|------------------|-------|-------------------|------|-------------------|-------|
| a. $(+3) + (+2)$ | [5] | d. $(+12) + (+2)$ | [14] | g. $(+10) + (-5)$ | [5] |
| b. $(-5) + (-5)$ | [-10] | e. $(-2) + (-3)$ | [-5] | h. $(+1) + (+1)$ | [2] |
| c. $(-3) + (+5)$ | [2] | f. $(-3) + (+13)$ | [10] | i. $(-10) + 0$ | [-10] |

7 Esegui le seguenti somme di numeri interi.

- | | | | | | |
|------------------|-------|--------------------|------|------------------|------|
| a. $(-4) + (+4)$ | [0] | d. $(-10) + (+2)$ | [-8] | g. $(+3) + (-4)$ | [-1] |
| b. $(+7) + (-6)$ | [1] | e. $0 + (-9)$ | [-9] | h. $(-3) + (-4)$ | [-7] |
| c. $(-9) + (-3)$ | [-12] | f. $(-10) + (+10)$ | [0] | i. $(-3) + (+4)$ | [1] |

8 Esegui le seguenti somme algebriche.

- | | | | | | |
|-------------|------|-------------|------|-------------|------|
| a. $+3 - 1$ | [2] | d. $-2 + 2$ | [0] | g. $0 - 5$ | [-5] |
| b. $+2 - 3$ | [-1] | e. $-5 - 2$ | [-7] | h. $+1 - 1$ | [0] |
| c. $-5 + 2$ | [-3] | f. $-3 + 5$ | [2] | i. $-2 - 2$ | [-4] |

9 Esegui le seguenti somme algebriche.

- | | | | | | |
|--------------|------|-------------|-------|--------------|-------|
| a. $+7 - 6$ | [1] | d. $-3 + 4$ | [1] | g. $+4 - 6$ | [-2] |
| b. $-10 + 5$ | [-5] | e. $-1 - 9$ | [-10] | h. $-3 - 9$ | [-12] |
| c. $-5 - 2$ | [-7] | f. $+5 - 2$ | [3] | i. $+14 - 7$ | [7] |

10 Calcola i seguenti prodotti.

- | | | | | | |
|----------------------|------|----------------------|------|-----------------------|-------|
| a. $(+3) \cdot (-2)$ | [-6] | d. $(+1) \cdot (-1)$ | [-1] | g. $0 \cdot (-3)$ | [0] |
| b. $(-5) \cdot (-2)$ | [10] | e. $(+3) \cdot 0$ | [0] | h. $(-2) \cdot (+2)$ | [-4] |
| c. $(+2) \cdot (+4)$ | [8] | f. $(-2) \cdot (-2)$ | [4] | i. $(+10) \cdot (-1)$ | [-10] |

11 Calcola i seguenti prodotti.

- | | | | | | |
|----------------------|------|----------------------|-------|-----------------------|-------|
| a. $(+3) \cdot (+1)$ | [3] | d. $(-5) \cdot (-1)$ | [5] | g. $(-1) \cdot (-7)$ | [7] |
| b. $(+1) \cdot (-2)$ | [-2] | e. $(+3) \cdot (-3)$ | [-9] | h. $(+1) \cdot (-10)$ | [-10] |
| c. $(+3) \cdot (-3)$ | [-9] | f. $(-2) \cdot (+5)$ | [-10] | i. $(-4) \cdot (+3)$ | [-12] |

12 Esegui le seguenti divisioni.

- | | | | | | |
|------------------|------|-------------------|------|-------------------|-------|
| a. $(+4) : (+2)$ | [2] | d. $(-4) : (+2)$ | [-2] | g. $(-12) : (+4)$ | [-3] |
| b. $(+5) : (-1)$ | [-5] | e. $(+10) : (-2)$ | [-5] | h. $(+12) : (-3)$ | [-4] |
| c. $(-8) : (+4)$ | [-2] | f. $(-12) : (+6)$ | [-2] | i. $(-12) : (+1)$ | [-12] |

13 Calcola il valore delle seguenti potenze.

- | | | | | | | | |
|-------------|-----|-------------|------|-------------|-------|-------------|------|
| a. $(+3)^2$ | [9] | d. $(-2)^3$ | [-8] | g. $(-3)^3$ | [-27] | j. $(-2)^4$ | [16] |
| b. $(-1)^2$ | [1] | e. $(+2)^3$ | [8] | h. $(+4)^1$ | [4] | k. $(-3)^0$ | [1] |
| c. $(-2)^2$ | [4] | f. $(-3)^2$ | [9] | i. $(-4)^2$ | [16] | l. $(-1)^5$ | [-1] |

14 Applica le proprietà delle potenze.

a. $(-3)^2 \cdot (-3)^3 = (-3)\dots$	f. $(-7)^3 : (-7)^3 = (-7)\dots$	j. $[(-5)^2]^3 = (+5)\dots$
b. $(-2)^4 \cdot (-2)^5 = (-2)\dots$		k. $(-3)^3 \cdot (+3)^3 = \dots$
c. $(-5) \cdot (-5)^2 = (-5)\dots$	g. $(-2)^4 : (-2)^2 = (-2)\dots$	l. $(-8)^2 : (-4)^2 = \dots$
d. $(-3)^2 \cdot (-5)^2 = (\dots)^2$	h. $(-6)^4 : (+2)^4 = (\dots)^4$	m. $[(-7)^2]^3 : (-7)^3 = \dots$
e. $(-3)^4 : (-3)^2 = (-3)\dots$	i. $[(-3)^2]^3 = (-3)\dots$	n. $[(-3)^3]^2 : (-3)^4 = \dots$

15 In quali delle seguenti situazioni è utile ricorrere ai numeri interi?

- Misurare la temperatura
- Esprimere la propria età
- Contare le persone
- Indicare altezze e profondità

16 Indica la risposta corretta.

a. La somma di due numeri interi è sicuramente positiva quando i numeri sono:

- A concordi B discordi C positivi D negativi

b. La somma di due numeri interi è sicuramente negativa quando i numeri sono:

- A concordi B discordi C positivi D negativi

c. Il prodotto di due numeri interi è positivo quando i numeri sono:

- A concordi B discordi C entrambi nulli D diversi da zero

d. Il prodotto di due numeri interi è negativo quando i numeri sono:

- A concordi B discordi C positivi D negativi

[Una risposta A, una B, una C e una D]

17 Vero o falso?

- | | | |
|---|----------------------------|----------------------------|
| a. Ogni numero intero è minore di zero. | <input type="checkbox"/> V | <input type="checkbox"/> F |
| b. La somma di due numeri discordi è zero. | <input type="checkbox"/> V | <input type="checkbox"/> F |
| c. Il cubo di un numero negativo è sempre negativo. | <input type="checkbox"/> V | <input type="checkbox"/> F |
| d. La somma di due numeri opposti è nulla. | <input type="checkbox"/> V | <input type="checkbox"/> F |
| e. Il quoziente di due numeri opposti è l'unità. | <input type="checkbox"/> V | <input type="checkbox"/> F |
| f. Il quoziente di due numeri concordi è positivo. | <input type="checkbox"/> V | <input type="checkbox"/> F |

g. Il prodotto di due numeri opposti è uguale al loro quadrato. V F

h. Il doppio di un numero negativo è positivo. V F

i. La somma di due interi concordi è sempre maggiore di ciascun addendo. V F

j. Il quadrato dell'opposto di un intero è uguale all'opposto del suo quadrato. V F

[3 affermazioni vere e 7 false]

18 Inserisci al posto dei puntini l'operazione corretta per ottenere il risultato indicato.

a. $(+2) \dots (-1) = -2$ d. $(+15) \dots (-20) = -5$ g. $(+1) \dots (+1) = 0$

b. $(-10) \dots (+5) = -2$ e. $(-12) \dots (+4) = -3$ h. $(+5) \dots (-6) = +11$

c. $(-18) \dots (-19) = +1$ f. $(-4) \dots 0 = 0$ i. $-8 \dots (-2) = +16$.

19 Inserisci al posto dei puntini il numero mancante.

a. $+5 + (\dots) = -5$ d. $0 - (\dots) = -2$ g. $(+16) : (\dots) = -2$

b. $-8 + (\dots) = -6$ e. $+3 \cdot (\dots) = -3$ h. $(-6) : (\dots) = -1$

c. $+7 - (\dots) = 0$ f. $-5 \cdot (\dots) = 0$ i. $(-10) : (\dots) = +5$

20 Scrivi tutti i numeri:

a. interi che hanno valore assoluto < 5 d. interi negativi maggiori di -5

b. interi il cui prodotto è -12 e. interi positivi minori di 6

c. interi il cui prodotto è 6 f. interi divisori di 10

21 Inserisci le parentesi nelle seguenti espressioni in modo da ottenere il risultato indicato.

a. $-5 \cdot +3 - 1 + 2 = -20$ c. $-5 + 7 - 3 \cdot 2 = +3$

b. $-5 + 2 \cdot -1 + 2 = +5$ d. $-1 \cdot +3 - 5 \cdot -1 - 2 = +12$

Calcola il valore delle seguenti espressioni.

22 $-5 + 7 + 4 - 9$ [-3] **25** $(-3 + 10) - (2 - 3)$ [8]

23 $+1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1$ [1] **26** $(+5 - 2 - 1) + (+2 + 4 + 6)$ [14]

24 $+1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6$ [-3] **27** $(-5 + 7) + (+1 - 2) - (+4 - 6)$ [3]

Calcola il valore delle seguenti espressioni.

28 $(50 - 36 - 25) \cdot (-15 + 5 + 20) - 10 \cdot (-3 - 7)$ [-10]

29 $18 : (-3) + 6 \cdot [1 - 5 \cdot (-2 + 4) + 3] : (-6)$ [0]

- 30 $15 - 9 \cdot (-14 + 12) + 8 \cdot (-3 + 6) + 5 \cdot (-3 + 1)$ [47]
 31 $[+3 - (10 - 5 + 25)] \cdot [-16 + 5 - (-2 - 14)] : (9 + 6)$ [-9]
 32 $20 : (+15 - 5) - 30 : (-10 + 5) + 40 : (15 - 20)$ [0]

Calcola il valore delle seguenti espressioni, applicando dove possibile le proprietà delle potenze.

- 33 $100 : 2 + 3^2 - 2^2 \cdot 6$ [35] 37 $5 \cdot 5^3 \cdot 5^4 : (5^2)^3 + 5$ [30]
 34 $2^7 : 2^3 - 2^2$ [12] 38 $32^5 : 16^4 + (-2)^9$ [0]
 35 $30 - 5 \cdot 3 - 7 \cdot 2^2 - 2$ [-15] 39 $(3^4 \cdot 3^3 : 3^6)^2 + (7^2 - 5^2) : 2^2$ [15]
 36 $(3^2 + 4^2) - (-3 - 4)^2$ [-24] 40 $2^4 \cdot (3^3 + 2^3) : 7 - 10 \cdot 2^3$ [0]

Calcola il valore delle seguenti espressioni.

- 41 $[-3 + (-5) \cdot (-1)]^3 + [-4 - (1 - 2)]^2$ [17]
 42 $(-29 + 37)^5 \cdot (-5 + |23 - 28|)^7$ [0]
 43 $-2 \cdot (-2 \cdot |-2|)^2 - (|-2| \cdot (-2))^2 \cdot (-2)$ [0]
 44 $[3 \cdot (-1)^2 - 3 \cdot (-3) \cdot (-3)]^3 : [2^2 + 5 \cdot (-2)^2]^3$ [-1]
 45 $[-(-2) \cdot 2 + (-10)^2 : (-5)^2] \cdot [3 - 5 + 2 \cdot (-3)^2 - 5]$ [88]
 46 $13 - 3 - 4 \cdot (-2)^2 - 5^3 : 5^2 + 3 \cdot (2^3 - 3^2) - 6 : (-3) - (4 - 7 + 3)^4$ [-12]
 47 $-1 - 3 \cdot (-3)^2 - 4^3 : 4^2 + (-3 - 3) \cdot (2^2 + 3^2) - (-12) : (-3)$ [-114]
 48 $[10 - 6 \cdot (-2)^2] : (-7) + (3^2 : 3) \cdot 2^3 - 15 : (-3) + [(-3)^3 : (-3)^0]$ [4]
 49 $(-1)^3 \cdot (-1 \cdot |-1|)^2 - (|-3 - 2| \cdot (-5 + 3))^2 \cdot (-2 + 1)^3$ [99]
 50 $-[(-5) \cdot (-2 + 3) \cdot (-3) + (-1 + 4 - 9) : (-1)] + (-2) : (+2)$ [-22]

51 Traduci in un'espressione matematica le seguenti affermazioni e motivane la verità o falsità.

- Il cubo del quadrato di un numero diverso da zero è sempre positivo.
- Il quadrato della somma di un numero con il suo opposto è sempre positivo.
- La differenza tra il triplo di 5 e l'unità è uguale all'opposto di 5.

52 Svolgi i seguenti esercizi.

- Sottrai dal cubo di -3 la somma dei quadrati di $+2$ e -2 . Il risultato è? [-35]
- Sottrai dalla somma di -15 e $+27$ il prodotto di -3 e $+7$. [33]
- Aggiungi al prodotto di -5 e $+3$ la somma di $+5$ e -10 . [-20]
- Sottrai dal prodotto di $+7$ e $+4$ la somma di $+1$ e -8 . [35]
- Moltiplica la somma tra -3 e $+3$ con la differenza tra $+3$ e -3 . [0]

- f. Partendo dal piano terreno, scendo di 15 gradini, salgo di 12 gradini, scendo di 7 gradini e risalgo di 8. A che punto mi trovo rispetto alla posizione di partenza? $[-2]$
- g. Un polpo che tolto dal congelatore ha una temperatura è -12°C viene immerso in acqua bollente e la sua temperatura aumenta di 6°C . A quale temperatura si trova ora il polpo? $[-6^{\circ}\text{C}]$

53 Trova due numeri interi che abbiano:

- a. prodotto 12 e somma -7 $[-4, -3]$ d. prodotto -10 e somma $+3$ $[5, -2]$
- b. prodotto -2 e somma 1 $[2, -1]$ e. prodotto 15 e somma -8 $[-5, -3]$
- c. prodotto -10 e somma -3 $[-5, 2]$ f. prodotto -7 e somma 6 $[7, -1]$

3 | NUMERI RAZIONALI

I numeri naturali non permettono di eseguire le sottrazioni se il sottraendo è maggiore del minuendo. Per questo motivo è stato necessario introdurre i numeri interi. Neppure i numeri interi, però, sono sufficienti per risolvere tutti i problemi. Immaginiamo la seguente situazione: se dobbiamo dividere 18 biscotti tra 6 ragazzi, quanti biscotti riceverà ciascun ragazzo? La risposta è semplice: a ciascun ragazzo spettano $18 : 6 = 3$ biscotti. Ma se, invece di 18 biscotti, dovessimo dividere 2 torte tra 6 ragazzi? Sappiamo che negli insiemi \mathbb{N} e \mathbb{Z} la divisione $2 : 6$ non si può eseguire (figura 5a).

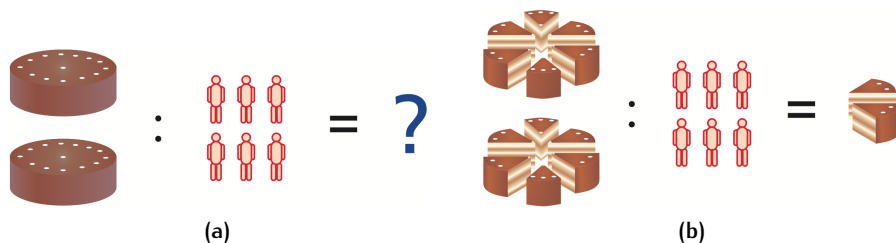


Figura 5: I numeri interi non bastano per risolvere tutti i problemi

C'è però un modo facile per risolvere il problema. Basta tagliare ciascuna delle 2 torte in 6 fette uguali. Risulteranno 12 fette che si potranno dividere tra i 6 ragazzi, ciascuno dei quali avrà 2 fette (figura 5b).

I numeri naturali e gli interi non permettono di esprimere questa semplice soluzione. In situazioni come questa si deve ricorrere alle *frazioni* o, più precisamente, ai *numeri razionali*. In questo modo potremo dire che a ogni ragazzo spettano $2/6$ di torta, cioè $1/3$ di torta.

3.1 DALLE FRAZIONI AI NUMERI RAZIONALI

Frazioni

Definizione 14. Una *frazione* è un'espressione del tipo $\frac{a}{b}$ (si scrive anche a/b) che "rappresenta" il risultato della divisione tra i numeri interi a e b , con $b \neq 0$. I numeri a e b si chiamano *termini* della frazione: precisamente a si chiama *numeratore* e b *denominatore*.

Sappiamo che non si può dividere per zero: quindi *il denominatore di una frazione deve essere diverso da zero*. Nel seguito assumeremo sempre che i denominatori delle frazioni considerate siano diversi da zero.

Se il numeratore è multiplo del denominatore, la frazione rappresenta il risultato di una divisione che si può eseguire nell'insieme dei numeri interi. Per esempio, la frazione $6/3$ rappresenta il risultato della divisione $6 : 3 = 2$. In casi come questo non è necessario ricorrere a una frazione. Tali frazioni si dicono perciò *apparenti*. In particolare, se il denominatore è uguale a 1 si scrive la frazione senza il denominatore. Per esempio, $3/1 = 3$.

Frazioni equivalenti

Una frazione rappresenta il risultato di una divisione. Possiamo però ottenere lo stesso risultato da divisioni diverse. Dobbiamo dunque aspettarci che frazioni diverse possano rappresentare lo stesso rapporto. Pensiamo, per esempio, alla situazione che abbiamo esaminato nel paragrafo precedente: per dividere 2 torte tra 6 ragazzi possiamo dividere ciascuna torta in 6 fette e dare 2 fette a ogni ragazzo, oppure possiamo dividere ciascuna torta in 3 fette e dare una fetta a ogni ragazzo. Nel primo caso ogni ragazzo riceverà $2/6$ di torta, mentre nel secondo riceverà $1/3$ di torta. In entrambi i casi, però, la quantità di torta ricevuta sarà la stessa, quindi possiamo dire che $2/6$ e $1/3$ rappresentano lo stesso rapporto. Per questo motivo si dice che le frazioni $1/3$ e $2/6$ sono *equivalenti*.

Definizione 15. Due frazioni $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ si dicono *equivalenti* se $a \cdot d = b \cdot c$.

In altre parole, due frazioni sono equivalenti se il prodotto tra il numeratore della prima per il denominatore della seconda è uguale al prodotto tra il denominatore della prima per il numeratore della seconda. Per indicare l'equivalenza tra due frazioni si usa il simbolo di uguaglianza. Per esempio:

- $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$, perché $1 \cdot 6 = 3 \cdot 2$
- $\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$, perché $2 \cdot 10 = 5 \cdot 4$

Proprietà invariante

Proposizione 2 (Proprietà invariante delle frazioni). Moltiplicando o dividendo entrambi i termini di una frazione per uno stesso numero *diverso da zero*, si ottiene una frazione equivalente alla frazione data.

Per esempio:

- data la frazione $2/6$, se dividiamo per 2 sia il numeratore che il denominatore otteniamo:

$$\frac{2}{6} = \frac{2:2}{6:2} = \frac{1}{3}$$

- data la frazione $3/4$, se moltiplichiamo entrambi i suoi termini per 5 otteniamo:

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 5} = \frac{15}{20}$$

Riduzione ai minimi termini

Consideriamo la frazione $4/6$. Il MCD dei suoi termini è 2. Ciò significa che sia il numeratore che il denominatore sono divisibili per 2. Perciò, per la proprietà invariante:

$$\frac{4}{6} = \frac{4:2}{6:2} = \frac{2}{3}$$

I termini della frazione equivalente così ottenuta sono primi tra loro e quindi non si può trovare un'altra frazione, equivalente a quella data, i cui termini siano, in valore assoluto, più piccoli. Si dice che la frazione è stata *ridotta ai minimi termini*.

Definizione 16. Una frazione si dice *ridotta ai minimi termini* se i suoi termini sono primi tra loro.

In generale, per ridurre una frazione ai minimi termini (o, come anche si dice, per *semplificarla*) si dividono il numeratore e il denominatore per il MCD dei loro valori assoluti.

Esercizio 11. Semplifica la frazione $\frac{12}{18}$.

Soluzione. Si ha $\text{MCD}(12, 18) = 6$. Dividiamo per 6 sia il numeratore che il denominatore della frazione:

$$\frac{12}{18} = \frac{12:6}{18:6} = \frac{2}{3}$$

Di solito si scrive $\frac{12^2}{18_3} = \frac{2}{3}$. □

Per stabilire se due frazioni sono equivalenti si può applicare la definizione 15 oppure si possono ridurre entrambe le frazioni ai minimi termini, come nel prossimo esempio.

Esercizio 12. Stabilisci se le frazioni $\frac{9}{12}$ e $\frac{24}{32}$ sono equivalenti.

Soluzione. Riduciamo entrambe le frazioni ai minimi termini:

- per la prima frazione si ha $\text{MCD}(9, 12) = 3$ e quindi $\frac{9}{12} = \frac{9:3}{12:3} = \frac{3}{4}$
- per la seconda frazione si ha $\text{MCD}(24, 32) = 8$ e quindi $\frac{24}{32} = \frac{24:8}{32:8} = \frac{3}{4}$

Le due frazioni sono equivalenti a $\frac{3}{4}$ e perciò sono equivalenti tra loro:

$$\frac{9}{12} = \frac{24}{32} = \frac{3}{4}$$

□

Minimo comune denominatore

Per confrontare, sommare o sottrarre due o più frazioni, è comodo che esse abbiano lo stesso denominatore. Si possono esprimere due o più frazioni con lo stesso denominatore in infiniti modi, ma è preferibile che il denominatore comune sia il più piccolo possibile, cioè che sia il *minimo comune denominatore* delle frazioni date.

Per ridurre due o più frazioni al minimo comune denominatore, si procede così:

- si riducono le frazioni ai minimi termini
- si calcola il mcm dei denominatori delle frazioni ridotte: esso è il minimo comune denominatore
- si moltiplica il numeratore di ciascuna frazione ridotta per il quoziente tra il minimo comune denominatore e il corrispondente denominatore; si ottiene così il numeratore di ciascuna nuova frazione; il denominatore è il minimo comune denominatore prima trovato

Esercizio 13. Riduci al minimo comune denominatore le frazioni $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$ e $\frac{2}{3}$.

Soluzione.

- Le frazioni sono già ridotte ai minimi termini.
- Calcoliamo il minimo comune multiplo dei denominatori delle tre frazioni. Si ha che $\text{mcm}(2, 3, 5) = 30$. Quindi 30 è il minimo comune denominatore delle tre frazioni.
- Calcoliamo, per ciascuna delle tre frazioni, il quoziente tra il minimo comune denominatore 30 e il corrispondente denominatore, moltiplicandone poi il numeratore per il quoziente così ottenuto. Scriviamo infine le tre frazioni che hanno tali prodotti come numeratori e hanno i denominatori tutti uguali al minimo comune denominatore 30:

$$\frac{1}{2} = \frac{(30:2) \cdot 1}{30} = \frac{15}{30} \quad \frac{3}{5} = \frac{(30:5) \cdot 3}{30} = \frac{18}{30} \quad \frac{2}{3} = \frac{(30:3) \cdot 2}{30} = \frac{20}{30}$$

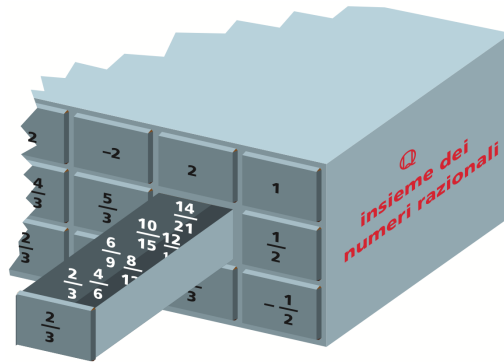


Figura 6: Una rappresentazione dell'insieme \mathbb{Q} dei numeri razionali

Le frazioni ridotte al minimo comune denominatore sono quindi $\frac{15}{30}$, $\frac{18}{30}$ e $\frac{20}{30}$. \square

Numeri razionali

Data una frazione, ci sono infinite altre frazioni equivalenti a essa. Tali frazioni sono tutte equivalenti tra loro. Per esempio:

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12} = \frac{10}{15} = \dots$$

Tutte queste frazioni costituiscono un insieme che prende il nome di *numero razionale*.

Definizione 17. Si chiama *numero razionale* l'insieme di tutte le frazioni equivalenti a una data frazione.

La parola *razionale* deriva dal latino *ratio*, che significa “ragione”, ma anche “rapporto”, “quoziente”.

Per rappresentare un numero razionale si usa una frazione scelta fra tutte quelle che compongono tale insieme, preferibilmente quella ridotta ai minimi termini. L'insieme dei numeri razionali si indica con il simbolo \mathbb{Q} .

Per comprendere meglio la definizione, consideriamo la figura 6. Ogni cassetto contiene infinite frazioni, tutte equivalenti tra loro, e quindi rappresenta un numero razionale. Sullo sportello di ciascun cassetto è raffigurata una frazione, scelta per rappresentare quel numero razionale. Come abbiamo già detto, è preferibile scegliere una frazione ridotta ai minimi termini. La cassetiera, intesa come insieme di infiniti cassetti, rappresenta l'insieme \mathbb{Q} dei numeri razionali.

Consideriamo per esempio il seguente insieme di frazioni:

$$\left\{ \frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \frac{8}{12}, \frac{10}{15}, \dots \right\}$$

Come abbiamo visto, queste frazioni sono tutte equivalenti tra loro. L'insieme considerato costituisce quindi un numero razionale. Questo numero razionale si può rappresentare con una qualsiasi delle frazioni dell'insieme, ma è preferibile usare la frazione $2/3$, che è ridotta ai minimi termini. Quindi $2/3$ rappresenta il numero razionale dato.

Attenzione! Anche se per indicare i numeri razionali si impiegano delle frazioni, un numero razionale *non* è una frazione, ma un insieme di frazioni, tutte equivalenti tra loro. Un'espressione come «il numero razionale $2/3$ », che talvolta useremo per semplicità, significa «il numero razionale rappresentato dalla frazione $2/3$ ».

Consideriamo ora il numero razionale costituito da tutte le frazioni equivalenti a $2/3$:

$$\left\{ \frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \frac{8}{12}, \dots \right\}$$

È naturale identificare questo numero razionale con il numero intero 3. Analogamente, a ogni numero intero a corrisponde un numero razionale, costituito dall'insieme delle frazioni equivalenti ad $a/1$. Questi numeri razionali costituiscono un sottoinsieme di \mathbb{Q} che si può identificare con \mathbb{Z} . Possiamo perciò dire che \mathbb{Z} è un sottoinsieme di \mathbb{Q} : scriveremo $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ e leggeremo « \mathbb{Z} è contenuto in \mathbb{Q} ». Ricordando poi che l'insieme \mathbb{N} dei numeri naturali si può considerare un sottoinsieme di \mathbb{Z} , possiamo scrivere

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

La figura 7 rappresenta queste relazioni.

Come abbiamo visto per i numeri naturali e per i numeri interi, anche i numeri razionali si possono confrontare e ordinare e con essi si possono eseguire le usuali operazioni aritmetiche. Confronti e operazioni tra numeri razionali si eseguono operando sulle frazioni che li rappresentano nei modi che definiremo nei prossimi paragrafi, ma è importante comprendere che *i risultati che si ottengono sono indipendenti dalle frazioni scelte per rappresentarli*. Consideriamo per esempio la somma (che conosci dai tuoi studi precedenti):

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{3} = \frac{6}{3}$$

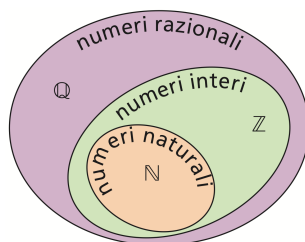


Figura 7: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

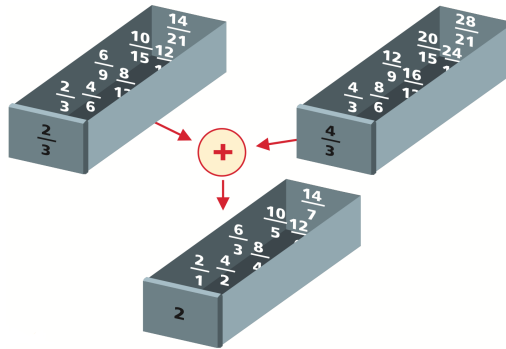


Figura 8: I risultati delle operazioni con i numeri razionali non dipendono dalle frazioni scelte per rappresentarli

Se sostituiamo alle frazioni date due frazioni a esse equivalenti, per esempio $4/6 = 2/3$ e $8/6 = 4/3$, la somma diviene

$$\frac{4}{6} + \frac{8}{6} = \frac{12}{6}$$

che coincide con il risultato precedente, perché la frazione trovata rappresenta lo stesso numero razionale:

$$\frac{6}{3} = \frac{12}{6} = 2$$

La figura 8 rappresenta la situazione: possiamo scegliere una qualsiasi frazione contenuta nel «cassetto $2/3$ » e una qualsiasi contenuta nel «cassetto $4/3$ ». In tutti i casi la loro somma è una frazione contenuta nel «cassetto 2».

In definitiva, per eseguire un calcolo con i numeri razionali si usano frazioni che li rappresentano: il risultato è un numero razionale che non dipende dalle frazioni scelte.

Rappresentazione geometrica

L'insieme \mathbb{Q} dei numeri razionali si può rappresentare su una retta.

Esercizio 14. Rappresenta su una retta orientata i numeri $\frac{5}{4}$ e $-\frac{3}{4}$.

Soluzione. Fissiamo su una retta un'origine e il verso di percorrenza da sinistra a destra (figura 9). Scegliamo quindi un segmento di lunghezza u come unità di misura. Dividiamo poi il segmento in 4 parti uguali, ottenendo il segmento di lunghezza u' . Quindi disponiamo consecutivamente 5 segmenti di lunghezza uguale a u' , a partire dall'origine verso destra. L'ultimo estremo dell'ultimo di tali segmenti è il punto associato a $5/4$.

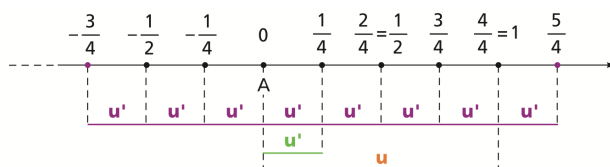


Figura 9: La retta dei numeri razionali

Procedendo in questo modo, abbiamo anche determinato i punti associati ai numeri razionali $1/4$, $1/2$, $3/4$ e 1 . Applicando lo stesso metodo, ma procedendo verso sinistra anziché verso destra, possiamo determinare anche il punto associato a $-3/4$. \square

Rispetto alle proprietà degli insiemi dei numeri naturali e dei numeri interi, c'è un'importante differenza: i concetti di "precedente" e di "successivo" non hanno senso nell'insieme dei numeri razionali. Infatti tra due qualsiasi numeri razionali c'è sempre un altro numero razionale. Questa proprietà si esprime dicendo che \mathbb{Q} è *denso*. Invece si dice che gli insiemi dei numeri naturali e dei numeri interi sono *discreti*: ciò significa che tra un numero naturale (o intero) e il suo successivo non vi sono altri numeri naturali (o interi).

Confronto tra numeri razionali

Nell'insieme dei numeri razionali si possono definire relazioni di disuguaglianza analoghe a quelle dei numeri naturali e degli interi. In particolare:

- un numero negativo è sempre minore di un numero positivo
- tra due numeri positivi il maggiore è quello che ha il maggior valore assoluto
- tra due numeri negativi il maggiore è quello che ha il minor valore assoluto

Per confrontare due numeri razionali concordi è conveniente innanzitutto esprimerli come frazioni con lo stesso denominatore e confrontare quindi i loro numeratori.

Esercizio 15. Confronta i numeri $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$.

Soluzione. Il minimo comune denominatore è $\text{mcm}(3, 4) = 12$. Esprimiamo quindi i due numeri dati mediante frazioni con denominatore 12:

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{8}{12} \quad \frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{9}{12}$$

Poiché $8 < 9$, si ha che $\frac{2}{3} < \frac{3}{4}$. \square

Esercizio 16. Scrivi in ordine crescente i numeri $\frac{5}{8}$, $-\frac{1}{2}$, e $\frac{3}{5}$.

Soluzione. Poiché un numero negativo è sempre minore di un numero positivo, il più piccolo dei numeri dati è $-1/2$. Per confrontare i due numeri positivi, scriviamoli come frazioni con lo stesso denominatore $\text{mcm}(5, 8) = 40$:

$$\frac{5}{8} = \frac{5 \cdot 5}{8 \cdot 5} = \frac{25}{40} \quad \frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 8}{5 \cdot 8} = \frac{24}{40}$$

Poiché $24 < 25$, risulta $\frac{3}{5} < \frac{5}{8}$. I numeri dati, scritti in ordine crescente, sono quindi:

$$-\frac{1}{2} \quad \frac{3}{5} \quad \frac{5}{8} \quad \square$$

Operazioni con i numeri razionali

Con i numeri razionali si possono sempre eseguire le somme, le sottrazioni, i prodotti e le divisioni (tranne che per 0). In altre parole, se si sommano, si sottraggono, si moltiplicano, si dividono due numeri razionali, il risultato è sempre un numero razionale.

Somma

Se due numeri razionali sono rappresentati da frazioni che hanno lo stesso denominatore, allora basta sommare i numeratori delle frazioni e prendere come denominatore il denominatore comune.

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{3} = \frac{2+4}{3} = \frac{6}{3}$$

Se i denominatori sono diversi, si usa la seguente formula:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

In pratica, per semplificare i calcoli conviene scegliere il minimo comune multiplo dei denominatori delle frazioni, per cui:

- si riducono le frazioni ai minimi termini
- si calcola il mcm dei denominatori
- si mette il mcm come denominatore della frazione somma
- per ogni frazione si divide il mcm per il suo denominatore e si moltiplica il risultato per il numeratore

- si fanno i calcoli
- si mette il risultato ottenuto come numeratore della frazione somma
- si riduce ai minimi termini la frazione ottenuta

Per esempio:

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{6} = \frac{(12 : 4) \cdot 3 + (12 : 6) \cdot 1}{12} = \frac{9 + 2}{12} = \frac{11}{12}$$

Sottrazione

Per sottrarre due numeri razionali rappresentati basta sommare il primo con l'opposto del secondo. Come per i numeri interi, quando si parla di *somma* di numeri razionali si intende sempre la loro *somma algebrica*.

Prodotto

Il prodotto di due numeri razionali è dato dalla formula:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

In pratica, il prodotto si esegue scomponendo in fattori le singole frazioni e semplificando "in croce": i fattori che compaiono al numeratore di una frazione si possono semplificare con quelli che compaiono al denominatore dell'altra. Per esempio:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8} \quad \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} = \frac{\overset{2}{\cancel{4}} \cdot \overset{5}{\cancel{5}}}{\cancel{5} \cdot \cancel{6}_3} = \frac{2}{3}$$

Quoziente

Per dividere due numeri razionali rappresentati dalle frazioni $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ si moltiplica la prima frazione per l'inverso della seconda:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Per esempio:

$$\frac{1}{2} : \frac{2}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4} \quad \frac{2}{5} : \frac{4}{5} = \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{4} = \frac{\cancel{2} \cdot \cancel{5}}{\cancel{5} \cdot \cancel{4}_2} = \frac{1}{2}$$

Potenza

La definizione di potenza di un numero razionale è analoga a quella data per i numeri naturali e interi:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdots \frac{a}{b}}_{n \text{ volte}} = \frac{a^n}{b^n}$$

Per esempio:

$$\bullet \left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{2}{3} \quad \bullet \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} \quad \bullet \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27} \quad \bullet \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$$

La definizione di potenza si può estendere al caso in cui l'esponente è un intero negativo:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

Per esempio:

$$\begin{aligned} \bullet \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} &= \left(\frac{3}{2}\right)^1 = \frac{3}{2} & \bullet \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} &= \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8} \\ \bullet \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} &= \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} & \bullet \left(\frac{2}{3}\right)^{-4} &= \left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{81}{16} \end{aligned}$$

Espressioni con i numeri razionali

Le regole per calcolare il valore di espressioni contenenti numeri razionali sono le stesse viste per i numeri naturali e interi. Come sempre, si devono rispettare le priorità delle operazioni, tenendo conto delle parentesi.

Esercizio 17. Calcola il valore dell'espressione $\frac{3}{4} + 3 \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2$.

Soluzione. Dobbiamo prima calcolare la somma indicata nella coppia di parentesi, poi la potenza, quindi eseguire la moltiplicazione e infine la somma:

$$\frac{3}{4} + 3 \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} + 3 \cdot \left(\frac{2+1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} + 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} + 3 \cdot \frac{9}{4} = \frac{3}{4} + \frac{27}{4} = \frac{30}{4} = \frac{15}{2} \quad \square$$

Numeri razionali e numeri decimali

Dai numeri razionali ai numeri decimali

I numeri razionali, rappresentati finora da frazioni, si possono scrivere anche come numeri decimali. Basta fare, eventualmente con la calcolatrice, la divisione tra numeratore e denominatore: il risultato ottenuto è la rappresentazione della frazione sotto forma decimale. I numeri decimali che si ottengono in questo modo sono di due tipi:

- i numeri decimali *finiti* (come 1,25, risultato della divisione tra 5 e 4), che hanno un numero di cifre finito dopo la virgola;
- i numeri decimali *periodici* (come 2,8333333... , risultato della divisione tra 17 e 6), che dopo la virgola hanno una o più cifre che si ripetono all'infinito.

In generale, un numero decimale periodico presenta tre elementi:

- la *parte intera*, costituita dalle cifre poste prima della virgola
- il *periodo*, formato da una o più cifre che si ripetono all'infinito dopo la virgola
- l'*antiperiodo*, costituito dalle eventuali cifre poste tra la virgola e il periodo

Per esempio, nel numero 2,8333333... la parte intera è 2, il periodo è 3 e l'antiperiodo è 8.

Poiché un numero periodico ha infinite cifre dopo la virgola e non può quindi essere scritto con tutte le sue cifre, si usa un modo compatto per indicarlo, mettendo una barra sopra le cifre del periodo. Il numero 2,8333333... , per esempio, si scrive $2,8\overline{3}$.

Dai numeri decimali ai numeri razionali

Un numero decimale, finito o periodico, si può sempre scrivere sotto forma di frazione, che si dice *frazione generatrice* del numero.

SE IL NUMERO DECIMALE È FINITO

- il numeratore della frazione è il numero scritto senza la virgola
- il denominatore della frazione si ottiene scrivendo 1 seguito da tanti zeri quante sono le cifre dopo la virgola

Per esempio:

$$0,2 = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} \quad 1,25 = \frac{125}{100} = \frac{5}{4}$$

SE IL NUMERO DECIMALE È PERIODICO

- il numeratore della frazione si ottiene sottraendo dal numero scritto senza la virgola il numero costituito dalle cifre che precedono il periodo
- il denominatore della frazione si ottiene scrivendo tanti 9 quante sono le cifre del periodo e tanti 0 quante sono le eventuali cifre dell'antiperiodo

Per esempio:

$$0,\bar{3} = \frac{3-0}{9} = \frac{1}{3} \quad 2,8\bar{3} = \frac{283-28}{90} = \frac{255}{90} = \frac{17}{6}$$

3.2 PERCENTUALI E PROPORZIONI**Percentuali**

Avrai sentito dire talvolta che il prezzo di un oggetto è stato scontato del 10 per cento, oppure che un partito politico ha preso il 25 per cento di voti e altre espressioni simili che coinvolgono le percentuali. Le percentuali sono un altro modo per scrivere le frazioni.

Definizione 18. Le *percentuali* sono frazioni che hanno come denominatore 100 e come numeratore un numero intero o decimale.

La percentuale si indica con un numero intero o decimale seguito dal simbolo %:

$$4\% = \frac{4}{100} = \frac{1}{25} \quad 10\% = \frac{10}{100} = \frac{1}{10} \quad 25\% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$

Per passare da una frazione alla percentuale conviene prima scrivere la frazione come numero decimale e poi da questo passare alla percentuale, moltiplicando numeratore e denominatore per 100:

$$\frac{1}{4} = 0,25 = \frac{0,25}{1} = \frac{25}{100} = 25\%$$

Per calcolare la percentuale di una grandezza è sufficiente moltiplicare il valore della grandezza per la percentuale espressa in frazione.

Esercizio 18. In una scuola che ha 800 alunni, ne sono stati promossi il 90%. Quanti sono stati i promossi?

Soluzione. Bisogna moltiplicare il numero totale di alunni per la frazione 90/100:

$$\frac{90}{100} \cdot 800 = 720 \quad \square$$

Esercizio 19. Una paio di jeans che costava 70 € viene venduto con il 20% di sconto. A quanto vengono venduti i jeans?

Soluzione. Calcoliamo lo sconto:

$$20\% \cdot 70 \text{ €} = \frac{20}{100} \cdot 70 \text{ €} = 14 \text{ €}$$

Il prezzo scontato è quindi

$$70 \text{ €} - 14 \text{ €} = 56 \text{ €}$$

□

Proporzioni

Definizione 19. Una *proporzione* è un'uguaglianza tra due rapporti, del tipo

$$a : b = c : d$$

con b e d diversi da zero, che si legge « a sta a b come c sta a d ». I numeri a e d si dicono *estremi*, mentre b e c si dicono *medi*.

Per esempio:

$$4 : 2 = 12 : 6$$

formano una proporzione perché i due quozienti valgono entrambi 2.

Proposizione 3 (Proprietà fondamentale delle proporzioni). In ogni proporzione il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi.

$$a : b = c : d \quad \Longrightarrow \quad a \cdot d = b \cdot c$$

Per esempio, nella proporzione

$$4 : 2 = 12 : 6$$

il prodotto dei medi è $2 \cdot 12 = 24$ e il prodotto degli estremi è $4 \cdot 6 = 24$.

Il medio incognito di una proporzione si calcola moltiplicando gli estremi e dividendo per il medio noto:

$$a : b = x : d \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{a \cdot d}{b}$$

L'estremo incognito di una proporzione si calcola moltiplicando i medi e dividendo per l'estremo noto:

$$a : b = c : x \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{b \cdot c}{a}$$

Esercizio 20. Calcola il medio incognito della proporzione $3 : 6 = x : 4$.

Soluzione.

$$3 : 6 = x : 4 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3 \cdot 4}{6} = 2 \quad \square$$

Esercizio 21. Calcola l'estremo incognito della proporzione $5 : 10 = 3 : x$.

Soluzione.

$$5 : 10 = 3 : x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{10 \cdot 3}{5} = 6 \quad \square$$

NUMERI REALI

Il quadrato di un numero a è il numero, sempre maggiore o uguale a zero, che si ottiene moltiplicando a per se stesso. L'operazione inversa dell'elevamento al quadrato si chiama *radice quadrata*.

Definizione 20. La *radice quadrata* di un numero $a \geq 0$, detto *radicando*, è quel numero $b \geq 0$ che elevato al quadrato dà a . In simboli: $b = \sqrt{a} \iff b^2 = a$.

Non esiste la radice quadrata di un numero negativo, perché non c'è nessun numero che elevato al quadrato dia come risultato un numero negativo. Per esempio:

- $\sqrt{9} = 3$, perché $3^2 = 9$
- $\sqrt{25} = 5$, perché $5^2 = 25$
- $\sqrt{-16}$ non esiste, perché il radicando è negativo

Poniamoci questo problema: quanto vale $\sqrt{2}$? Dalla definizione di radice quadrata sappiamo che $\sqrt{2}^2 = 2$. Poiché $1^2 = 1$ e $2^2 = 4$, ne segue che $1 < \sqrt{2} < 2$. Il valore cercato non è quindi un numero intero. Può essere un numero decimale finito? Costruiamo una tabella che contenga nella prima riga i numeri con una sola cifra decimale compresi tra 1 e 2 e nella seconda riga i rispettivi quadrati:

x	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
x^2	1,21	1,44	1,69	1,96	2,25	2,56	2,89	3,24	3,61

Il numero 2 è compreso tra $1,4^2$ e $1,5^2$, di conseguenza $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$. Anche se abbiamo ristretto l'intervallo in cui si trova, non possiamo ancora precisare il valore di $\sqrt{2}$. Diciamo che 1,4 è un *valore approssimato per difetto* di $\sqrt{2}$, mentre 1,5

è un *valore approssimato per eccesso* di $\sqrt{2}$. Scrivendo $\sqrt{2} = 1,4$ oppure $\sqrt{2} = 1,5$ commettiamo un errore minore di $1/10$.

Per migliorare l'approssimazione e tentare di ottenere $\sqrt{2}$ come numero decimale finito costruiamo una tabella di numeri decimali con due cifre compresi tra 1,4 e 1,5:

x	1,41	1,42	1,43	1,44
x^2	1,9881	2,0164	2,0049	2,0736

Ora possiamo dire che 1,41 è un valore approssimato per difetto di $\sqrt{2}$ mentre 1,42 è un valore approssimato per eccesso, con un errore dell'ordine di $1/100$. Abbiamo quindi migliorato l'approssimazione e di conseguenza abbiamo ristretto l'intervallo in cui si trova $\sqrt{2}$, ma ancora non abbiamo trovato un numero decimale finito che sia uguale a $\sqrt{2}$.

Per migliorare ancora l'approssimazione e tentare di ottenere $\sqrt{2}$ come numero decimale finito costruiamo una tabella di numeri decimali con tre cifre compresi tra 1,41 e 1,42:

x	1,411	1,412	1,413	1,414	1,415	1,416
x^2	1,990	1,993	1,996	1,999	2,002	2,005

Ora possiamo dire che 1,414 è un valore approssimato per difetto di $\sqrt{2}$ mentre 1,415 è un valore approssimato per eccesso, con un errore dell'ordine di $1/1000$, ma non abbiamo trovato un numero decimale finito che sia uguale a $\sqrt{2}$.

Continuando con lo stesso procedimento si possono costruire due sequenze di numeri decimali che approssimano una per difetto e una per eccesso il numero cercato, restringendo ogni volta l'ampiezza dell'intervallo in cui si trova $\sqrt{2}$. Il procedimento continua all'infinito e le cifre decimali che troviamo non si ripetono periodicamente. Il numero $\sqrt{2}$ è dunque un *numero decimale a infinite cifre non periodico*. Riportiamo le prime cifre decimali del numero:

$$\sqrt{2} = 1,414\ 213\ 562\ 373\ 095\ 048\ 801\ 688\ 724\ 209\ \dots$$

Poiché $\sqrt{2}$ è un numero decimale a infinite cifre non periodico, esso non si può scrivere come frazione. In altre parole, $\sqrt{2}$ non è un numero razionale.

Oltre a $\sqrt{2}$ ci sono infiniti numeri che non si possono scrivere come frazioni. Per esempio, tutte le radici quadrate di numeri naturali che non sono quadrati perfetti. Per esempio:

$$\sqrt{3} = 1,732\ 050\ 807\ 568\ 877\ 293\ 527\ 446\ 341\ 506\ \dots$$

Un altro famoso numero non razionale che si incontra in geometria è il numero π , che corrisponde alla misura della circonferenza di diametro 1:

$$\pi = 3,141\ 592\ 653\ 589\ 793\ 238\ 462\ 643\ 383\ 280\ \dots$$

Questi numeri sono detti *numeri irrazionali*. L'insieme dei numeri irrazionali si indica con \mathbb{J} .

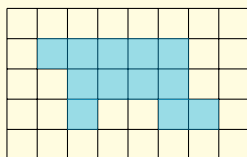
Definizione 21. L'unione dell'insieme \mathbb{Q} dei numeri razionali e dell'insieme \mathbb{J} dei numeri irrazionali costituisce l'insieme \mathbb{R} dei numeri reali.

C'è una corrispondenza biunivoca tra l'insieme dei punti della retta geometrica e l'insieme \mathbb{R} dei numeri reali. Da ciò segue la possibilità di definire sulla retta un sistema di coordinate: a ogni punto corrisponde un numero reale (la sua ascissa) e viceversa a ogni numero reale è associato uno e un solo punto sulla retta. Una possibilità analoga si ha nel piano, dove il sistema di assi cartesiani permette di realizzare una corrispondenza biunivoca tra coppie di numeri reali (ascissa e ordinata del punto) e un punto del piano geometrico.

3.3 ESERCIZI

Chi non risolve esercizi non impara la matematica.

1 Da un cartoncino rettangolare viene ritagliata la forma colorata mostrata nella figura seguente.



Quale delle seguenti espressioni ti sembra più corretta per esprimere la relazione tra il cartoncino e la parte ritagliata?

- a. La parte ritagliata è più piccola del cartoncino.
- b. La parte ritagliata è un poligono con un numero maggiore di lati rispetto al cartoncino dato.
- c. La parte ritagliata rappresenta i $12/40$ del cartoncino.

Sbaglio se affermo che la parte ritagliata è i $3/10$ del cartoncino?

2 Indica almeno tre frazioni equivalenti a ciascuna delle seguenti.

- a. $\frac{5}{6}$ b. $\frac{3}{5}$ c. $\frac{12}{60}$ d. $\frac{2}{3}$ e. $\frac{1}{2}$ f. $\frac{5}{2}$

3 Semplifica le seguenti frazioni.

- a. $\frac{4}{6}$ $\left[\frac{2}{3}\right]$ d. $\frac{18}{16}$ $\left[\frac{9}{8}\right]$ g. $\frac{80}{100}$ $\left[\frac{4}{5}\right]$ j. $\frac{10}{15}$ $\left[\frac{2}{3}\right]$
 b. $\frac{2}{8}$ $\left[\frac{1}{4}\right]$ e. $\frac{3}{12}$ $\left[\frac{1}{4}\right]$ h. $\frac{8}{12}$ $\left[\frac{2}{3}\right]$ k. $\frac{14}{49}$ $\left[\frac{2}{7}\right]$
 c. $\frac{2}{10}$ $\left[\frac{1}{5}\right]$ f. $\frac{6}{20}$ $\left[\frac{3}{10}\right]$ i. $\frac{9}{6}$ $\left[\frac{3}{2}\right]$ l. $\frac{15}{21}$ $\left[\frac{5}{7}\right]$

4 Semplifica le seguenti frazioni.

- a. $\frac{16}{6}$ $\left[\frac{8}{3}\right]$ c. $\frac{20}{12}$ $\left[\frac{5}{3}\right]$ e. $\frac{24}{30}$ $\left[\frac{4}{5}\right]$ g. $\frac{27}{21}$ $\left[\frac{9}{7}\right]$
 b. $\frac{18}{15}$ $\left[\frac{6}{5}\right]$ d. $\frac{21}{9}$ $\left[\frac{7}{3}\right]$ f. $\frac{25}{15}$ $\left[\frac{5}{3}\right]$ h. $\frac{14}{28}$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

$$\text{i. } \frac{30}{16} \quad \left[\frac{15}{8}\right] \quad \text{j. } \frac{32}{24} \quad \left[\frac{4}{3}\right] \quad \text{k. } \frac{35}{10} \quad \left[\frac{7}{2}\right] \quad \text{l. } \frac{36}{81} \quad \left[\frac{4}{9}\right]$$

5 Semplifica le seguenti frazioni.

$$\begin{array}{llll} \text{a. } \frac{40}{6} & \left[\frac{20}{3}\right] & \text{d. } \frac{48}{60} & \left[\frac{4}{5}\right] & \text{g. } \frac{99}{18} & \left[\frac{11}{2}\right] & \text{j. } \frac{99}{27} & \left[\frac{11}{3}\right] \\ \text{b. } \frac{21}{42} & \left[\frac{1}{2}\right] & \text{e. } \frac{12}{30} & \left[\frac{2}{5}\right] & \text{h. } \frac{87}{99} & \left[\frac{29}{33}\right] & \text{k. } \frac{80}{25} & \left[\frac{16}{5}\right] \\ \text{c. } \frac{45}{27} & \left[\frac{5}{3}\right] & \text{f. } \frac{49}{77} & \left[\frac{7}{11}\right] & \text{i. } \frac{4}{96} & \left[\frac{1}{24}\right] & \text{l. } \frac{40}{84} & \left[\frac{10}{21}\right] \end{array}$$

6 Raggruppa le seguenti frazioni in insiemi di frazioni equivalenti. Etichetta ogni insieme con un numero razionale, prendendo per ogni gruppo la frazione ridotta ai minimi termini.

$$\frac{1}{3} \quad \frac{2}{4} \quad -\frac{5}{2} \quad \frac{3}{6} \quad -\frac{3}{-9} \quad \frac{10}{-4} \quad \frac{10}{20} \quad \frac{5}{15} \quad -\frac{15}{6} \quad \frac{4}{12}$$

7 Trasforma le seguenti frazioni in numeri decimali.

$$\begin{array}{llll} \text{a. } \frac{13}{2} & [6,5] & \text{e. } \frac{1}{5} & [0,2] & \text{i. } \frac{1}{4} & [0,25] & \text{m. } \frac{13}{10} & [1,3] \\ \text{b. } \frac{11}{3} & [3,\bar{6}] & \text{f. } \frac{12}{9} & [1,\bar{3}] & \text{j. } \frac{1}{3} & [0,\bar{3}] & \text{n. } \frac{35}{10} & [3,5] \\ \text{c. } \frac{3}{5} & [0,6] & \text{g. } \frac{27}{10} & [2,7] & \text{k. } \frac{1}{2} & [0,5] & \text{o. } \frac{12}{5} & [2,4] \\ \text{d. } \frac{15}{6} & [2,5] & \text{h. } \frac{2}{3} & [0,\bar{6}] & \text{l. } \frac{12}{10} & [1,2] & \text{p. } \frac{3}{10} & [0,3] \end{array}$$

8 Trasforma i seguenti numeri decimali in frazioni.

$$\begin{array}{llll} \text{a. } 12,5 & [25/2] & \text{e. } 0,1 & [1/10] & \text{i. } 0,25 & [1/4] & \text{m. } 0,13 & [13/100] \\ \text{b. } 4,2 & [21/5] & \text{f. } 2,5 & [5/2] & \text{j. } 0,08 & [2/25] & \text{n. } 0,125 & [1/8] \\ \text{c. } 6,25 & [25/4] & \text{g. } 0,12 & [3/25] & \text{k. } 1,7 & [17/10] & \text{o. } 1,2 & [6/5] \\ \text{d. } 3,75 & [15/4] & \text{h. } 0,002 & [1/500] & \text{l. } 1,46 & [73/50] & \text{p. } 0,5 & [1/2] \end{array}$$

9 Trasforma i seguenti numeri decimali in frazioni.

$$\begin{array}{llll} \text{a. } 1,25 & [5/4] & \text{e. } 1,2\bar{3} & [37/30] & \text{i. } 0,2 & [1/5] & \text{m. } 0,6 & [3/5] \\ \text{b. } 0,03 & [3/100] & \text{f. } 0,38 & [19/50] & \text{j. } 0,01 & [1/100] & \text{n. } 0,2\bar{1} & [7/33] \\ \text{c. } 2,\bar{1} & [19/9] & \text{g. } 1,2\bar{3} & [122/99] & \text{k. } 0,\bar{3} & [1/3] & \text{o. } 2,3\bar{4} & [211/90] \\ \text{d. } 0,\bar{13} & [13/99] & \text{h. } 0,04 & [1/25] & \text{l. } 23,\bar{3} & [70/3] & \text{p. } 1,\bar{3} & [4/3] \end{array}$$

10 Indica la risposta corretta.

a. Quale dei seguenti numeri razionali è il maggiore?

A $\frac{3}{4}$

B $\frac{2}{3}$

C $\frac{5}{8}$

D $\frac{3}{5}$

b. Quale dei seguenti numeri razionali è il minore?

A $-\frac{2}{3}$

B $-\frac{3}{4}$

C $-\frac{5}{8}$

D $-\frac{1}{2}$

c. Qual è la minore delle seguenti frazioni?

A $\frac{2}{3}$

B $\frac{2}{7}$

C $\frac{3}{2}$

D $\frac{1}{2}$

d. Quale dei seguenti numeri è più vicino a 1?

A 0,10

B 0,01

C 0,99

D 0,90

e. Quale dei seguenti numeri è più vicino alla frazione $\frac{1}{10}$?

A 0,19

B 0,9

C 1,01

D 0,02

[Una risposta A, due B, una C e una D]

11 Scrivi in ordine crescente (dal più piccolo al più grande).

$$-\frac{2}{3} \quad \frac{3}{4} \quad -\frac{5}{6} \quad \frac{1}{2} \quad -1 \quad -\frac{2}{5} \quad 0$$

12 Scrivi in ordine decrescente (dal più grande al più piccolo).

$$-\frac{3}{2} \quad \frac{4}{3} \quad -\frac{6}{5} \quad \frac{2}{5} \quad -1 \quad \frac{5}{2} \quad 0$$

13 Scrivi una frazione compresa tra:

a. $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{2}$

b. $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{3}$

c. $\frac{3}{5}$ e $\frac{7}{10}$

d. $\frac{5}{3}$ e $\frac{1}{7}$

14 Vero o falso?

a. $-\frac{7}{6} < -\frac{6}{7}$ V F

d. $-\frac{7}{6} > -\frac{6}{7}$ V F

g. $+\frac{7}{6} > -\frac{6}{7}$ V F

b. $-\frac{7}{6} > +\frac{6}{7}$ V F

e. $+\frac{7}{6} < -\frac{6}{7}$ V F

h. $+\frac{7}{6} > +\frac{6}{7}$ V F

c. $-\frac{7}{6} < +\frac{6}{7}$ V F

f. $+\frac{7}{6} < +\frac{6}{7}$ V F

[4 affermazioni vere e 4 false]

15 Scrivi due numeri compresi tra:

a. 1,2 e 2,1

c. 2,3 e 3,4

e. $2,\bar{3}$ e $2,\bar{4}$

g. $3,\bar{4}$ e $3,\bar{6}$

b. 1,2 e 1,3

d. 3,4 e 3,6

f. $1,1\bar{3}$ e $1,2\bar{3}$

h. $1,3\bar{5}$ e $1,3\bar{6}$

16 Rappresenta sulla retta le seguenti frazioni e poi riscrivile in ordine crescente:

$$\frac{3}{4} \quad \frac{3}{8} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{5}{4} \quad \frac{2}{5} \quad \frac{6}{3} \quad \frac{5}{6} \quad \frac{12}{4} \quad \frac{19}{8} \quad \frac{16}{5}$$

17 Calcola le seguenti somme algebriche tra frazioni.

a. $\frac{1}{2} + \frac{3}{2}$ [2]

d. $\frac{8}{18} + \frac{5}{9}$ [1]

g. $\frac{5}{8} + \frac{5}{6}$ $\left[\frac{35}{24}\right]$

j. $\frac{7}{3} - \frac{6}{4}$ $\left[\frac{5}{6}\right]$

b. $\frac{7}{11} + \frac{4}{11}$ [1]

e. $\frac{4}{3} - \frac{6}{5}$ $\left[\frac{2}{15}\right]$

h. $1 - \frac{3}{2}$ $\left[-\frac{1}{2}\right]$

k. $3 - \frac{2}{3}$ $\left[\frac{7}{3}\right]$

c. $\frac{3}{2} - \frac{5}{2}$ [-1]

f. $\frac{2}{5} + \frac{5}{8}$ $\left[\frac{41}{40}\right]$

i. $\frac{11}{5} + 5$ $\left[\frac{36}{5}\right]$

l. $\frac{1}{5} - 1$ $\left[-\frac{4}{5}\right]$

Calcola le seguenti somme tra frazioni.

18 $\left(2 + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{8} + \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{4}\right)$ $\left[\frac{33}{8}\right]$

19 $\frac{5}{2} + \left[\left(5 - \frac{8}{3}\right) - \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\right)\right]$ $\left[\frac{13}{3}\right]$

20 $\left(\frac{5}{3} - 1\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) + \frac{5}{10}$ [1]

21 $\frac{13}{3} - \left[\left(\frac{3}{4} + \frac{4}{5}\right) + \left(\frac{2}{3} + \frac{5}{6}\right)\right] - \frac{3}{6} - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right) + \frac{4}{5}$ [1]

22 $\left(\frac{9}{10} + \frac{8}{5}\right) - \left\{\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{2} + \frac{1}{18}\right) + \left[\frac{18}{21} - \left(\frac{10}{7} - \frac{17}{14}\right) - \frac{13}{42}\right]\right\}$ $\left[\frac{3}{2}\right]$

23 $\frac{3}{2} - \left\{\frac{11}{8} - \left[\left(\frac{7}{6} - \frac{3}{4}\right) + \frac{1}{12}\right]\right\} + \left[\left(\frac{4}{9} + \frac{13}{4}\right) - \left(\frac{7}{4} + \frac{1}{2}\right)\right] - \frac{5}{72}$ [2]

24 $\left(+\frac{1}{5}\right) + \left(-\frac{2}{3}\right) + \left(+\frac{7}{3}\right) + \left(-\frac{9}{15}\right) + \left(+\frac{4}{10}\right)$ $\left[\frac{5}{3}\right]$

25 $\left(-\frac{3}{4}\right) + \left(+\frac{7}{6}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(+\frac{3}{12}\right) + 4$ $\left[\frac{25}{6}\right]$

26 $5 - \frac{2}{3} - \left[\frac{3}{4} - \left(\frac{5}{4} - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{8}\right] - 3$ $\left[\frac{11}{8}\right]$

27 $7 - \frac{1}{5} + \left[2 - \left(\frac{1}{10} + \frac{3}{5}\right) - \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right)\right] - \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right)$ [9]

28 $-1 + \left(-\frac{11}{5} + \frac{1}{4}\right) + \frac{2}{3} + \left(-\frac{3}{14} - \frac{4}{7}\right) + \left(+\frac{7}{3}\right) + \left(+\frac{3}{10}\right)$ $\left[-\frac{61}{140}\right]$

29 $2 + \frac{5}{2} + \left\{-2,5 - \frac{5}{2} - \left[-\frac{1}{2} + \left(-1 + \frac{1}{4}\right) - 3 - \frac{5}{12}\right] + 0,25\right\} - \frac{5}{12}$ [4]

30 Calcola i seguenti prodotti tra frazioni.

$$\begin{array}{llll} \text{a. } \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{9} & \left[\frac{1}{3} \right] & \text{d. } \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} & \left[\frac{1}{2} \right] & \text{g. } \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{2} & \left[\frac{1}{3} \right] & \text{j. } -\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} & \left[-\frac{2}{3} \right] \\ \text{b. } \frac{4}{3} \cdot \frac{9}{20} & \left[\frac{3}{5} \right] & \text{e. } \frac{10}{9} \cdot \frac{6}{5} & \left[\frac{4}{3} \right] & \text{h. } \frac{24}{25} \cdot \frac{5}{8} & \left[\frac{3}{5} \right] & \text{k. } \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} & \left[-\frac{3}{8} \right] \\ \text{c. } \frac{4}{49} \cdot \frac{7}{12} & \left[\frac{1}{21} \right] & \text{f. } \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{6} & \left[\frac{1}{2} \right] & \text{i. } -\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{9} & \left[-\frac{1}{3} \right] & \text{l. } -\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} & \left[\frac{2}{3} \right] \end{array}$$

Calcola le seguenti espressioni.

$$\begin{array}{ll} \text{31. } \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + 1 & [1] \\ \text{32. } \left[\frac{3}{4} \cdot \left(1 + \frac{3}{5} \right) - \left(1 + \frac{1}{5} \right) \cdot \left(\frac{1}{6} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} \right) \right] \cdot \frac{5}{2} & [3] \\ \text{33. } \left\{ \left[3 + \left(\frac{1}{2} + 1 \right) \cdot \left(\frac{1}{3} + 1 \right) - \frac{10}{4} \right] \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{4} \cdot \frac{9}{15} \cdot \frac{10}{3} \right\} \cdot \frac{2}{3} & \left[\frac{4}{3} \right] \\ \text{34. } \left[\frac{4}{9} : \frac{1}{9} - \frac{1}{8} : \left(\frac{5}{8} - \frac{3}{4} : 2 \right) \right] \cdot \frac{5}{14} + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{2} : \frac{9}{25} \right) + \frac{1}{2} & \left[\frac{23}{8} \right] \\ \text{35. } \left\{ 4 + \frac{1}{7} \cdot \left[\frac{9}{2} - \left(1 + \frac{2}{3} \right) \right] \right\} \cdot \left[1 - \frac{7}{8} - \left(\frac{9}{8} - 1 \right) \right] \cdot \left(1 - \frac{1}{7} \right) & [0] \\ \text{36. } \left(\frac{7}{8} - \frac{1}{2} \right) \cdot \left\{ 3 + \frac{4}{5} \cdot \left[\frac{7}{2} - \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3} \right) \right] \right\} \cdot \left[1 - \frac{3}{4} - \left(\frac{5}{4} - 1 \right) \right] & [0] \\ \text{37. } \left(3 + \frac{1}{3} \right) : \frac{25}{9} + \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \right) : \left(2 - \frac{7}{5} \right) : \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{6} : \left(\frac{5}{3} - \frac{8}{6} \right) \right] & \left[\frac{39}{20} \right] \end{array}$$

38 Calcola i seguenti quozienti tra frazioni.

$$\begin{array}{llll} \text{a. } \frac{1}{3} : \frac{4}{3} & \left[\frac{1}{4} \right] & \text{c. } \frac{4}{25} : \frac{2}{5} & \left[\frac{2}{5} \right] & \text{e. } \frac{2}{5} : \frac{8}{5} & \left[\frac{1}{4} \right] & \text{g. } \frac{6}{5} : \frac{3}{2} & \left[\frac{4}{5} \right] \\ \text{b. } \frac{4}{5} : \frac{6}{5} & \left[\frac{2}{3} \right] & \text{d. } \frac{11}{60} : \frac{22}{45} & \left[\frac{3}{8} \right] & \text{f. } \frac{3}{2} : \frac{4}{3} & \left[\frac{9}{8} \right] & \text{h. } \frac{3}{2} : \frac{3}{2} & [1] \end{array}$$

39 Calcola il valore delle seguenti potenze.

$$\begin{array}{llll} \text{a. } \left(-\frac{2}{3} \right)^2 & \left[\frac{4}{9} \right] & \text{d. } \left(-\frac{3}{5} \right)^1 & \left[-\frac{3}{5} \right] & \text{g. } \left(-\frac{2}{3} \right)^{-2} & \left[\frac{9}{4} \right] & \text{j. } -2^{-4} & \left[-\frac{1}{16} \right] \\ \text{b. } \left(-\frac{1}{2} \right)^3 & \left[-\frac{1}{8} \right] & \text{e. } -2^4 & [-16] & \text{h. } \left(-\frac{1}{2} \right)^{-3} & [-8] & \text{k. } (-2)^{-4} & \left[\frac{1}{16} \right] \\ \text{c. } \left(-\frac{3}{2} \right)^2 & \left[\frac{9}{4} \right] & \text{f. } (-2)^4 & [16] & \text{i. } \left(\frac{3}{2} \right)^{-2} & \left[\frac{4}{9} \right] & \text{l. } \left(\frac{5}{6} \right)^{-1} & \left[\frac{6}{5} \right] \end{array}$$

Calcola il valore delle seguenti espressioni.

$$40 \quad \left(\frac{2}{3}\right)^{40} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{30} : \left(\frac{2}{3}\right)^{69} \quad \left[\frac{2}{3}\right]$$

$$41 \quad \left[\left(\frac{4}{5}\right)^{24}\right]^2 : \left(\frac{4}{5}\right)^{47} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 \quad \left[\frac{64}{125}\right]$$

$$42 \quad \left\{ \left[\left(1 + \frac{2}{3}\right)^{43} : \left(2 - \frac{1}{3}\right)^{41} \right] \cdot \left(\frac{9}{25}\right)^5 \right\} : \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 2 \quad \left[\frac{17}{4}\right]$$

$$43 \quad \left\{ \left[\left(7 - \frac{20}{3}\right)^{37} : \left(\frac{5}{3} - \frac{16}{12}\right)^{35} \right] \cdot \left(12 - \frac{81}{27}\right) \right\}^{21} : \left(\frac{8}{7} - 1\right)^0 \quad [1]$$

44 Esegui le seguenti operazioni con le frazioni, quando è possibile.

$$a. \frac{2}{3} \cdot 0 \quad [0] \quad d. \frac{1}{2} \cdot \frac{0}{2} \quad [0] \quad g. \frac{2}{3} - 0 \quad \left[\frac{2}{3}\right] \quad j. \frac{1}{4} : 4 \quad \left[\frac{1}{16}\right]$$

$$b. \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \quad [0] \quad e. \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \quad \left[\frac{1}{4}\right] \quad h. 1 : \frac{2}{3} \quad \left[\frac{3}{2}\right] \quad k. 0,3 : 3 \quad \left[\frac{1}{10}\right]$$

$$c. \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{0} \quad [\text{imp.}] \quad f. \frac{2}{3} : 0 \quad [\text{imp.}] \quad i. \frac{1}{4} \cdot 4 \quad [1] \quad l. \frac{1}{5} : \frac{1}{5} \quad [1]$$

45 Completa le seguenti uguaglianze.

$$a. \frac{3}{5} = \frac{\dots}{10} \quad b. \frac{75}{10} = \frac{\dots}{100} \quad c. \frac{7}{\dots} = \frac{1}{2} \quad d. 3 = \frac{24}{\dots}$$

46 Completa:

$$a. \frac{3}{4} + \dots = 1 \quad b. 1 - \dots = \frac{4}{13} \quad c. \frac{11}{12} \cdot \dots = \frac{8}{55} \quad d. \dots : \frac{5}{3} = \frac{3}{5}$$

47 Correggi le seguenti operazioni.

$$a. \frac{3}{4} + \frac{2}{7} = \frac{3 \cdot 7 + 4 \cdot 2}{4 + 7} \quad b. \frac{8}{25} - \frac{3}{10} = \frac{8 - 3}{50} \quad c. 3 \cdot \frac{11}{13} = \frac{33}{39}$$

48 Riscrivi in simboli e motiva la verità o falsità di ciascuna proposizione:

- il triplo di un terzo è l'unità
- la somma di un quinto con il doppio di un mezzo è sei quinti
- un ottavo è maggiore di un quinto

Calcola il valore delle seguenti espressioni.

$$49 \quad \left(-1 + \frac{1}{2}\right) : \left(\frac{3}{2} + \frac{5}{4}\right) \quad \left[-\frac{2}{11}\right] \quad 51 \quad \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{2}\right) : \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{4}\right) \quad \left[\frac{5}{6}\right]$$

$$50 \quad \left(-\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right) \quad \left[\frac{1}{24}\right] \quad 52 \quad \frac{5}{6} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{12}{5} - \frac{3}{4} : \left(0,75 - \frac{5}{6}\right) \quad \left[\frac{31}{3}\right]$$

Calcola il valore delle seguenti espressioni.

- 53 $\left(\frac{2}{3} - \frac{7}{6}\right) - \left(1 + \frac{5}{6}\right) : \left(2 - \frac{1}{3}\right)$ $\left[-\frac{8}{5}\right]$
- 54 $\left(\frac{5}{3} - \frac{7}{2}\right) \cdot \frac{4}{5} + \left[\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{15}\right) \cdot \frac{5}{2}\right]^2$ $\left[-\frac{46}{45}\right]$
- 55 $(-5)\left(\frac{8}{5} - \frac{8}{3}\right)\left(\frac{5}{6} - \frac{2}{3}\right) + (3)\left(\frac{5}{12} + \frac{7}{4}\right)$ $\left[\frac{133}{18}\right]$
- 56 $\left[\left(\frac{1}{2} - 5\right)\left(\frac{2}{3} + \frac{3}{4}\right) + \frac{1}{3} - 3\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\right)\right]\left(1 - 2\right) - \frac{5}{4}$ $\left[\frac{205}{24}\right]$
- 57 $\left\{\left(\frac{7}{8} - \frac{5}{4}\right) - \left[\left(\frac{3}{2} - \frac{3}{4}\right)\left(\frac{7}{5}\right) + \frac{1}{6} - \frac{9}{8}\right]\right\}\left(-\frac{12}{11}\right)\left(\frac{4}{7} - 2\right)$ $\left[-\frac{8}{11}\right]$
- 58 $\frac{3}{2}\left\{-\frac{3}{5}\left[2 - \frac{1}{2}\left(2 - \frac{4}{3}\right)\right] + \frac{2}{3}\left[2 - \frac{1}{2}\left(4 - \frac{5}{2}\right)\right]\right\}$ $\left[-\frac{1}{4}\right]$
- 59 $2\left(2 - \frac{1}{6}\right) + \left[\left(\frac{1}{6} - 1\right) - 3\left(1 - \frac{1}{6}\right)\right]\left(\frac{1}{3} + \frac{5}{3} - \frac{1}{2} - 1\right)$ [2]
- 60 $-\left(-3 - \frac{3}{2}\right)\frac{8}{9} - \left[5 - \left(\frac{1}{5} - 1\right)\right] + 2\left[8 - \left(5 - \frac{3}{4} - \frac{4}{3}\right)\right]$ $\left[\frac{251}{30}\right]$
- 61 $\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2} + \frac{9}{20}\right)\left(\frac{3}{7} + \frac{2}{3} + \frac{5}{21}\right) + \left(\frac{6}{5} - \frac{12}{15}\right) - \frac{4}{9}\left[4 - \frac{1}{4}\left(3 - \frac{1}{2}\right)\right]$ $\left[-\frac{1}{6}\right]$
- 62 $\left\{\left[6 - \left(3 - \frac{1}{3}\right)\right] : \left(\frac{5}{3} + \frac{5}{2}\right) - 1\right\} : \left(2 - \frac{3}{4}\right)$ $\left[-\frac{4}{25}\right]$
- 63 $\left(2 - \frac{1}{3}\right)^2 - 6 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)^2 - 27\left(-\frac{4}{9}\right)^2 \cdot \left(\frac{7}{4} - \frac{9}{5} - \frac{4}{3}\right)^0$ $\left[-\frac{49}{18}\right]$
- 64 $\left[-(-2)^3 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)^{22} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^3 + \left(-\frac{3}{2} + \frac{1}{4}\right)^2\right] \cdot \left(-\frac{4}{15}\right)^2$ $\left[\frac{31}{45}\right]$
- 65 $\left\{\left[\left(-\frac{13}{5} + \frac{7}{3}\right)^2 - 4^2 \cdot (-0,1)^2\right] - \left(\frac{4}{15}\right)^2\right\} - \left(1 - \frac{6}{5}\right)^2$ $\left[-\frac{1}{5}\right]$
- 66 $\left[-7^3 + 5^4 - 4^4 - \left(\frac{3}{48} + \frac{9}{16} - \frac{5}{8}\right)^5 - 13 \cdot 2\right]^0 \cdot \left(9 - \frac{11}{2} - \frac{7}{5} \cdot \frac{5}{2}\right)^4$ [impossibile]
- 67 $\frac{1}{3} - \left(\frac{2}{3} - \frac{5}{6}\right) + \frac{3}{2} - \left[\frac{3}{4} - \left(\frac{7}{30} - \frac{4}{5}\right) + \frac{5}{6}\right]$ $\left[-\frac{3}{20}\right]$
- 68 $\frac{63}{55} \cdot \frac{44}{45} + \frac{14}{75} \cdot \frac{15}{35} + \frac{2}{25} \cdot 10 - \frac{16}{25} : \frac{3}{5} + \frac{1}{15}$ [1]
- 69 $\left\{\left[\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right) : \left(\frac{5}{6} - \frac{5}{12}\right) \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right] : \frac{1}{4}\right\} - \frac{2}{3} \cdot (-0,6)$ $\left[\frac{13}{5}\right]$
- 70 $\frac{4}{5} - \frac{27}{7} \cdot \frac{1}{12} + \frac{8}{21} : \frac{8}{6} + \frac{13}{2} \cdot \frac{1}{7} - \frac{9}{14} + \frac{1}{7} - \frac{12}{25} : \frac{3}{5}$ $\left[\frac{11}{28}\right]$
- 71 $\left[\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7}\right) \cdot \frac{7}{2} - \left(\frac{10}{18} - \frac{7}{15}\right) : \frac{2}{9}\right] : \frac{14}{15} \cdot \frac{1}{4} + 1$ $\left[\frac{15}{14}\right]$
- 72 $\left[\frac{1}{6} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{3}\right]^2 : \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{5}{12}\right)^2\right]$ $\left[\frac{1}{50}\right]$
- 73 $\left(\frac{3}{5} - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{7}{5} + \frac{3}{4}\right) - \left(\frac{2}{3} - \frac{5}{4} \cdot \frac{3}{7}\right) : \frac{2}{14} - \frac{1}{400}$ $\left[-\frac{1}{6}\right]$

- 74 $\left(\frac{3}{5}-1\right)-\left(\frac{1}{8}+\frac{7}{5}-\frac{17}{20}\right)+\left(\frac{7}{6}-\frac{2}{5}\right): \frac{4}{15}-\left(\frac{3}{2}-\frac{5}{2}:\frac{1}{5}\right): \frac{22}{17}-\frac{3}{10}$ [10]
- 75 $\frac{19}{3} \cdot \left(\frac{3}{5}+\frac{3}{2}-2\right): \left(\frac{3}{10}-1,25\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}-1\right)+\frac{3}{10} \cdot \left(-\frac{5}{3}\right)^2$ $\left[\frac{13}{15}\right]$
- 76 $\left[\left(1+\frac{1}{2}\right): 3-\left(2+\frac{3}{2}\right)+1\right]+\left(3-\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{2}\right)-1\left(-2+\frac{3}{2}\right)^2$ $\left[\frac{11}{6}\right]$
- 77 $2-\left[3+1-\left(2-\frac{1}{2}\right)\right]-\left(-2-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}+\frac{1}{6}\right): \left(-\frac{1}{2}\right)$ $\left[-\frac{1}{12}\right]$
- 78 $\left(\frac{8}{3}-\frac{1}{6}\right)^{-1}-\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{8}\right)+\frac{10}{8} \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^{-2}+\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} \cdot \frac{1}{6^2}$ $\left[\frac{139}{40}\right]$
- 79 $\left\{\left(\frac{2}{5}\right)^4 \cdot \left[\left(\frac{2}{5}\right)^8:\left(\frac{2}{5}\right)^{3+2}\right]^2\right\}:\left[\left(\frac{2}{5}\right)^3 \cdot \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^3\right]^4$ [1]
- 80 $1-\left[\left(\frac{3}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2:\left(\frac{3}{2}\right)^4-\left(\frac{4}{5}\right)^3:\left(\frac{4}{5}\right)^3+\left(\frac{1}{3}\right)^4:\left(\frac{1}{3}\right)^3\right]$ $\left[\frac{1}{6}\right]$
- 81 $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}+\frac{2^2}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-3}-\frac{(-2)^{-2}}{5}-2^4$ $\left[\frac{9}{20}\right]$
- 82 $\left\{\left[\frac{1}{6}+\frac{1}{2}:\left(\frac{6}{8}+1-\frac{3}{4}\right)\right]^3 \cdot \left(\frac{3}{5}-\frac{3}{8}\right)+\frac{3}{5}\right\}:\frac{1}{5}$ $\left[\frac{10}{3}\right]$
- 83 $\left\{\frac{1}{2}+\frac{15}{2}:\left[\frac{1}{2}:\left(1-\frac{3}{4}\right)+1\right]\right\} \cdot \left[\left(\frac{1}{3}\right)^5:\left(\frac{1}{3}\right)^4\right]^2$ $\left[\frac{1}{3}\right]$
- 84 $\left\{\left[\left(\frac{5}{4}\right)^2:\left(\frac{1}{2}\right)\right] \cdot \left[\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}\right) \cdot \frac{4}{5}\right] \cdot \frac{1}{14}\right\}^2:\left(1-\frac{5}{6} \cdot \frac{3}{10}\right)^2$ $\left[\frac{1}{144}\right]$
- 85 $\left[(0,4-1)^2:0,01-\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}\right] \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{-4}$ [540]
- 86 $\frac{4}{15}\left\{\left(\frac{9}{4}+\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}-\frac{11}{16} \cdot \frac{1}{2}+\frac{1}{8}\right):\left[\left(\frac{4}{7}+\frac{5}{4}\right):\frac{17}{7}\right]\right\} \cdot \frac{9}{5}$ $\left[\frac{77}{50}\right]$
- 87 $\left(2+\frac{1}{2}\right)^2:\left(2-\frac{1}{2}\right)^{-2}+\left[\left(2+\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{7}{3}\right)^{-2}\right]^{-1}$ $\left[\frac{787}{48}\right]$
- 88 $\left\{\left[\left(\frac{8}{3}\right)^{10}:\left(\frac{8}{3}\right)^6\right]^2 \cdot \left[\left(\frac{8}{3}\right)^8:\left(\frac{8}{3}\right)^3\right]\right\}:\left(\frac{8}{3}\right)^{11}$ $\left[\frac{64}{9}\right]$
- 89 $\left(\frac{1}{3}-1\right)-\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{4}\right) \cdot \frac{6}{5}-\left(\frac{2}{9}-\frac{1}{5}\right) \cdot 3-\frac{1}{30}$ $\left[-\frac{2}{3}\right]$
- 90 $\left[\left(\frac{7}{5}-\frac{1}{2}\right)^2:\left(\frac{9}{10}\right)^2-\left(1+\frac{2}{3}-2\right)^2\right]^2:\left(\frac{10}{9}\right)^2-\left(1+\frac{8}{5}-\frac{1}{25}\right)$ $\left[-\frac{48}{25}\right]$
- 91 $\left(\frac{1}{6}+0,1\right) \cdot 0,16 \cdot (1-1,0\bar{1})^{-1}$ $\left[-\frac{96}{25}\right]$
- 92 $\left(1-\frac{1}{2}\right)^{-2} \cdot \left[\left(1+\frac{1}{2}\right)^2\right]^{-2}:\left(\frac{5}{2}-2\right)^{-3}$ $\left[\frac{8}{81}\right]$
- 93 $\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{4}\right)\left(-1-\frac{1}{3}\right)+\left[\left(1+\frac{4}{3}\right) \cdot \left(4-\frac{9}{2}\right)\right] \cdot \frac{3}{4}+3-\left(\frac{2}{27} \cdot \frac{9}{10}-\frac{1}{10}\right)-\frac{9}{40}$ [2]

94 $[0,625 + 4,5 \cdot (0,75 - 0,\bar{6})] : [0,875 + 0,75 \cdot (2,5 - 2,\bar{3})]$ [1]

95 $\left\{ 3 - \left[0,\bar{6} - \left(0,1\bar{6} + \frac{5}{12} \right) \right] : 0,25 \right\}^2 \cdot (0,\bar{6} - 0,625)$ $\left[\frac{8}{27} \right]$

96 Calcola:

a. il 10% di 100 [10] c. il 20% di 500 [100] e. il 25% di 1250 [312,5]

b. il 30% di 700 [210] d. il 15% di 150 [22,5] f. il 16% di 120 [19,2]

97 A un gruppo di 200 intervistati è stato chiesto quale quotidiano leggono. Le risposte sono state le seguenti:

a. 90 leggono "La Repubblica" c. 30 leggono "La Stampa"

b. 70 leggono "Il Corriere della sera" d. 10 leggono "Il Giornale"

Trasforma in percentuali i dati ottenuti. [45%, 35%, 15%, 5%]

98 Dato il costo di un oggetto IVA esclusa, calcola il prezzo IVA inclusa.

Costo IVA esclusa (€)	IVA (%)	Costo IVA inclusa (€)
130	21	
1250	21	
17,40	4	
	21	170
	21	12 240
101,00		105,60

Risolvi i seguenti problemi.

99 Su 60 alunni, 15 giocano a calcio. Qual è la percentuale di alunni che giocano a calcio? [25%]

100 La distanza Roma-Bari è di 450 km. Se ho percorso i $\frac{2}{5}$ del tragitto, quanti chilometri mancano ancora da percorrere? [270 km]

101 Una persona possiede 525 €. Se spende i $\frac{3}{5}$ della somma e poi i $\frac{2}{3}$ della rimanente, quale somma di denaro gli rimane? [70 €]

102 A una scuola di ballo sono iscritte 120 persone. Di queste il 70% sono donne. Quanti sono gli uomini? [36]

103 Una bici viene venduta con uno sconto del 10%. Il prezzo di listino prima dello

sconto era 150 €. Quanto costa ora? [135 €]

104 Per l'acquisto di un armadio, Maria è riuscita a spuntare, dopo lunghe discussioni, uno sconto del 25%, risparmiando 120 €. Qual era il prezzo senza sconto dell'armadio? [480 €]

105 Un'azienda ha acquistato dei computer nuovi per i propri dipendenti. Pagandoli in contanti, ha ottenuto uno sconto dell'10%, versando di conseguenza l'importo di 27 000 €. Qual era il valore iniziale della merce acquistata? [30 000 €]

106 Una persona paga un tappeto 1200 €. Lo stesso tappeto l'anno precedente costava 800 €. Quanto è stato l'aumento percentuale da un anno all'altro? [50%]

- 107** Il prezzo di copertina di un libro è di 29 €. Quanto verrà pagato con uno sconto del 15%? [24,65 €]
- 108** Un oggetto è costituito da una lega di zinco e rame. Il suo peso è di 280 g e la percentuale di rame è il 20%. Quanti grammi di zinco contiene? [224 g]
- 109** Paolo compra un'auto da 5400 €. Paga i 4/9 in contanti e il resto in 5 rate. Qual è l'ammontare di ogni rata? A quale frazione corrisponde ogni rata? [600 €; 1/9]
- 110** Il serbatoio di una macchina contiene benzina per i 3/4 della sua capacità. Dopo aver consumato i 2/3 della benzina che c'è, si fa un pieno aggiungendone 66 litri. Qual è la capacità del serbatoio? [132 litri]
- 111** L'aria è composta per 39/50 di azoto e per 21/100 di ossigeno. La parte rimanente è composta da gas diversi. Quale frazione di aria occupano tutti gli altri gas? [1/100]
- 112** Luca ha pagato la tassa scolastica in ritardo. Ha pagato 56,16 €, compresa una sovrattassa del 4% per il ritardo nel pagamento. Quanto avrebbe dovuto pagare senza la sovrattassa? [54 €]
- 113** A un concorso si sono presentati 300 candidati, di cui 15 l'hanno superato. Qual è stata la percentuale dei candidati che non hanno superato il concorso? [95%]
- 114** Un'auto è stata acquistata a 11 800 € in questo modo: il 5% come caparra per la prenotazione, il 20% al momento della consegna e il resto in 12 rate di pari importo. Qual è l'importo della rata? [737,50 €]
- 115** Un gestore di un bar acquista i cornetti a 0,60 € e li rivende a 0,75 €. Qual è la percentuale di guadagno sul prezzo di acquisto? [25%]
- 116** In un supermercato si vendono i pomodori a 0,60 € in confezioni da 250 g, e a 1,00 € in confezioni da 500 g. Qual è la percentuale di sconto di cui usufruisce chi compra la confezione da mezzo chilo? [20%]
- 117** Un negoziante, durante il periodo di Natale, aumenta tutti i prezzi del 10%. Se il prezzo iniziale di un paio di scarpe era 70,00 €, qual è ora il suo prezzo? Dopo le feste, il negoziante abbassa i nuovi i prezzi del 10%. Quanto costano ora le scarpe? [77 €; 69,30 €]
- 118** Al cinema "Eliseo" hanno deciso di aumentare il prezzo del biglietto del 10%. Il numero degli spettatori è calato, però, del 10%. È stato un affare? Perché? [No, perché ha perso l'1% dei ricavi]
- 119** Un paio di scarpe scontato del 20% costa 40 €. Quanto costava prima dello sconto? [50 €]
- 120** Una ragazza di 50 kg va dal dietologo, che le consiglia di restare entro il 5% del peso attuale. Tra quali valori può oscillare il suo peso? [da 47,5 kg a 52,5 kg]
- 121** Una tariffa telefonica ha un costo di 10 centesimi al minuto per i primi 5 minuti di conversazione. Per i minuti successivi aumenta del 5%. Dopo 15 minuti di conversazione aumenta del 20% del costo iniziale. Quanto si spende se si effettua una telefonata di 20 minuti? [2,15 €]
- 122** La superficie della Terra è per il 70% ricoperta di acqua e per il 30% di terraferma. Per 1/5 la terraferma è coperta da ghiaccio e deserto, per 2/3 da foreste e montagna. La parte rimanente è terreno coltivato. Qual è in percentuale la parte della superficie terrestre coltivata? [4%]
- 123** La base di un televisore a 16/9 misura 80 cm. Quanto misura l'altezza? [45 cm]
- 124** Per raccogliere le foglie cadute nel cortile della scuola, Aldo impiega 6 ore, Giovanni 10 ore e Giacomo 15 ore. Se i tre si mettessero a lavorare insieme, in quante ore pulirebbero il cortile? [3 ore]
- 125** Per preparare una torta bisogna mettere 3 parti di zucchero ogni 4 parti di farina. Se si impiegano 500 g di farina, quanto zucchero bisogna utilizzare? [375 g]

126 Indica la risposta corretta.

a. Qual è il risultato dell'espressione $\frac{1,2 + 3,2}{1,2 \cdot 3,2}$?

A $\frac{55}{48}$

B $\frac{48}{55}$

C $\frac{58}{45}$

D $\frac{45}{58}$

b. Un negoziante aumenta il costo di un oggetto del 20%. Dopo l'aumento l'oggetto costa 132 €. Quanto costava l'oggetto prima dell'aumento?

A 105 €

B 110 €

C 115 €

D 120 €

c. Quale dei seguenti numeri è un *quadrato perfetto* (cioè un intero che è il quadrato di un altro intero)?

A $2^7 \cdot 5^2 \cdot 3^4$

B $2^6 \cdot 5^3 \cdot 3^8$

C $2^7 \cdot 5^3 \cdot 3^{11}$

D $2^{10} \cdot 5^6 \cdot 3^8$

d. La tabella seguente si riferisce alla rilevazione della scuola di provenienza effettuata in una classe prima di un Istituto professionale.

Sesso	Scuola A	Scuola B	Scuola C	Altre scuole
Maschi	5	3	3	2
Femmine	7	3	4	3

Qual è la percentuale di alunni che provengono da scuole diverse dalla scuola A?

A 58%

B 60%

C 62%

D 65%

e. $(2^{-6} + 2^{-4}) : 4^{-2}$ è uguale a:

A $\frac{5}{4}$

B $\frac{4}{5}$

C $\frac{1}{4}$

D 4

f. Per quale delle seguenti frazioni si deve moltiplicare $\frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ per ottenere come risultato 1?

A $\frac{9}{10}$

B $\frac{9}{20}$

C $\frac{10}{9}$

D $\frac{20}{9}$

g. Un'automobile ha un prezzo di listino di 16 000 €. Il concessionario offre uno sconto del 15%; inoltre un cliente può risparmiare un ulteriore 5% su tale prezzo scontato se acquista entro la fine del mese. A quanto corrisponde, in percentuale, lo sconto complessivo sul prezzo originario fatto a un cliente che perfeziona l'acquisto entro il mese?

A Meno del 15%

B Circa il 19%

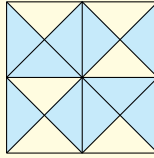
C Il 20%

D Più del 20%

h. Sapendo che $a + b < 0$ e $ab > 0$, quale delle seguenti affermazioni è vera?

- A a e b sono entrambi positivi
 B a e b sono entrambi negativi
 C a e b sono discordi e il numero positivo è il più piccolo in valore assoluto
 D a e b sono discordi e il numero positivo è il più grande in valore assoluto

i. Quale percentuale della figura è colorata?



- A 50% B 52,5% C 60% D 62,5%

j. L'espressione $3^8 + 3^9$ è uguale a:

- A 3^{17} B $2 \cdot 3^8$ C $4 \cdot 3^8$ D 3^{72}

[Due risposte A, quattro B, una C e tre D]

127 Indica la risposta corretta.

a. Sono dati due numeri naturali x e y , diversi da 0. Se y è multiplo di x , quanto vale il loro minimo comune multiplo?

- A x B y C $x \cdot y$ D 1

b. Se al numero 0,999 si sottrae un centesimo, che numero si ottiene?

- A 0,998 B 0,899 C 0,989 D 0,988

c. A un club sportivo sono iscritti 150 soci. Di essi, 120 giocano a tennis, 50 vanno a cavallo. Sapendo che ogni iscritto pratica almeno uno dei due sport, quanti sono gli iscritti che vanno a cavallo e giocano a tennis?

- A 15 B 20 C 25 D Non si sa

d. Quale delle seguenti espressioni rappresenta «il triplo del quadrato di 3^{10} »?

- A 3^{19} B 3^{20} C 3^{21} D 3^{101}

e. In una prova di ammissione bisogna superare due test. I $3/5$ dei candidati superano il primo test e i $2/3$ di quelli che l'hanno superato passano anche il secondo test. Su 120 candidati, quanti saranno ammessi?

A 48

B 50

C 56

D 64

- f. Tre numeri interi positivi a , b e c sono tali che a è multiplo di b e b è multiplo di c . Quale delle seguenti terne soddisfa queste condizioni?

A $a = 3, b = 111, c = 1110$

C $a = 111, b = 1110, c = 3$

B $a = 111, b = 3, c = 1110$

D $a = 1110, b = 111, c = 3$

- g. All'esame di Stato i candidati hanno conseguito il diploma con i seguenti punteggi (in centesimi)

Punteggi	60	64	70	72	78	80	84	88	94	100
Numero di candidati	1	2	4	1	2	5	4	1	3	2

Per poter partecipare a un concorso occorre aver conseguito il diploma con un punteggio di almeno 80/100. Qual è la percentuale di candidati che può partecipare al concorso?

A 20%

B 55%

C 60%

D 85%

- h. Un insegnante rileva che gli alunni di una classe assenti un certo giorno sono 3, pari al 15% degli alunni della classe. Quanto sono in tutto gli alunni?

A 18

B 20

C 22

D 24

- i. Quale delle seguenti disuguaglianze è *falsa*?

A $-\frac{1}{2} > -\frac{3}{2}$

B $\frac{2}{3} < \frac{4}{5}$

C $\frac{2}{7} > \frac{1}{5}$

D $\frac{7}{9} < \frac{5}{7}$

- j. Si vuole suddividere, se possibile, un rettangolo avente le dimensioni di 24 cm e 32 cm in quadrati che siano tutti congruenti tra loro e i più grandi possibili. Quanto dovrà misurare il lato di ogni quadrato?

A 6 cm

B 8 cm

C 12 cm

D 16 cm

- k. Considera tutti i numeri naturali da 1 a 10000. Quale percentuale di essi è un quadrato perfetto?

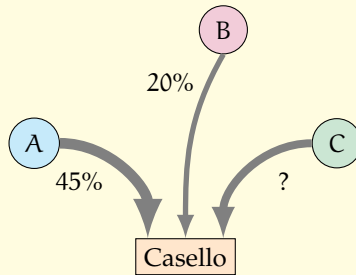
A 1%

B 1,5%

C 2%

D 2,5%

- l. La figura seguente rappresenta il flusso verso un casello autostradale dei veicoli provenienti dalle località A, B e C con le relative percentuali medie, riferite a un qualsiasi giorno feriale.



Se ogni giorno feriale arrivano al casello 2500 veicoli, quanti in media provengono da C?

A 675

B 775

C 875

D 975

[Due risposte A, quattro B, quattro C e due D]

128 Disponi in ordine di distanza dal Sole i seguenti pianeti, in base alla distanza media in km riportata tra parentesi: Mercurio ($5,8 \cdot 10^7$), Nettuno ($4,5 \cdot 10^9$), Giove ($7,8 \cdot 10^8$), Plutone ($5,9 \cdot 10^9$), Urano ($2,9 \cdot 10^9$), Terra ($1,5 \cdot 10^8$), Marte ($2,3 \cdot 10^8$).

129 Esprimi in notazione scientifica i seguenti numeri.

a. 1234

d. 990 000

g. 0,000 01

j. 0,000 004 56

b. 34 000

e. 26 000 000

h. 0,000 083

k. 0,000 000 987

c. 490 000

f. 126 000 000

i. 0,000 008 1

l. 0,000 000 735 1

130 Si dice che nell'universo ci siano 100 miliardi di galassie e che ciascuna contenga 100 miliardi di stelle. Se tutte fossero come il Sole, la cui massa è di circa $2 \cdot 10^{30}$ kg, a quanto ammonterebbe la massa di tutte le stelle dell'universo messe insieme? $[2 \cdot 10^{52}$ kg]

131 Determina per ciascuno dei seguenti numeri irrazionali i numeri interi tra cui è compreso (per esempio, $5 < \sqrt{30} < 6$).

a. $\sqrt{2}$

d. $\sqrt{7}$

g. $\sqrt{17}$

j. $\sqrt{29}$

b. $\sqrt{3}$

e. $\sqrt{11}$

h. $\sqrt{19}$

k. $\sqrt{31}$

c. $\sqrt{5}$

f. $\sqrt{13}$

i. $\sqrt{23}$

l. $\sqrt{37}$

132 Disponi in ordine crescente i seguenti numeri reali:

a. $\sqrt{2}$ 1 $\frac{2}{3}$ $2,0\overline{13}$ $\sqrt{5}$ $\frac{3}{2}$ 0,75 b. π $\sqrt{3}$ $\frac{11}{5}$ $0,\overline{9}$ $\sqrt{10}$ $3,1\overline{4}$ 3

133 Rappresenta con un diagramma di Eulero-Venn l'insieme dei numeri reali \mathbb{R} e suddividilo nei seguenti sottoinsiemi: l'insieme \mathbb{N} dei numeri naturali, l'insieme \mathbb{Z} dei numeri interi, l'insieme \mathbb{Q} dei numeri razionali, l'insieme \mathbb{J} dei numeri irrazionali. Disponi in maniera opportuna i seguenti numeri: $\sqrt{3}$ $\sqrt[3]{5}$ π $0,\overline{3}$ 3,14 $3/2$ -2

134 Calcola (quando è possibile) il valore delle seguenti radici quadrate.

a. $\sqrt{5}$

f. $\sqrt{64}$

j. $\sqrt{\frac{49}{81}}$

m. $\sqrt{\frac{-1}{4}}$

b. $\sqrt{7}$

g. $\sqrt{-81}$

k. $\sqrt{\frac{121}{100}}$

n. $\sqrt{\frac{144}{9}}$

c. $\sqrt{9}$

h. $\sqrt{144}$

l. $\sqrt{\frac{144}{36}}$

o. $\sqrt{\frac{25}{36}}$

d. $\sqrt{36}$

i. $\sqrt{\frac{16}{25}}$

e. $\sqrt{-49}$

135 Vero o falso?

a. Un numero decimale finito è sempre un numero razionale.

 V F

b. Un numero decimale illimitato è sempre un numero irrazionale.

 V F

c. Un numero decimale periodico è un numero irrazionale.

 V F

d. La somma di due numeri razionali è sempre un numero razionale.

 V F

e. La somma di due numeri irrazionali è sempre un numero irrazionale.

 V F

f. Il prodotto di due numeri razionali è sempre un numero razionale.

 V F

g. Il prodotto di due numeri irrazionali è sempre un numero irrazionale.

 V F

[3 affermazioni vere e 4 false]

136 Indica la risposta corretta.a. Il doppio di $\sqrt{2}$ è:

A $2\sqrt{2}$

B $\sqrt{4}$

C $\sqrt[4]{2}$

D $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$

b. Quale delle seguenti uguaglianze è vera per ogni valore di a ?

A $\sqrt{a} = a^2$

B $(\sqrt{a})^2 = a^2$

C $\sqrt{a^2} = |a|$

D $\sqrt{a^2} = a$

c. Dato un numero negativo x , si può trovare un numero y tale che $y^2 = x$? A Sì, per ogni valore di x C Sì, ma solo se y è positivo B No, per nessun valore di x D Sì, ma solo se y è negativod. Dall'uguaglianza $\sqrt[3]{a} = \frac{1}{2}$ si deduce che:

A $a = \frac{1}{2}$

B $a^3 = \frac{1}{2}$

C $a = \frac{1}{8}$

D $a = \frac{1}{6}$

e. Il risultato della somma algebrica $\sqrt[3]{27} - \sqrt{4} + \sqrt{8}$ è:

- A 5 B $\sqrt[3]{41}$ C $3 + \sqrt{4}$ D $1 + 2\sqrt{2}$

f. La radice $\sqrt{-2a+4}$ è definita se e solo se:

- A $a > 2$ B $a \geq -2$ C $a \leq 2$ D $a \geq -6$

g. Semplifica $\frac{\sqrt{32}}{2}$:

- A $\sqrt{16}$ B $2\sqrt{2}$ C 16 D $4\sqrt{2}$

[Una risposta A, due B, tre C e una D]

137 Indica la risposta corretta.

a. Quale delle seguenti operazioni è corretta?

- A $\sqrt{9} + \sqrt{4} = \sqrt{9+4}$ C $\sqrt{9} - \sqrt{4} = \sqrt{9-4}$
 B $\sqrt{9} : \sqrt{4} = \sqrt{9:4}$ D $(\sqrt[3]{4})^2 = \sqrt[6]{4}$

b. Calcola $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$:

- A $\sqrt{2}$ B $\frac{1}{\sqrt{4}}$ C $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D $\frac{1}{2\sqrt{2}}$

c. Calcola $(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2$:

- A 5 B $\sqrt{5}$ C $5 - 2\sqrt{6}$ D $5 + 2\sqrt[4]{6}$

d. La relazione $\sqrt{2}a + 2 = 0$ è verificata se a vale:

- A $2\sqrt{2}$ B $-2\sqrt{2}$ C $-\sqrt{2}$ D $-\sqrt{2}/2$

e. Un quadrato ha il lato che misura $\sqrt{2}$ ha per area:

- A $\sqrt{2}$ B 2 C $\sqrt[4]{2}$ D 4

f. Un cubo che ha lo spigolo che misura $\sqrt{2}$ ha per volume:

- A 2 B $\sqrt[6]{2}$ C $\sqrt[3]{2}$ D $2\sqrt{2}$

g. L'espressione $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$ è verificata:

- A mai C solo se $a = b = 0$
 B per ogni valore di a e b D se $b = 0$ e $a \geq 0$

[Una risposta A, due B, due C e due D]

138 Indica la risposta corretta.

a. Il risultato dell'espressione $(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)^2 - \sqrt{2}$ è un numero:

- A intero negativo C periodico
 B intero positivo D irrazionale

b. Un quadrato ha area 12. Qual è il suo perimetro?

- A $2\sqrt{3}$ B $4\sqrt{3}$ C $8\sqrt{3}$ D $16\sqrt{3}$

c. Uno solo dei seguenti numeri è irrazionale: quale?

- A $\sqrt[3]{0,125}$ B $\sqrt{0,25}$ C $\sqrt[3]{0,3}$ D $\sqrt{0,1}$

d. Quale delle seguenti uguaglianze è corretta?

- A $\sqrt{4} = -2$ B $\sqrt{4} = \pm 2$ C $\sqrt{4} = -\sqrt[3]{8}$ D $\sqrt{4} = -\sqrt[3]{-8}$

e. Per ogni $x \geq 0$, l'espressione $x\sqrt{x^8}$ è uguale a:

- A x^5 B $-\sqrt{x^{12}}$ C $\sqrt{x^{12}}$ D x^6

f. Il numero $\sqrt{7} - \sqrt{3}$ è:

- A uguale a 2 B minore di 1 C maggiore di 1 D negativo

g. L'uguaglianza $\sqrt{a^2 + 10a + 25} = a + 5$ è vera:

- A solo per $a = 0$ B $\forall a \geq -5$ C $\forall a \in \mathbb{R}$ D mai

[Una risposta A, tre B, due C e una D]

4

CALCOLO LETTERALE

Supponiamo che l'insegnante chieda agli alunni di scrivere «il doppio della somma di due numeri».

- Anna chiede «Quali sono i numeri? Se non li conosco non posso soddisfare la richiesta»
- Bruno scrive: $2 \cdot (1 + 3)$
- Chiara scrive: $2 \cdot (a + b)$

Anna si è posta il problema ma non ha saputo impostarlo; Bruno si è limitato a un caso particolare; Chiara ha espresso con una formula l'operazione richiesta. L'uso di lettere dell'alfabeto per indicare numeri ci permette di generalizzare uno schema di calcolo.

Definizione 22. Un'espressione letterale è un'espressione in cui compaiono numeri, lettere e operazioni.

In un'espressione letterale, le lettere indicano numeri qualsiasi. L'espressione letterale $2(a + b)$, per esempio, traduce una serie di istruzioni che nel linguaggio naturale sono così descritte: «prendi due numeri, sommalì e raddoppia il risultato ottenuto».

Calcoliamo il valore dell'espressione $2(a + b)$, sostituendo alla lettera a il numero 1 e alla lettera b il numero 3:

$$2 \cdot (a + b) = 2 \cdot (1 + 3) = 2 \cdot 4 = 8$$

Se al posto di a e b sostituiamo rispettivamente 4 e 5, il risultato cambia:

$$2 \cdot (a + b) = 2 \cdot (4 + 5) = 2 \cdot 9 = 18$$

In un'espressione letterale, le lettere rappresentano le *variabili* che assumono un preciso significato quando vengono sostituite da numeri. Chiamiamo *valore* di un'espressione letterale il risultato che si ottiene eseguendo le operazioni indicate quando alle lettere sostituiamo dei numeri.

4.1 MONOMI

D'ora in poi, quando scriveremo un'espressione letterale in cui compare un prodotto tralascieremo il puntino usato fin qui per evidenziare l'operazione. Per esempio, anziché $2 \cdot (a + b)$ scriveremo semplicemente $2(a + b)$.

Definizione 23. Un'espressione letterale in cui numeri e lettere sono legati dalla sola moltiplicazione si chiama *monomio*.

Per esempio, sono monomi:

- $2x$
- $3x^2$
- $4ab$
- $3a^2b$

mentre

- $x + 1$
- $x^2 - 5x + 6$
- $a^2 - b^2$
- a/b

non sono monomi, perché contengono anche somme, sottrazioni e divisioni.

Gli elementi di un monomio sono *fattori*, perché sono termini di un prodotto, ma possono comparire anche *potenze*: infatti la potenza è un prodotto di fattori uguali. *Non* possono invece comparire esponenti negativi: in un monomio gli esponenti delle lettere devono essere numeri naturali. Per esempio, $2x^{-1}$ *non* è un monomio.

Definizione 24. Un monomio si dice *ridotto in forma normale* quando è scritto come prodotto di un solo fattore numerico per potenze letterali con basi diverse.

Per esempio, il monomio

$$2a^2b3a$$

non è scritto in forma normale: tra i suoi fattori vi sono numeri diversi (2 e 3) e le potenze letterali hanno basi ripetute (la a compare due volte). Se moltiplichiamo tra loro i fattori numerici ed eseguiamo il prodotto delle potenze con la stessa base (sommando i relativi esponenti) otteniamo

$$2a^2b3a = (2 \cdot 3)a^{2+1}b = 6a^3b$$

che è in forma normale.

Definizione 25. Dato un monomio ridotto in forma normale, il suo fattore numerico si chiama *coefficiente*, mentre il complesso delle sue lettere si dice *parte letterale*.

Se il coefficiente è 1, lo si sottintende. Per esempio, si scrive ab al posto di $1ab$.

Tabella 1: Coefficiente, parte letterale e grado di un monomio

Monomio	Coefficiente	Parte letterale	Grado complessivo	Grado rispetto ad a	Grado rispetto a b
$2a$	2	a	1	1	0
$3a^2b$	3	a^2b	3	2	1
$3ab^2$	3	ab^2	3	1	2

Definizione 26. Il *grado complessivo* (o semplicemente *grado*) di un monomio è la somma degli esponenti della parte letterale. Quando il monomio è ridotto in forma normale, l'esponente di una sua lettera è il *grado* del monomio rispetto a quella lettera.

Per esempio, il monomio $3a^2b$ ha grado complessivo 3, ottenuto sommando gli esponenti della sua parte letterale ($2 + 1 = 3$). Rispetto alla lettera a è di secondo grado, mentre rispetto alla lettera b è di primo grado. La tabella 1 riporta alcuni monomi con i rispettivi coefficienti, le parti letterali e i gradi.

Se in un monomio ogni lettera ha esponente 0, il monomio (di grado 0) rimane solamente con il suo coefficiente e quindi è equiparabile a un numero razionale: per esempio, $3a^0b^0 = 3$.

Definizione 27. Se il coefficiente del monomio è zero, il monomio si dice *nullo* e si indica semplicemente con 0.

Definizione 28. Due o più monomi che hanno la stessa parte letterale si dicono *simili*.

Per esempio, il monomio $3a^2b$ è simile a $4a^2b$ e anche a $-3a^2b$, ma non a $3ab^2$: l'ultimo monomio, infatti, ha le stesse lettere degli altri, ma elevate a esponenti diversi.

Definizione 29. Due monomi simili che hanno coefficienti opposti si dicono *opposti*.

Per esempio:

- i monomi $2x$ e $-2x$ sono opposti, perché sono simili e hanno coefficienti opposti
- i monomi $2x$ e $-3x$ sono simili, ma *non* sono opposti, perché i loro coefficienti, pur avendo segni diversi, non sono opposti

Il monomio nullo si considera simile a qualunque altro monomio.

Valore di un monomio

Poiché un monomio è un'espressione letterale, possiamo calcolarne il valore quando alle sue lettere sostituiamo numeri.

Esercizio 22. Calcola il valore del monomio $3a^2b$ quando $a = 1$ e $b = 2$.

Soluzione. Sostituendo i valori assegnati otteniamo

$$3a^2b = 3 \cdot 1^2 \cdot 2 = 3 \cdot 1 \cdot 2 = 6 \quad \square$$

Esercizio 23. Calcola il valore del monomio precedente se $a = 2$ e $b = 1$.

Soluzione.

$$3a^2b = 3 \cdot 2^2 \cdot 1 = 3 \cdot 4 \cdot 1 = 12 \quad \square$$

Molte formule di geometria sono scritte sotto forma di monomi: per esempio, l'area del rettangolo è bh , l'area del quadrato è l^2 , il perimetro del quadrato è $4l$, il volume del cubo l^3 , e così via. Queste formule assumono un valore preciso quando alle lettere sostituiamo numeri che rappresentano le misure della figura considerata.

Operazioni con i monomi

Somma

La *somma* di due monomi *simili* è un monomio simile agli addendi, che ha come coefficiente la somma dei coefficienti.

Esercizio 24. Calcola $2ab + 4ab$.

Soluzione. Poiché i due addendi sono monomi simili, la somma è ancora un monomio ed è simile ai singoli addendi:

$$2ab + 4ab = (2 + 4)ab = 6ab \quad \square$$

Differenza

Per sottrarre due monomi *simili* si aggiunge al primo l'opposto del secondo.

Esercizio 25. Calcola $2ab - 4ab$.

Soluzione.

$$2ab - 4ab = 2ab + (-4ab) = (2 - 4)ab = -2ab \quad \square$$

Possiamo unificare le due operazioni di somma e differenza di monomi simili in un'unica operazione che chiamiamo *somma algebrica* di monomi. La somma algebrica di due monomi simili è un monomio simile agli addendi che ha per coefficiente la somma algebrica dei coefficienti.

Esercizio 26. Calcola $x - 2x + 3x - 4x$.

Soluzione.

$$x - 2x + 3x - 4x = (1 - 2 + 3 - 4)x = -2x \quad \square$$

Esercizio 27. Calcola la somma $2a + b + 3a$.

Soluzione. I monomi non sono tutti tra loro simili; lo sono però il primo e il terzo. Riscriviamo la somma precedente sommando il primo e il terzo monomio:

$$2a + b + 3a = (2 + 3)a + b = 5a + b$$

L'espressione così ottenuta è la somma richiesta. □

Il procedimento che abbiamo seguito per determinare il risultato dalla somma precedente è chiamato *riduzione dei termini simili*.

In definitiva, l'operazione di somma tra monomi ha come risultato un monomio solo se gli addendi sono monomi simili. In caso contrario, la somma viene effettuata riducendo i monomi simili e lasciando indicata la somma tra gli altri monomi.

Prodotto

Il *prodotto* di due monomi è il monomio che ha per coefficiente il prodotto dei coefficienti dei monomi, e la parte letterale formata da tutte le lettere che compaiono nei monomi, considerate una sola volta e con esponente uguale alla *somma* degli esponenti che quella lettera ha nei monomi.

Esercizio 28. Calcola $2ab \cdot 3ab^2c$.

Soluzione.

$$2ab \cdot 3ab^2c = (2 \cdot 3)a^{1+1}b^{1+2}c = 6a^2b^3c \quad \square$$

Quoziente

Il *quoziente* di due monomi, di cui il secondo non nullo, è il monomio che ha come coefficiente il quoziente dei coefficienti dei monomi e la parte letterale formata da tutte le lettere che compaiono nei monomi, ciascuna con esponente uguale alla *differenza* degli esponenti con cui quella lettera compare nel dividendo e nel divisore.

Se per una o più lettere questa differenza è *negativa*, il quoziente *non* è un monomio, ma una *frazione algebrica*. In altre parole, il quoziente fra due monomi è un monomio solo se ogni lettera del dividendo ha esponente maggiore o uguale all'esponente con cui compare nel divisore.

Esercizio 29. Calcola $6ab^3c : 2ab$.

Soluzione.

$$6ab^3c : 2ab = (6 : 2)a^{1-1}b^{3-1}c = 3b^2c \quad \square$$

Esercizio 30. Calcola $6x : 3x^2$.

Soluzione.

$$6x : 3x^2 = (6 : 3)x^{1-2} = 2x^{-1}$$

che *non* è un monomio, ma una frazione algebrica. □

Potenza

La *potenza* n-esima di un monomio è il monomio che ha per coefficiente la potenza n-esima del coefficiente del monomio dato e la parte letterale formata da tutte le lettere che hanno per esponente il prodotto del proprio esponente per n.

Esercizio 31. Calcola $(3a^2b)^2$.

Soluzione.

$$(3a^2b)^2 = 3^2 a^{2 \cdot 2} b^{1 \cdot 2} = 9a^4b^2 \quad \square$$

Espressioni con i monomi

Esercizio 32. Calcola $\frac{1}{4}ab \cdot ab^3 - \left[\left(\frac{1}{3}a^2b^2 \right)^3 : \frac{2}{9}a^4b^2 \right]$.

Soluzione.

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{4}ab \cdot ab^3 - \left[\left(\frac{1}{3}a^2b^2 \right)^3 : \frac{2}{9}a^4b^2 \right] &= \frac{1}{4}a^2b^4 - \left[\frac{1}{27}a^6b^6 : \frac{2}{9}a^4b^2 \right] \\
 &= \frac{1}{4}a^2b^4 - \left[\left(\frac{1}{27} : \frac{2}{9} \right) a^2b^4 \right] \\
 &= \frac{1}{4}a^2b^4 - \left[\left(\frac{1}{27} \cdot \frac{9}{2} \right) a^2b^4 \right] \\
 &= \frac{1}{4}a^2b^4 - \frac{1}{6}a^2b^4 \\
 &= \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) a^2b^4 = \frac{3-2}{12} a^2b^4 = \frac{1}{12} a^2b^4 \quad \square
 \end{aligned}$$

Esercizio 33. Calcola $(3a^2b)^2 : 3a^3b + (2a) \cdot (-b)$.

Soluzione.

$$(3a^2b)^2 : 3a^3b + (2a) \cdot (-b) = 9a^4b^2 : 3a^3b - 2ab = 3ab - 2ab = ab \quad \square$$

Massimo comune divisore e minimo comune multiplo

Massimo Comune Divisore

Il MCD di un gruppo di monomi è il monomio che ha:

- per coefficiente il MCD dei coefficienti dei monomi se questi sono numeri interi (se non sono interi, si prende 1)
- la parte letterale formata da tutte le lettere *comuni* ai monomi dati, ciascuna presa una sola volta e con l'esponente *minore* con cui compare

Esercizio 34. Calcola MCD($6a^2b$, $4abc$).

Soluzione.

- Per prima cosa calcoliamo il MCD tra i coefficienti 6 e 4, che è 2.
- Per ottenere la parte letterale si prendono tutte le lettere comuni, ciascuna con l'esponente minore con cui compare: ab .

In conclusione, il MCD è $2ab$.

□

Esercizio 35. Calcola $\text{MCD}\left(\frac{1}{2}x^3, xy^2\right)$.

Soluzione.

- I coefficienti numerici dei monomi non sono numeri interi, quindi si prende 1 come coefficiente del MCD
- Per ottenere la parte letterale si prendono tutte le lettere comuni, ciascuna con l'esponente minore con cui compare: x

In conclusione, il MCD è x . □

Minimo comune multiplo

Il mcm di un gruppo di monomi è il monomio che ha:

- per coefficiente numerico il mcm dei valori assoluti dei coefficienti dei monomi (se non sono interi si prende 1)
- la parte letterale formata da tutte le lettere *comuni e non comuni* ai monomi dati, ciascuna presa una sola volta e con l'esponente *maggiore* con cui compare

Esercizio 36. Calcola $\text{mcm}(6a^2b, 4abc)$.

Soluzione.

- Per prima cosa calcoliamo il mcm tra i coefficienti 6 e 4, che è 12.
- Per ottenere la parte letterale si prendono tutte le lettere comuni e non comuni, ciascuna con l'esponente maggiore con cui compare: a^2bc .

In definitiva, il mcm è $12a^2bc$. □

Esercizio 37. Calcola $\text{mcm}\left(\frac{1}{2}x^3, xy^2\right)$.

Soluzione.

- I coefficienti numerici dei monomi non sono numeri interi, quindi si prende 1 come coefficiente del mcm
- Per ottenere la parte letterale si prendono tutte le lettere comuni e non comuni, ciascuna con l'esponente maggiore con cui compare: x^3y^2

In conclusione, il mcm è x^3y^2 . □

4.2 POLINOMI

Definizione 30. Un *polinomio* è la somma algebrica di più monomi.

Per esempio, sono polinomi:

- $x + 1$
- $x^2 - 5x + 6$
- $a^2 - b^2$
- $a + b + c$

Se fra i termini di un polinomio non sono presenti monomi simili, il polinomio si dice *ridotto in forma normale*; se invece ci sono dei termini simili, possiamo sempre ridurre il polinomio sommandoli.

Un polinomio in forma normale può presentare tra i suoi termini un monomio di grado 0, che viene chiamato *termine noto*. Per esempio, il polinomio

$$a + b + a + 2b + 4$$

ridotto in forma normale diventa

$$2a + 3b + 4$$

Il termine noto è 4.

Un polinomio può anche essere costituito da un unico termine, quindi un monomio è anche un polinomio. Un polinomio che, ridotto in forma normale, è la somma algebrica di due, tre, quattro monomi non nulli si dice rispettivamente *binomio*, *trinomio*, *quadrinomio*. Per esempio:

- $x + 1$ è un binomio
- $x^2 + 5x + 6$ è un trinomio
- $x^3 + x^2 + x + 1$ è un quadrinomio

Definizione 31. Due polinomi si dicono *opposti* se sono formati da termini opposti

Per esempio, i polinomi $a - 2b$ e $-a + 2b$ sono opposti.

Definizione 32. Il *grado complessivo* (o semplicemente *grado*) di un polinomio è il massimo dei gradi complessivi dei suoi termini. Quando il polinomio è ridotto in forma normale, si chiama *grado del polinomio rispetto a una lettera* l'esponente maggiore con cui quella lettera compare nel polinomio.

Un polinomio di grado zero si dice *costante*, un polinomio di grado uno si dice *lineare*, un polinomio di grado due si dice *quadratico*, un polinomio di grado tre si dice *cubico*.

La tabella 2 riporta alcuni polinomi con i rispettivi gradi.

Tabella 2: Grado di un polinomio

Polinomio	Grado complessivo	Grado rispetto ad a	Grado rispetto a b
$ab + a + 1$	2	1	1
$a^2b + ab + 1$	3	2	1
$a^3b + ab^2$	4	3	2

Definizione 33. Un polinomio si dice *ordinato secondo le potenze decrescenti (crescenti) di una lettera*, quando i suoi termini sono ordinati in modo tale che gli esponenti di quella lettera decrescono (crescono) leggendo il polinomio da sinistra verso destra.

Per esempio:

- il polinomio $x^3 + x^2 + x + 1$ è ordinato secondo le potenze decrescenti della lettera x
- il polinomio $a^3 + a^2b + ab^2 + b^3$ è ordinato secondo le potenze decrescenti della lettera a e secondo le potenze crescenti della lettera b

Valore di un polinomio

Poiché un polinomio è un'espressione letterale, possiamo calcolarne il valore quando alle sue lettere sostituiamo numeri.

Esercizio 38. Calcola il valore del polinomio $x^2 - y^2$ quando $x = 3$ e $y = 1$.

Soluzione. Sostituendo i valori assegnati otteniamo

$$x^2 - y^2 = 3^2 - 1^2 = 9 - 1 = 8 \quad \square$$

Esercizio 39. Calcola il valore del polinomio precedente se $x = 1$ e $y = 3$.

Soluzione.

$$x^2 - y^2 = 1^2 - 3^2 = 1 - 9 = -8 \quad \square$$

Operazioni con i polinomi

Somma algebrica di polinomi

La *somma algebrica* di due polinomi è il polinomio che si ottiene sommando tutti i termini dei polinomi addendi.

Esercizio 40. Calcola $(2a + b + 3) + (a - b - 2)$.

Soluzione. Eliminiamo le parentesi e sommiamo i monomi simili:

$$(2a + b + 3) + (a - b - 2) = 2a + \cancel{b} + 3 + a - \cancel{b} - 2 = (2a + a) + (3 - 2) = 3a + 1 \quad \square$$

Esercizio 41. Calcola $(3x - 4y) - (x + 2y - 1)$.

Soluzione.

$$(3x - 4y) - (x + 2y - 1) = 3x - 4y - x - 2y + 1 = 2x - 6y + 1 \quad \square$$

Prodotto di un monomio per un polinomio

Il *prodotto di un monomio per un polinomio* è il polinomio che ha come termini i prodotti del monomio per ciascun termine del polinomio dato.

Esercizio 42. Calcola $2a \cdot (3a + b + 1)$.

Soluzione.

$$2a \cdot (3a + b + 1) = 2a \cdot 3a + 2a \cdot b + 2a \cdot 1 = 6a^2 + 2ab + 2a \quad \square$$

Prodotto di polinomi

Il *prodotto di due polinomi* è il polinomio che si ottiene moltiplicando ogni termine del primo polinomio per ciascun termine del secondo polinomio.

Esercizio 43. Calcola $(a + b)(x + y)$.

Soluzione.

$$(a + b)(x + y) = a(x + y) + b(x + y) = ax + ay + bx + by \quad \square$$

Esercizio 44. Calcola $(x + 2)(x + 3)$.

Soluzione.

$$(x + 2)(x + 3) = x(x + 3) + 2(x + 3) = x^2 + 3x + 2x + 6 = x^2 + 5x + 6 \quad \square$$

Quoziente fra un polinomio e un monomio

Il *quoziente* fra un polinomio (detto *dividendo*) e un monomio non nullo (detto *divisore*) è il polinomio che si ottiene dividendo ogni termine del polinomio per il monomio.

La divisione tra un polinomio e un monomio non nullo non è sempre possibile: perché lo sia, bisogna che ogni termine del polinomio sia divisibile per il monomio, ovvero bisogna che ogni termine del polinomio dividendo contenga tutte le lettere che figurano nel monomio divisore e che ciascuna di esse sia elevata a un esponente maggiore o uguale a quello che figura nel divisore.

Esercizio 45. Calcola $(8a^3b - 4a^2 + 2a) : (2a)$.

Soluzione.

$$(8a^3b - 4a^2 + 2a) : (2a) = (8a^3b : 2a) + (-4a^2 : 2a) + (2a : 2a) = 4a^2b - 2a + 1 \quad \square$$

Esercizio 46. Calcola $(x^2 + 1) : x$.

Soluzione. Il polinomio non è divisibile per il monomio perché il termine noto del dividendo non è divisibile per x . Quindi la divisione va espressa nel modo seguente:

$$\frac{x^2 + 1}{x}$$

che non è un monomio ma una *frazione algebrica*. □

Espressioni con i polinomi

Vediamo ora qualche esempio di espressione con i polinomi che contiene le operazioni che abbiamo studiato.

Esercizio 47. Calcola l'espressione $[(a + b)(a - 2b) - a(a + b)] : (-b)$.

Soluzione.

$$\begin{aligned} [(a + b)(a - 2b) - a(a + b)] : (-b) &= [\cancel{a^2} - 2ab + \cancel{ab} - 2b^2 - \cancel{a^2} - \cancel{ab}] : (-b) \\ &= [-2ab - 2b^2] : (-b) = 2a + 2b \quad \square \end{aligned}$$

Esercizio 48. Calcola l'espressione $\left[\left(\frac{1}{2}a^2b \right)^2 + \frac{1}{6}a^4b^2 \right] : (2a^3b)$.

a	b
a^2	ab
ab	b^2

Figura 10: Interpretazione geometrica della formula $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Soluzione.

$$\begin{aligned}
 \left[\left(\frac{1}{2} a^2 b \right)^2 + \frac{1}{6} a^4 b^2 \right] : (2a^3 b) &= \left[\frac{1}{4} a^4 b^2 + \frac{1}{6} a^4 b^2 \right] : (2a^3 b) \\
 &= \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6} \right) a^4 b^2 : (2a^3 b) \\
 &= \frac{3+2}{12} a^4 b^2 : (2a^3 b) = \frac{5}{12} \cdot \frac{1}{2} a^{4-3} b^{2-1} = \frac{5}{24} ab \square
 \end{aligned}$$

4.3 PRODOTTI NOTEVOLI

Un *prodotto notevole* è una formula che consente di svolgere più rapidamente i calcoli rispetto all'applicazione diretta delle regole del calcolo letterale.

Quadrato di un binomio

Consideriamo il binomio $a + b$ ed eleviamolo al quadrato:

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Senza eseguire i passaggi intermedi si ha

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Si può dare un'interpretazione geometrica della formula precedente. Prendiamo due segmenti consecutivi di lunghezza a e b , ottenendo così un segmento di lunghezza $a + b$. Costruiamo il quadrato di lato $a + b$, che avrà area $(a + b)^2$ e scomponiamolo come nella figura 10. Il quadrato di lato $a + b$ è composto da due quadrati di area rispettivamente a^2 e b^2 e da due rettangoli di area ab . Di conseguenza l'area del quadrato è uguale a

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Se il binomio presenta una sottrazione, allora il suo quadrato è

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

In generale, si può dire quindi che *il quadrato di un binomio è uguale alla somma tra il quadrato del primo termine, il doppio del prodotto fra i due termini e il quadrato del secondo termine.*

Le formule precedenti valgono anche se al posto di a e b ci sono dei monomi o dei polinomi. Per esempio:

$$(3x + 2y)^2 = (3x)^2 + 2(3x)(2y) + (2y)^2 = 9x^2 + 12xy + 4y^2$$

Prodotto della somma fra due monomi per la loro differenza

Si consideri il seguente prodotto:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2$$

Senza eseguire i passaggi intermedi si ha

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Quindi *il prodotto della somma fra due termini per la loro differenza è uguale al quadrato del primo termine meno il quadrato del secondo termine.*

La formula precedente vale anche se al posto di a e b ci sono dei monomi o dei polinomi. Per esempio:

$$(3x + 2y)(3x - 2y) = (3x)^2 - (2y)^2 = 9x^2 - 4y^2$$

Esercizio 49. Senza utilizzare la calcolatrice, calcola il prodotto $28 \cdot 32$.

Soluzione.

$$28 \cdot 32 = (30 - 2)(30 + 2) = 30^2 - 2^2 = 900 - 4 = 896$$

□

Espressioni con i prodotti notevoli

Esercizio 50. Calcola l'espressione $(x + 1)^2 - (2x + 1)(2x - 1) + 2x(x + 1)$.

Soluzione.

$$\begin{aligned} (x + 1)^2 - (2x + 1)(2x - 1) + 2x(x + 1) &= x^2 + 2x + 1 - (4x^2 - 1) + 2x^2 + 2x \\ &= x^2 + 2x + 1 - 4x^2 + 1 + 2x^2 + 2x \\ &= -x^2 + 4x + 2 \end{aligned}$$

□

Esercizio 51. Calcola l'espressione $(2a + 3b)(a - 2b) - (a - 2b)^2$.

Soluzione.

$$\begin{aligned}(2a + 3b)(a - 2b) - (a - 2b)^2 &= 2a^2 - 4ab + 3ab - 6b^2 - (a^2 - 4ab + 4b^2) \\ &= 2a^2 - \cancel{4ab} + 3ab - 6b^2 - a^2 + \cancel{4ab} - 4b^2 \\ &= a^2 + 3ab - 10b^2\end{aligned}$$

□

4.4 ESERCIZI

Chi non risolve esercizi non impara la matematica.

1 Individua tra le espressioni letterali di seguito elencate, quelle che sono monomi.

a. $x^2 + y^2$

b. $4^{-1}ab$

c. $1/x$

d. $x/2$

2 Vero o falso?

a. Il grado di un monomio è la somma degli esponenti di tutte le sue lettere. V F

b. Se due monomi hanno lo stesso grado, allora sono simili. V F

c. Se due monomi sono simili, allora hanno lo stesso grado. V F

d. Il valore del monomio $-a$ è negativo per qualunque a diverso da zero. V F

e. Il valore del monomio $-a^2$ è negativo per qualunque a diverso da zero. V F

f. Il monomio b^6 è il cubo di b^2 . V F

g. L'espressione ab^{-1} è un monomio. V F

h. Il valore del monomio ab è zero per $a = 1$ e $b = -1$. V F

[4 affermazioni vere e 4 false]

Calcola il prodotto dei seguenti monomi.

3 $2x \cdot 3x$

[$6x^2$]

4 $4a \cdot 2b$

[$8ab$]

5 $3ab \cdot 2bc$

[$6ab^2c$]

6 $3x \cdot 3y$

[$9xy$]

7 $(-2ab) \cdot (+3ac)$

[$-6a^2bc$]

8 $2a(-3ab)(-4a^2b^2)$

[$24a^4b^3$]

9 $\frac{3}{2}a \cdot \frac{2}{9}b$

[$\frac{1}{3}ab$]

10 $\frac{4}{3}ab \cdot \frac{9}{20}b$

[$\frac{3}{5}ab^2$]

11 $\frac{3}{4}ab^2 \cdot \frac{2}{3}a$

[$\frac{1}{2}a^2b^2$]

12 $\frac{7}{2}ab^2 \cdot \frac{8}{21}ab$

[$\frac{4}{3}a^2b^3$]

13 $\frac{5}{6}a^2b^2 \cdot \frac{3}{10}ab$

[$\frac{1}{4}a^3b^3$]

14 $\frac{4}{7}a^2b^2 \cdot \frac{21}{8}ab^2$

[$\frac{3}{2}a^3b^4$]

Calcola le potenze indicate.

15 $(-3a^3b^4c)^2$

[$9a^6b^8c^2$]

16 $(a^3b^2)^8$

[$a^{24}b^{16}$]

17	$(-2ab^2c^3)^3$	$[-8a^3b^6c^9]$	21	$\left(\frac{3}{4}x^4y\right)^3$	$\left[\frac{27}{64}x^{12}y^3\right]$
18	$(2ab^3c^2)^2$	$[4a^2b^6c^4]$	22	$\left(\frac{2}{3}xy^2\right)^3$	$\left[\frac{8}{27}x^3y^6\right]$
19	$\left(\frac{1}{2}a^2bc^5\right)^4$	$\left[\frac{1}{16}a^8b^4c^{20}\right]$	23	$\left(-\frac{1}{2}ab\right)^4$	$\left[\frac{1}{16}a^4b^4\right]$
20	$\left(-\frac{1}{2}abc^2\right)^3$	$\left[-\frac{1}{8}a^3b^3c^6\right]$	24	$\left(-\frac{3}{2}a^5\right)^2$	$\left[\frac{9}{4}a^{10}\right]$

Calcola i seguenti quozienti:

25	$6x^2 : 2x$	$[3x]$	32	$\frac{3}{2}ab^2 : \frac{3}{2}ab^2$	$[1]$
26	$4a^4b^2 : 2a^2b^2$	$[2a^2]$	33	$\frac{1}{2}a^5b^3c^2 : 2a^3b$	$\left[\frac{1}{4}a^2b^2c^2\right]$
27	$6a^2b^3c : 2ab^2$	$[3abc]$	34	$\frac{6}{5}a^4b^2c^2 : \frac{7}{10}a^2b^2$	$\left[\frac{12}{7}a^2c^2\right]$
28	$25a^3b^4 : 5a^2b$	$[5ab^3]$	35	$\frac{12}{5}a^3b^2c : \frac{4}{15}ab^2$	$[9a^2c]$
29	$3a^3b^2c : 3ab^2$	$[a^2c]$	36	$\frac{3}{7}x^2y : \frac{9}{14}xy$	$\left[\frac{2}{3}x\right]$
30	$-9a^2b : 3a$	$[-3ab]$			
31	$\frac{5}{2}a^3b^2 : \frac{10}{3}a^3b^2$	$\left[\frac{3}{4}\right]$			

Calcola la somma algebrica dei seguenti monomi.

37	$6x + 2x - 3x$	$[5x]$	52	$\frac{1}{4}a^3b^2 - \frac{1}{2}a^3b^2$	$\left[-\frac{1}{4}a^3b^2\right]$
38	$-3a + 2a - 5a$	$[-6a]$	53	$\frac{2}{3}x - \frac{2}{5}x - 2x + \frac{3}{10}x$	$\left[-\frac{43}{30}x\right]$
39	$5a^2b - 3a^2b$	$[2a^2b]$	54	$-\left(-\frac{1}{2}ab^2\right) - 3ab^2$	$\left[-\frac{5}{2}ab^2\right]$
40	$a^2b^2 - 3a^2b^2$	$[-2a^2b^2]$	55	$-\frac{9}{2}xy - (-xy)$	$\left[-\frac{7}{2}xy\right]$
41	$2xy - 3xy + xy$	$[0]$	56	$2xy^2 - \frac{3}{2}xy^2 - xy^2$	$\left[-\frac{1}{2}xy^2\right]$
42	$2y^2 - 3y^2 + 7y^2 - 4y^2$	$[2y^2]$	57	$\frac{1}{2}xy^2 + \frac{3}{2}xy^2$	$[2xy^2]$
43	$-2xy^2 + xy^2$	$[-xy^2]$	58	$\left(\frac{2}{3}a + a\right) - \left(\frac{2}{3}a - a\right)$	$[2a]$
44	$-3ab - 5ab$	$[-8ab]$	59	$\frac{1}{4}a^3 - \frac{3}{2}a^3 + \frac{5}{8}a^3$	$\left[-\frac{5}{8}a^3\right]$
45	$5ab - 2ab$	$[3ab]$	60	$\frac{1}{2}a - \frac{1}{3}a + \frac{1}{4}a - \frac{1}{5}a$	$\left[\frac{13}{60}a\right]$
46	$-3xy^2 + 3xy^2$	$[0]$	61	$\frac{2}{3}a - \frac{3}{4}b - \left(-\frac{3}{4}b - \frac{1}{2}a\right)$	$\left[\frac{7}{6}a\right]$
47	$7xy^3 - 2xy^3$	$[5xy^3]$			
48	$2xy^2 - 4xy^2$	$[-2xy^2]$			
49	$2xy^2 - 4xy^2 + xy^2$	$[-xy^2]$			
50	$-5x^2 + 3x^2$	$[-2x^2]$			
51	$\frac{1}{2}a + 2a$	$\left[\frac{5}{2}a\right]$			

Svolgi le seguenti espressioni tra monomi.

$$62 \quad \left(\frac{1}{2}a^2 - a^2\right)\left(\frac{1}{2}a + 2a\right) + (2a - a)\left(3a - \frac{1}{2}a\right)a \quad \left[\frac{5}{4}a^3\right]$$

$$63 \quad \frac{1}{2}x^2\left(x^2 + \frac{1}{2}x^2\right) - \frac{1}{6}x^3\left(12x - \frac{18}{5}x\right) \quad \left[-\frac{13}{20}x^4\right]$$

$$64 \quad \left(-\frac{3}{4}x^4 a^2 b\right) : \left(\frac{1}{2}x^2 ab\right) + \frac{2}{3}x^2 a \quad \left[-\frac{5}{6}ax^2\right]$$

$$65 \quad \left(\frac{1}{2}a - \frac{1}{4}a\right)^2 : \left(\frac{3}{2}a - 2a\right) \quad \left[-\frac{1}{8}a\right]$$

$$66 \quad \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{2}{3}x^2 + x^2\right)\left(-\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}x\right) \quad \left[\frac{7}{72}x^3\right]$$

$$67 \quad \left(\frac{1}{5}x - \frac{5}{2}x + x\right) - \left(2x - \frac{8}{3}x + \frac{1}{4}x + x\right) - \frac{7}{60}x \quad [-2x]$$

$$68 \quad \left(2xy^2 - \frac{3}{2}xy^2\right) - (xy^2 + 2xy^2 - 4xy^2) + \left(xy^2 + \frac{1}{2}xy^2\right) \quad [3xy^2]$$

$$69 \quad (-ab^4 c^2)^2 - \frac{3}{4}a^2 b^5 c \cdot (bc)^3 \quad \left[\frac{1}{4}a^2 b^8 c^4\right]$$

$$70 \quad \frac{9}{125}ab\left(\frac{5}{3}a^2 b\right)^2 - \frac{3}{7}a^3 b\left(\frac{7}{3}ab\right)^2 \quad \left[-\frac{32}{15}a^5 b^3\right]$$

$$71 \quad \frac{3}{16}a(-4ab^2)^2 - \frac{2}{5}b(-ab)^3 - 5ab^2\left(-\frac{4}{5}ab\right)^2 (-a)^0 \quad \left[\frac{1}{5}a^3 b^4\right]$$

$$72 \quad \frac{3}{4}bc^3 - \frac{1}{5}\left[7x^3 y^2 - (8bc)\left(-\frac{3}{4}c\right)^2\right] - 2y\left(-\frac{7}{10}x^3 y\right) \quad \left[\frac{33}{20}bc^3\right]$$

$$73 \quad \frac{1}{4}x^4 y^2 - \left[\frac{3}{2}x^5 y^4 : \left(\frac{1}{2}xy\right)^2 - 3x^3 y^2\right]\left(-\frac{1}{3}x\right) + \left(-\frac{1}{2}x^2 y\right)^2 \quad \left[\frac{3}{2}x^4 y^2\right]$$

$$74 \quad 5a + \left\{-\frac{3}{4}a - \left[2a - \frac{1}{2}a + (3a - a) + 0,5a\right] - a\right\} \quad \left[-\frac{3}{4}a\right]$$

$$75 \quad a^2 - \left\{a - \left[2\left(\frac{a}{2} - \frac{a}{3}\right)\right]\right\}^2 + \left(\frac{2}{3}a + a\right)\left(\frac{2}{3}a - a\right) \quad [0]$$

76 Vero o falso?

a. La differenza tra due monomi opposti è il monomio nullo.

V F

b. Il quoziente di due monomi simili è il quoziente dei loro coefficienti.

V F

c. La somma di due monomi è un monomio.

V F

d. Il prodotto di due monomi è un monomio.

V F

e. L'opposto di un monomio ha sempre il coefficiente negativo.

V F

f. $12a^3 b^2 c$ è un multiplo di abc .

V F

- g. $2xy$ è un divisore di x^2 . V F
- h. $2a$ è divisore di $4ab$. V F
- i. Il mcm fra monomi è divisibile per tutti i monomi dati. V F
- j. Il MCD fra monomi è multiplo di almeno un monomio dato. V F

[5 affermazioni vere e 5 false]

Calcola il MCD e il mcm dei seguenti gruppi di monomi.

- | | | | | |
|-----------|------------------------|----------------------|------------------------|---------------------------|
| 77 | $4x^2$ | $6x$ | $8x^3$ | $[2x, 24x^3]$ |
| 78 | $\frac{1}{2}x^2$ | $\frac{2}{3}x^3$ | $2x^4$ | $[x^2, x^4]$ |
| 79 | $9a^2b^2$ | $3a^2b^4c^2$ | $12a^6b^2c$ | $[3a^2b^2, 36a^6b^4c^2]$ |
| 80 | $\frac{1}{3}a^2b$ | $\frac{7}{2}a^3b^3$ | $2a^2b^2c$ | $[a^2b, a^3b^3c]$ |
| 81 | $3abc$ | $2a^2c$ | $\frac{1}{2}ab^3$ | $[a, a^2b^3c]$ |
| 82 | xy^3 | $4x^2y^2$ | $3y^2$ | $[y^2, 12x^2y^3]$ |
| 83 | $25a^2b^2c$ | $15a^3c$ | $10abc^3$ | $[5ac, 150a^3b^2c^3]$ |
| 84 | $14a^3b^5c^2$ | $7a^5bc^3$ | $21a^3bc^4$ | $[7a^3bc^2, 42a^5b^5c^4]$ |
| 85 | $\frac{3}{2}a^4b^3c^7$ | $\frac{4}{5}a^7b^6c$ | $\frac{7}{3}a^3b^4c^2$ | $[a^3b^3c, a^7b^6c^7]$ |
| 86 | $22a^3bc^5$ | $11ab^3c^4$ | $2a^2b^6c^3$ | $[abc^3, 22a^3b^6c^5]$ |

87 Dati i monomi $3xy^2$ e xz^3 :

- calcola il loro MCD
- calcola il loro mcm
- verifica che il loro prodotto è uguale al prodotto fra il loro mcm e il loro MCD
- verifica che il loro MCD è uguale al quoziente fra il loro prodotto e il loro mcm

Riduci a forma normale i seguenti polinomi

- | | | | | | |
|-----------|-------------------------------|------------------|-----------|---------------------|-----------------|
| 88 | $x + 1 + x^2 - 5x + 2$ | $[x^2 - 4x + 3]$ | 91 | $-2a + 3b + 7a$ | $[5a + 3b]$ |
| 89 | $2a - 3b - 2b + a + 3b$ | $[3a - 2b]$ | 92 | $4a + 3b - 3a + 5b$ | $[a + 8b]$ |
| 90 | $x^2 - 3x - 2x^2 + 4x + 3x^2$ | $[2x^2 + x]$ | 93 | $a^2 - 2a + 3a - 1$ | $[a^2 + a - 1]$ |

Calcola il valore dei seguenti polinomi.

- | | | | | | | | |
|-----------|-----------------|--------------|------------|-----------|-----------------|--------------|--------------|
| 94 | $x^2 + x$ | per $x = -1$ | [0] | 97 | $3x^3 - 2x + x$ | per $x = -2$ | [-22] |
| 95 | $2x^2 - 3x + 1$ | per $x = 0$ | [1] | 98 | $4a - a^2 + 3$ | per $a = 3$ | [6] |
| 96 | $3x^2 - 2x - 1$ | per $x = 2$ | [7] | 99 | $x^2 - 8x + 16$ | per $x = 4$ | [0] |

Calcola le seguenti somme di polinomi.

- | | | | | | |
|------------|---------------------|-------------|------------|------------------------------------|-------------|
| 100 | $a + b - b$ | $[a]$ | 105 | $2a + 2b + (2a + b) + 2a$ | $[6a + 3b]$ |
| 101 | $a + b - 2b$ | $[a - b]$ | 106 | $2a + b - (-3a - b)$ | $[5a + 2b]$ |
| 102 | $a + b - (-2b)$ | $[a + 3b]$ | 107 | $2a - 3b - (-3b - 2a)$ | $[4a]$ |
| 103 | $a - (b - 2b)$ | $[a + b]$ | 108 | $(a + 1) - (a - 3)$ | $[4]$ |
| 104 | $2a + b + (3a + b)$ | $[5a + 2b]$ | 109 | $2a^2 - 3b - 4b - 3a^2 + a^2 - 2b$ | $[-9b]$ |

Esegui i seguenti prodotti di un monomio per un polinomio.

- | | | | | | |
|------------|----------------|-------------------|------------|---------------------|--------------------------|
| 110 | $a(a + b)$ | $[a^2 + ab]$ | 113 | $a(a^2 - a)$ | $[a^3 - a^2]$ |
| 111 | $a(a - b)$ | $[a^2 - ab]$ | 114 | $ab(a^2b - ab - 1)$ | $[a^3b^2 - a^2b^2 - ab]$ |
| 112 | $a(a - b + 2)$ | $[a^2 - ab + 2a]$ | 115 | $b(a^2b - ab - 1)$ | $[a^2b^2 - ab^2 - b]$ |

Calcola le seguenti divisioni tra polinomi e monomi.

- | | | | | | |
|------------|---|---|------------|---|---------------------------------|
| 116 | $(2x^2y + 8xy^2) : (2xy)$ | $[x + 4y]$ | 121 | $(2a - 2) : \frac{1}{2}$ | $[4a - 4]$ |
| 117 | $(a^2 + a) : a$ | $[a + 1]$ | 122 | $\left(\frac{1}{2}a - \frac{a^2}{4}\right) : \frac{a}{2}$ | $\left[1 - \frac{1}{2}a\right]$ |
| 118 | $(a^2 - a) : (-a)$ | $[1 - a]$ | 123 | $(a^2 - a) : a$ | $[a - 1]$ |
| 119 | $\left(\frac{1}{2}a - \frac{1}{4}\right) : \frac{1}{2}$ | $\left[a - \frac{1}{2}\right]$ | 124 | $(a^3 + a^2 - a) : a$ | $[a^2 + a - 1]$ |
| 120 | $\left(\frac{1}{2}a - \frac{1}{4}\right) : 2$ | $\left[\frac{1}{4}a - \frac{1}{8}\right]$ | 125 | $(8a^3 + 4a^2 - 2a) : 2a$ | $[4a^2 + 2a - 1]$ |

Calcola i seguenti prodotti di polinomi.

- | | | |
|------------|---------------------------|--------------------------|
| 126 | $(x + 1)(x^2 - x + 1)$ | $[x^3 + 1]$ |
| 127 | $(x - 1)(x^2 + x + 1)$ | $[x^3 - 1]$ |
| 128 | $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$ | $[a^3 - b^3]$ |
| 129 | $(a + b)(a^2 - ab + b^2)$ | $[a^3 + b^3]$ |
| 130 | $(a - 1)(a - 2)(a - 3)$ | $[a^3 - 6a^2 + 11a - 6]$ |

Risolvi le seguenti espressioni con i polinomi.

- | | | |
|------------|---|--|
| 131 | $(2a^2 - 3b) - [(4b + 3a^2) - (a^2 - 2b)]$ | $[-9b]$ |
| 132 | $(2a^2 - 5b) - [(2b + 4a^2) - (2a^2 - 2b)] - 9b$ | $[-18b]$ |
| 133 | $2(x - 1)(3x + 1) - (6x^2 + 3x + 1) + 2x(x - 1)$ | $[2x^2 - 9x - 3]$ |
| 134 | $(x + 1)^2 + (x - 2)^2 - (x - 1)^2 - (x + 1)(x - 1)$ | $[5]$ |
| 135 | $\left(\frac{1}{3}x - 1\right)(3x + 1) - 2x\left(\frac{5}{4}x - \frac{1}{2}\right)(x + 1) - \frac{1}{2}x\left(x - \frac{2}{3}\right)$ | $\left[-\frac{5}{2}x^3 - x^2 - \frac{4}{3}x - 1\right]$ |
| 136 | $ab(a^2 - b^2) + 2b(x^2 - a^2)(a - b) - 2bx^2(a - b)$ | $[-a^3b - ab^3 + 2a^2b^2]$ |
| 137 | $\left(\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}a^2\right)(1 - a)[a^2 + 2a - (a^2 + a + 1)]$ | $\left[\frac{1}{2}a^4 - \frac{3}{2}a^3 + \frac{3}{2}a^2 - \frac{1}{2}a\right]$ |

$$138 \quad (1-3x)^2 - (-3x)^2 + 5(x+1) - 3(x+1) - 7 \quad [-4x-4]$$

$$139 \quad \left(\frac{1}{2}x-1\right)\left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 1\right) + \left(-\frac{1}{2}x\right)^3 + 2\left(\frac{1}{2}x+1\right) \quad [x+1]$$

140 Quali dei seguenti polinomi sono quadrati di binomi?

a. $a^2 + 4ab + 4b^2$

d. $4x^2 + 6x + 9$

g. $a^4 + 2a^2 + 1$

j. $x^2 - x + 1$

b. $a^2 - 2ab - b^2$

e. $a^2 - 6a + 9$

h. $x^2 - 2x - 1$

k. $a^2 + ab + b^2$

c. $9a^2 - 5ab + b^2$

f. $a^2 + 3a + 9$

i. $x^2 + x + 1$

[3 quadrati di binomi]

141 Completa in modo da formare un quadrato di binomio.

a. $\frac{4}{9}x^2 + \dots + y^2$

c. $\frac{a^4}{4} - \dots + 4b^4$

e. $1 - x + \dots$

g. $4a^2 - 4ab + \dots$

b. $x^2 + 2x + \dots$

d. $9 + 6x + \dots$

f. $x^2 + 4y^2 - \dots$

h. $4x^2 - 20x + \dots$

Svolgi i seguenti quadrati di binomi.

142 $(x+1)^2$

$[x^2 + 2x + 1]$

148 $(2x+y)^2$

$[4x^2 + 4xy + y^2]$

143 $(x+2)^2$

$[x^2 + 4x + 4]$

149 $(x+2y)^2$

$[x^2 + 4xy + 4y^2]$

144 $(x-3)^2$

$[x^2 - 6x + 9]$

150 $(-a+b)^2$

$[a^2 - 2ab + b^2]$

145 $(2x-1)^2$

$[4x^2 - 4x + 1]$

151 $(-a+3)^2$

$[a^2 - 6a + 9]$

146 $(x+y)^2$

$[x^2 + 2xy + y^2]$

152 $(2a+3b)^2$

$[4a^2 + 12ab + 9b^2]$

147 $(x-y)^2$

$[x^2 - 2xy + y^2]$

153 $(2a-3b)^2$

$[4a^2 - 12ab + 9b^2]$

Svolgi i seguenti quadrati di binomi.

154 $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$

$\left[x^2 + x + \frac{1}{4}\right]$

157 $\left(\frac{1}{2}a + \frac{3}{2}b\right)^2$

$\left[\frac{1}{4}a^2 + \frac{3}{2}ab + \frac{9}{4}b^2\right]$

155 $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$

$\left[x^2 - x + \frac{1}{4}\right]$

158 $\left(\frac{2}{3}a + \frac{3}{5}b\right)^2$

$\left[\frac{4}{9}a^2 + \frac{4}{5}ab + \frac{9}{25}b^2\right]$

156 $\left(3x - \frac{1}{3}\right)^2$

$\left[9x^2 - 2x + \frac{1}{9}\right]$

159 $\left(\frac{1}{2}a - \frac{2}{3}b\right)^2$

$\left[\frac{1}{4}a^2 - \frac{2}{3}ab + \frac{4}{9}b^2\right]$

Calcola le seguenti espressioni contenenti quadrati di binomi.

160 $(a-1)^2 - (a+1)^2$

$[-4a]$

161 $(a-2b)^2 - (2a-b)^2$

$[3b^2 - 3a^2]$

162 $3(a-b)^2 - 2(a+2b)^2$

$[a^2 - 14ab - 5b^2]$

163 $(2x+5)^2 - (2x-5)^2$

$[40x]$

164 $(x^2+1)^2 - 6(x^2+1) + 8$

$[x^4 - 4x^2 + 3]$

$$165 \quad \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 - 2 \left(x - \frac{1}{2} \right) \quad \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{9}{8} \right]$$

$$166 \quad (x-1)^2 - (2x+3)^2 \quad [-3x^2 - 14x - 8]$$

167 Calcola le seguenti somme per differenze.

$$a. (x-1)(x+1) \quad [x^2 - 1] \quad e. (a+2b)(a-2b) \quad [a^2 - 4b^2]$$

$$b. (a+1)(a-1) \quad [a^2 - 1] \quad f. (2a+3b)(2a-3b) \quad [4a^2 - 9b^2]$$

$$c. (b-2)(b+2) \quad [b^2 - 4] \quad g. (3a-5b)(3a+5b) \quad [9a^2 - 25b^2]$$

$$d. (2a+b)(2a-b) \quad [4a^2 - b^2] \quad h. (2x+3)(2x-3) \quad [4x^2 - 9]$$

Calcola le seguenti somme per differenze.

$$168 \quad \left(x + \frac{1}{2} \right) \left(x - \frac{1}{2} \right) \quad \left[x^2 - \frac{1}{4} \right] \quad 170 \quad \left(\frac{1}{2}a + b \right) \left(\frac{1}{2}a - b \right) \quad \left[\frac{1}{4}a^2 - b^2 \right]$$

$$169 \quad \left(2x - \frac{1}{3} \right) \left(2x + \frac{1}{3} \right) \quad \left[4x^2 - \frac{1}{9} \right] \quad 171 \quad \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{3} \right) \left(\frac{a}{2} - \frac{b}{3} \right) \quad \left[\frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{9} \right]$$

Svolgi le seguenti espressioni con prodotti notevoli.

$$172 \quad (x+1)^2 - (x-1)^2 \quad [4x] \quad 175 \quad (x+2)(x-2) + (x+2)^2 \quad [2x^2 + 4x]$$

$$173 \quad (x+1)^2 + (x-1)^2 \quad [2x^2 + 2] \quad 176 \quad (a+b)(a-b) + b^2 \quad [a^2]$$

$$174 \quad [(x-1)(1+x)]^2 \quad [x^4 - 2x^2 + 1] \quad 177 \quad (a-b)^2 + (a+b)(b-a) \quad [b^2 - 2ab]$$

Svolgi le seguenti espressioni con prodotti notevoli.

$$178 \quad (a-3b)^2 + (2a+3b)(2a-3b) - (a+2b)(b-2a) \quad [7a^2 - 2b^2 - 3ab]$$

$$179 \quad x(x-1)^2 + (x+1)(x-1) - x(x+1)(x-3) - (x+2)^2 \quad [-5]$$

$$180 \quad -2x(x-1)^2 + 2x \left(x - \frac{1}{3} \right)^2 - \frac{4}{3}x \left(2x - \frac{4}{3} \right) \quad [0]$$

$$181 \quad [(x-1)^2 - 2]^2 - (x^2 + x - 1)^2 + 6x(x-1)(x+1) \quad [3x^2]$$

$$182 \quad \left(\frac{2}{3}a - b \right) \left(\frac{2}{3}a + b \right) - \frac{2}{3}(a-b)^2 + 2 \left(\frac{1}{3}a \right)^2 \quad \left[\frac{5}{3}b^2 + \frac{4}{3}ab \right]$$

$$183 \quad (x^2 + 2x) \left(\frac{1}{2}x + 1 \right) + \left(\frac{1}{2}x - 1 \right)^2 - \left(\frac{1}{2}x + 1 \right) \left(-\frac{1}{2}x + 1 \right) - \frac{1}{2}x^2(x+5) \quad [x]$$

$$184 \quad \left(x - \frac{1}{3} \right)^2 + \left(x + \frac{1}{3} \right)^2 - (x+1)^2 - \left(x - \frac{4}{3} \right) \left(x + \frac{4}{3} \right) \quad [1 - 2x]$$

$$185 \quad 4 \left(x + \frac{1}{2} \right) \left(x - \frac{1}{2} \right) + 2 \left(x + \frac{1}{2} \right)^2 - 2 \left(x + \frac{1}{4} \right) \quad [6x^2 - 1]$$

$$186 \quad \frac{1}{9}(x-4)(x+4) + \frac{1}{3}(x-1)^2 - \frac{1}{9}x(x-2) + \left(x - \frac{5}{2} \right) \left(x + \frac{1}{3} \right) + \frac{41}{18} \quad \left[\frac{4}{3}x^2 - \frac{47}{18}x \right]$$

187 Indica la risposta corretta.

a. Una sola delle seguenti affermazioni è *vera*, quale?

- A la somma di due monomi è sempre un monomio
 B la somma di due binomi non può essere mai un monomio
 C il prodotto di due monomi è sempre un monomio
 D dati due monomi non nulli, ciascuno dei due è sempre divisibile per l'altro

b. L'espressione $\left[\left(\frac{1}{2}a^3b^2\right) \cdot (8ab^3)\right]^2 : (2a^2b^3)^3$ è uguale a

- A ab^2 B $2ab^2$ C a^2b D $2a^2b$

c. Qual è il valore assunto dal polinomio $x^3 - 2x^2 - 1$ per $x = -2$?

- A -15 B -17 C -25 D -30

d. Quale dei seguenti trinomi *non* è il quadrato di un binomio?

- A $4x^2 - 4x + 1$ B $a^2 - 6a + 9$ C $t^2 - 10t + 25$ D $4a^2 - 6a + 9$

e. È dato il polinomio $P(x) = x^2 + x - 6$. Quale dei seguenti è uno *zero* del polinomio (ovvero un numero che sostituito alla x annulla il polinomio)?

- A -1 B 1 C -2 D 2

f. L'area di un quadrato è espressa dal monomio $25a^4$. Quale dei seguenti monomi esprime il perimetro del quadrato?

- A $20a$ B $20a^2$ C $20a^3$ D $20a^4$

g. Le lunghezze dei lati di un rettangolo sono espresse dai due monomi $2x$ e $3x$. Quale dei seguenti monomi esprime l'area del rettangolo?

- A $5x$ B $6x$ C $5x^2$ D $6x^2$

h. Quale dei seguenti monomi corrisponde all'espressione «il doppio del quadrato del triplo di x »?

- A $12x$ B $18x$ C $12x^2$ D $18x^2$

i. Qual è il risultato del prodotto $(1 - 3a)(1 + 3a)$?

A $1 - 9a^2$ B $1 - 6a + 9a^2$ C $-1 - 6a - 9a^2$ D $-1 + 9a^2$

j. Qual è il risultato del prodotto $(-1 - 3a)(1 + 3a)$?

A $1 - 9a^2$ B $1 - 6a + 9a^2$ C $-1 - 6a - 9a^2$ D $-1 + 9a^2$

[Una risposta A, due B, due C e cinque D]

188 Indica la risposta corretta.

a. Paolo ha nel portafoglio x euro; Giovanni ha nel portafoglio 3 euro in più del doppio di quelli che ha Paolo. Quale delle seguenti espressioni rappresenta la somma, in euro, che hanno complessivamente nei portafogli i due amici?

A $13 + 2x$ B $2 + 3x$ C $3(x + 1)$ D $3x + 1$

b. Qual è il risultato dell'espressione «moltiplica la somma di x con 2 per la differenza tra x e 2, quindi eleva al quadrato il risultato ottenuto»?

A $x^2 - 4x + 4$ B $x^4 - 8x^2 + 16$ C $x^2 - 8x + 16$ D $x^4 - 4x^2 + 4$

c. Paolo ha sul conto corrente la somma di x euro. Paolo preleva inizialmente la metà della somma che possiede, quindi versa un terzo di quanto gli è rimasto sul conto. Quale delle seguenti espressioni indica il saldo finale, in euro, del conto di Paolo?

A $\frac{1}{3}x$ B $\frac{2}{3}x$ C $\frac{3}{4}x$ D $\frac{4}{3}x$

d. Qual è il risultato dell'espressione $(2t + 1)^2 - (2t - 1)(2t + 1)$?

A $-4t - 2$ B $4t + 2$ C $4 + 2t$ D $4t - 2$

e. In un triangolo rettangolo un cateto supera il doppio dell'altro di 6 cm. Indicando con a la misura in centimetri del cateto minore, quale tra le seguenti espressioni rappresenta l'area del triangolo, in centimetri quadrati?

A $\frac{1}{2}(a^2 + 6)$ B $a^2 + 3a$ C $\frac{1}{2}a^2 + 3a$ D $a^2 + 6a$

f. Quale delle seguenti affermazioni è vera per ogni intero positivo n ?

A $5n + 1$ è dispari C $5n^2 + 5n$ è pari
 B $n^3 + 3$ è dispari D $n^2 + n$ è dispari

g. Quale dei seguenti monomi è il doppio del prodotto del quadrato di $2a^3$ per il cubo di $2a^2$?

- A $32a^{72}$ B $64a^{72}$ C $32a^{12}$ D $64a^{12}$

h. Quale delle seguenti espressioni rappresenta un numero intero dispari, qualunque sia il numero naturale n ?

- A $4n$ B $3n$ C $4n - 1$ D $3n + 1$

i. L'espressione $(x + 2y)^2 + (x - 2y)^2 + (-2x + y)(-2x - y)$ è uguale a:

- A $6x^2 + 7y^2$ B $-6x^2 - 7y^2$ C $-6x^2 + 7y^2$ D $6x^2 - 7y^2$

j. La somma di tre numeri naturali consecutivi è:

- A mai divisibile per 3
 B divisibile per 3 solo se tutti e tre i numeri sono divisibili per 3
 C divisibile per 3 solo se almeno due dei tre numeri sono divisibili per 3
 D sempre divisibile per 3

[Una risposta A, quattro B, tre C e due D]

189 Indica la risposta corretta.

a. Quale delle seguenti uguaglianze è vera per ogni $a \in \mathbb{R}$?

- A $(a - 1)(-a + 1) = -a^2 - 1$ C $(a - 2)^2 = a^2 - 2a + 4$
 B $(a - 2)(2 - a) = -(a - 2)^2$ D $(-a + 3)^2 = -a^2 - 6a + 9$

b. Lo stipendio mensile di un venditore è di 1200 euro più il 10% dell'incasso mensile. Se S rappresenta il suo stipendio mensile e V l'incasso mensile, quale delle seguenti formule esprime S in funzione di V ?

- A $S = 1200 + 0,01V$ C $S = 1200 + 0,1V$
 B $S = \frac{1}{10}(1200 + V)$ D $S = \frac{1}{100}(1200 + V)$

c. Quale delle seguenti uguaglianze si può descrivere con la frase «sottraendo 5 dal quadrato di un numero, si ottiene il cubo della somma tra lo stesso numero e 5»?

- A $(x - 5)^2 = x^2 + 5$ C $x^2 - 5 = x^3 + 5$
 B $(x - 5)^2 = x^3 + 5$ D $x^2 - 5 = (x + 5)^3$

d. La base maggiore di un trapezio è 2 cm in più della base minore, mentre l'altezza è uguale al doppio della base minore. Detta x la misura, in cm, della base minore, quale delle seguenti espressioni rappresenta l'area del trapezio in cm^2 ?

- A $2x^2 - 2x$ B $2x^2 + 2x$ C $x^2 - x$ D $x^2 + x$

e. Quale delle seguenti espressioni rappresenta un numero intero che è contemporaneamente un cubo e un quadrato, qualsiasi siano i numeri interi a e b?

- A $-25a^4b^9$ B a^4b^6 C $64a^{12}b^6$ D $81a^8b^6$

f. Quale delle seguenti proposizioni descrive l'espressione letterale $\frac{1}{a^3 + b^3}$?

- A Il reciproco della somma dei cubi di a e di b
 B Il reciproco del cubo della somma di a e di b
 C Il cubo della somma dei reciproci di a e di b
 D La somma dei cubi dei reciproci di a e di b

g. In una gara di velocità, Mario ha percorso x metri in t secondi e Andrea ha percorso $\frac{7}{9}$ dei metri percorsi da Mario nella metà del tempo. Se entrambi hanno mantenuto una velocità costante, chi dei due è più veloce?

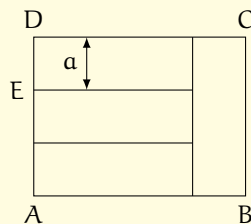
- A Andrea
 B Mario
 C Hanno mantenuto la stessa velocità
 D Le informazioni non sono sufficienti per rispondere

h. Quale espressione algebrica corrisponde alla proposizione «moltiplicare il quadrato della somma di due numeri per la differenza dei quadrati dei due numeri»?

- A $(x^2 + y^2)(x - y)^2$ C $(x^2 + y^2)(x^2 - y^2)$
 B $(x + y)^2(x^2 - y^2)$ D $(x + y)^2(x - y)^2$

[Due risposte A, tre B, due C e una D]

190 Il rettangolo ABCD nella figura seguente è l'unione di quattro rettangoli congruenti. La misura del segmento DE è uguale ad a.

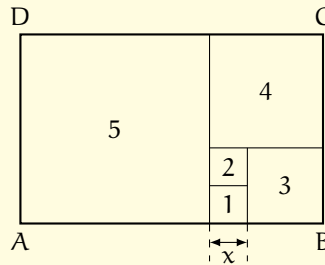


Stabilisci se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- a. I dati non bastano per esprimere il perimetro di ABCD in funzione di a . V F
- b. L'area del rettangolo ABCD è uguale a $12a^2$. V F
- c. Se la lunghezza di DE triplica, anche il perimetro di ABCD triplica. V F
- d. Se la lunghezza di DE triplica, anche l'area di ABCD triplica. V F
- e. Se la lunghezza di DE aumenta di 1, l'area di ABCD aumenta di $24a + 12$. V F

[3 affermazioni vere e 2 false]

- 191** Il rettangolo ABCD rappresentato nella figura seguente è stato suddiviso in cinque quadrati. La misura, in centimetri, del lato dei due quadrati più piccoli è x .



- a. Esprimi il perimetro e l'area del rettangolo ABCD in funzione di x .
- b. Se la misura del lato dei due quadrati più piccoli viene dimezzata, come variano il perimetro e l'area del rettangolo ABCD?

[Perimetro = $26x$, area = $40x^2$; $13x$, $10x^2$]

- 192** Considera il poligono rappresentato nella figura 11a.

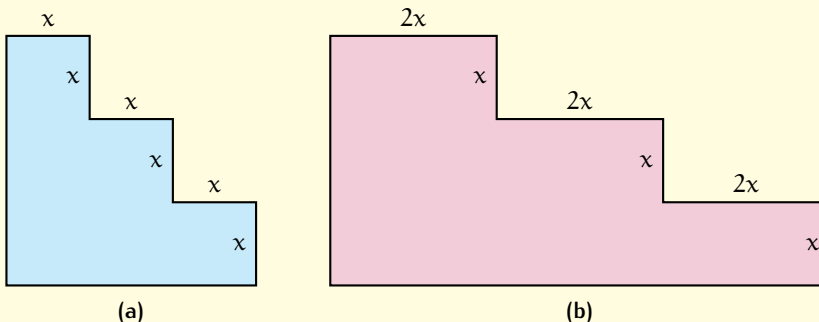


Figura 11

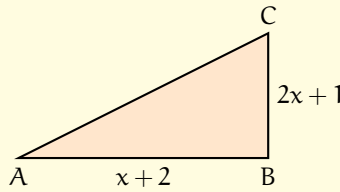
- a. Esprimi in funzione di x il perimetro e l'area del poligono.

Supposto che le misure dei lati orizzontali raddoppino, come indicato nella figura 11b, rispondi ai seguenti quesiti:

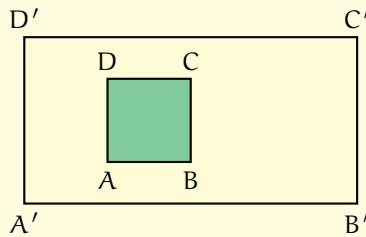
- b. stabilisci di quanto aumenta il perimetro del primo poligono;
- c. stabilisci di quanto aumenta l'area del primo poligono.

[Perimetro = $12x$, area = $6x^2$; $6x$; $6x^2$]

193 Esprimi l'area della figura seguente tramite un polinomio in forma normale nella variabile x . [$x^2 + 5x/2 + 1$]

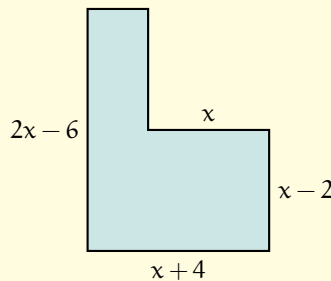


194 Nella figura seguente l'area del rettangolo $A'B'C'D'$ è $10a^2$, mentre la differenza tra l'area del rettangolo e quella del quadrato ABCD è $\frac{15}{4}a^2$.



Determina il perimetro del quadrato. [$10a$]

195 Sia $x > 3$. Esprimi l'area della figura seguente tramite un polinomio in forma normale nella variabile x . [$x^2 + 6x - 24$]



196 Siano $x > 0$ e $y > 0$. Considera i poligoni rappresentati nella figura seguente.

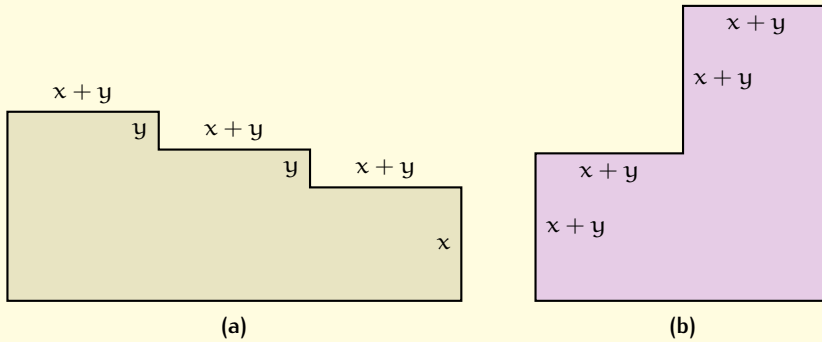


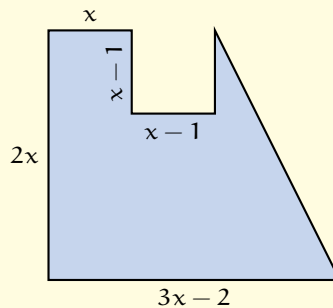
Figura 12

Esprimi i loro perimetri e le loro aree tramite polinomi in forma normale. Verifica che hanno perimetri diversi ma sono tra loro equivalenti.

[Perimetri: $8x + 10y$ e $8x + 8y$, aree: $= 3(x + y)^2$]

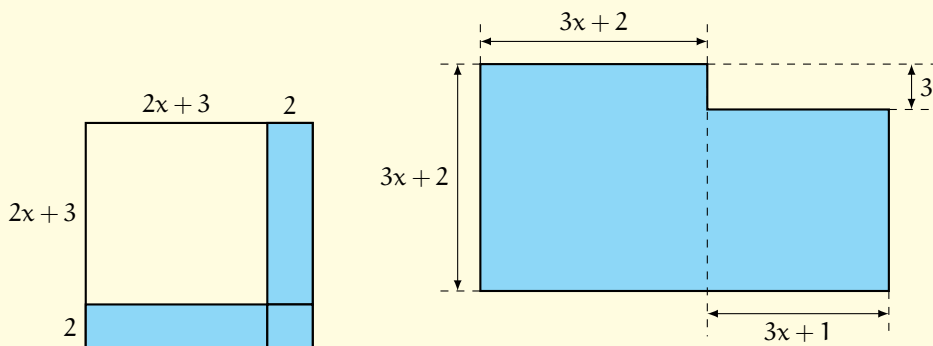
197 Sia $x > 1$. Esprimi l'area della figura seguente tramite un polinomio in forma normale nella variabile x .

[$4x^2 - x - 1$]



198 Esprimi le aree delle parti colorate nelle figure seguenti tramite polinomi in forma normale.

[$8x + 16$; $18x^2 + 12x + 3$]



199 Un campo di forma rettangolare (figura 13a) ha area di 250 m^2 e perimetro di 75 m . L'agricoltore proprietario del campo compra una striscia di terreno di 2 m di larghezza, che circonda tutto il contorno del campo. Qual è l'area del campo così ampliato? $[316 \text{ m}^2]$

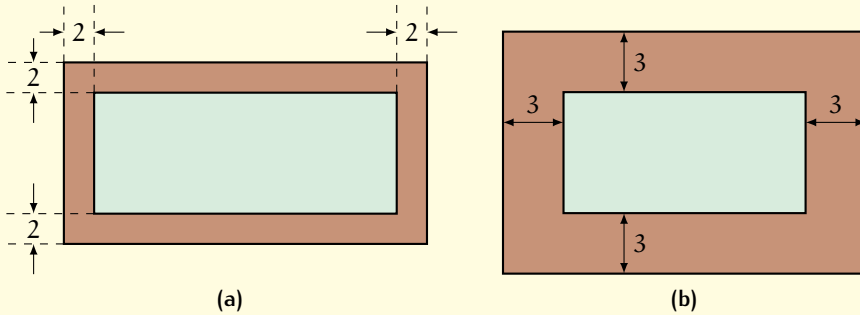


Figura 13

200 Un campo di forma rettangolare (figura 13b) ha perimetro uguale a 100 m . L'agricoltore proprietario del campo compra una striscia di terreno di 3 m di larghezza, che circonda tutto il contorno del campo. Di quanto aumenta l'area del campo? $[636 \text{ m}^2]$

201 In un triangolo isoscele la base misura $\frac{2}{3}a$ e i lati obliqui $\frac{5}{2}a$.

a. Determina il perimetro del triangolo.

b. Stabilisci di quanto aumenta il perimetro se la base aumenta di $\frac{1}{3}a$ e ciascun lato obliquo aumenta di $\frac{1}{2}a$.

$$\left[\frac{17}{3}a; \frac{4}{3}a \right]$$

202 I lati di un triangolo ABC misurano $3a$, $4a$ e $6a$. Considera il triangolo $A'B'C'$ che si ottiene aumentando i lati del triangolo originario, rispettivamente, di $\frac{1}{2}a$, $\frac{2}{3}a$, $\frac{4}{3}a$. Qual è la misura del lato del quadrato che ha lo stesso perimetro del triangolo $A'B'C'$? $\left[\frac{31}{8}a \right]$

203 Un rettangolo ha base e altezza che misurano rispettivamente $2a$ e $3b$.

a. Esprimi in funzione di a e di b il perimetro e l'area del rettangolo e stabilisci se le espressioni ottenute sono monomi.

b. Se la base aumenta di a e l'altezza diminuisce di b , l'area del rettangolo aumenta, diminuisce o resta invariata?

c. Se la base aumenta di $2a$ e l'altezza diminuisce di $2b$, l'area del rettangolo aumenta, diminuisce o resta invariata?

$$[\text{Perimetro} = 4a + 6b, \text{Area} = 6ab; \text{resta invariata}; \text{diminuisce}]$$

204 Siano $a > 0$ e $b > 0$. Un quadrato ha area uguale a a^6b^2 . Determina:

- il perimetro del quadrato;
- il volume del cubo il cui spigolo ha misura uguale a quella del lato del quadrato.

$$[4a^3b; a^9b^3]$$

205 Siano $a > 0$ e $b > 0$. Due quadrati hanno aree espresse rispettivamente dai monomi $9a^6b^8$ e $81a^4b^2$. Determina il rapporto tra i loro perimetri.

$$\left[\frac{1}{3}ab^3\right]$$

206 Un triangolo rettangolo ha i cateti che misurano $3a$ e $4a$. Un altro triangolo rettangolo ha i cateti che misurano il triplo dei corrispondenti cateti del primo triangolo. Calcola:

- la differenza tra l'area del secondo triangolo e quella del primo;
- la differenza tra il perimetro del secondo triangolo e quello del primo (*suggerimento*: ricorda il teorema di Pitagora).

$$[48a^2; 24a]$$

207 Luisa ha x anni; Anna ha 10 anni meno di Luisa e Maria ha il doppio degli anni che Anna aveva 2 anni fa. Qual è la somma delle età (attuali) delle tre amiche? $[4x - 34]$

208 Considera un rombo le cui diagonali misurano $8a$ e $6a$. Stabilisci se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- | | |
|---|---|
| <p>a. Raddoppiando entrambe le diagonali, l'area raddoppia. <input type="checkbox"/> V <input type="checkbox"/> F</p> <p>b. Raddoppiando entrambe le diagonali, il perimetro raddoppia. <input type="checkbox"/> V <input type="checkbox"/> F</p> <p>c. Raddoppiando la misura della diagonale minore e dimezzando quella della diagonale maggiore, l'area resta invariata. <input type="checkbox"/> V <input type="checkbox"/> F</p> | <p>d. Aumentando di $2a$ la misura della diagonale maggiore e diminuendo di $2a$ la misura della diagonale minore, l'area resta invariata. <input type="checkbox"/> V <input type="checkbox"/> F</p> <p>e. Aumentando di $2a$ la misura della diagonale minore e diminuendo di $2a$ la misura della diagonale maggiore, l'area resta invariata. <input type="checkbox"/> V <input type="checkbox"/> F</p> |
|---|---|

[3 affermazioni vere e 2 false]

209 Paolo possiede il triplo dei libri che possiede Anna, che a sua volta ne possiede la metà di quelli posseduti da Barbara e Monica insieme.

- Indicati con x e y , rispettivamente, i libri posseduti da Barbara e Monica, determina l'espressione che esprime i libri posseduti complessivamente dai quattro amici. Si tratta di un monomio?
- Supponendo ulteriormente che Monica possieda il doppio dei libri di Barbara e indicando con x il numero dei libri di Barbara, determina l'espressione che esprime i libri posseduti complessivamente dai quattro amici. Si tratta di un monomio?

$$[3x + 3y; 9x]$$

210 Marco ha in tasca il doppio della cifra di Paolo, che possiede 3 euro in meno di quanto possiede Luigi. Esprimi la somma che possiedono complessivamente i tre amici, in funzione di quanto possiede Luigi. [Se Luigi ha x euro, i tre amici hanno $4x - 9$ euro]

211 Andrea compra in una cartoleria x penne, ciascuna al prezzo di p euro. Dopo un mese il prezzo di ciascuna penna diminuisce di $1/3$ del prezzo originario. Andrea allora approfitta dello sconto e compra un numero di penne uguale al triplo di quante ne aveva comprate il mese precedente. Spende meno, di più o la stessa cifra del mese precedente? [Di più, precisamente il doppio del mese precedente]

212 I $2/3$ dei ragazzi e i $3/4$ delle ragazze hanno superato un esame. Sapendo che i ragazzi iscritti all'esame sono il triplo delle ragazze, abbiamo informazioni sufficienti per calcolare la percentuale del gruppo che ha superato l'esame? [68,75%]

213 Il prezzo di un capo di abbigliamento viene prima scontato del 10% e poi ribassato ancora del 10%. Alla fine, di quanto risulta scontato il prezzo rispetto al prezzo originario? [19%]

Svolgi le seguenti espressioni tra monomi.

214 $[(5x^3)(-3x^2) + 20x^5]^2 : (-5x^4)^2$ [x^2]

215 $[(-6a^2)(-3a^4) + (-2a^2)^3] : (-5a)$ [$-2a^5$]

216 $\{[(-x^2)^4 : (-x^3)^2]^4 \cdot (-8x^2)^2\} : (-16x^{10})$ [$-4x^2$]

217 $[(-6t^4 - 4t^4) : (-5t^2)]^3 : (-2t^2)^3$ [-1]

218 $[4a^5]^3 : (16a^{12}) + (-12a^6) : (-3a^3)]^2$ [$64a^6$]

219 $[(-3t^3)(2t) - (-2t^2)(-2t^2)]^3 : (-t^4)$ [$-8t^8$]

220 $(-3a^2b^3)^2 + (-2a^2)^2(-7b^6)$ [$-19a^4b^6$]

221 $[(-2x^3y^2)(-4x^2y^2) - (-3x^5y^2)(-2y^2)]^3$ [$8x^{15}y^{12}$]

222 $\left(-\frac{2}{3}xy\right)^3 : \left(-\frac{4}{9}xy^2\right) + \left(-\frac{1}{2}xy\right)^2 : (-2y)$ [$\frac{13}{24}x^2y$]

223 $[(-8a^4b^2)^2 : (4a)^2 : b + (-2a^2b)^3]^3 : (2a^2b)^3$ [$-8a^{12}b^6$]

224 $[(-2x)(-3x^4)]^2 : [-6(x^2)^3] - (-4x^2)^2$ [$-22x^4$]

225 $[(-2ab)^2] : (-8a^2) + (-4a^6b^7) : (2a^6b^5) + \frac{3}{2}b^2$ [0]

226 $(-3x^5)^2 - [(2x^3)^4 : (-8x^4) : x^3 + 3(-x)^5]^2$ [$-16x^{10}$]

227 $(-2a)^2 - (-3b)^2 + \left(\frac{1}{4}a^3b\right)^2 : \left(-\frac{1}{2}a^4b^2\right) + \frac{1}{8}a^2$ [$4a^2 - 9b^2$]

228 $[(-3a^2)^2 - (-2a)(-3a^3)]^3$ [$27a^{12}$]

229 $[(-2x^3)^2 - (-2x)^2(3x^4)] : (-2x^3)$ [$4x^3$]

230 $[(-2a)^2]^3 : (8a^4) + [(-2a^2)^2(+5a)] : (2a^3)$ [$2a^2$]

231 $[(2a^3)^4 : (-8a^7) + 3(-a)^5]^2 - (-2a^5)^2$ [$21a^{10}$]

232 $(-2u^3v) : (-4uv) + (-4u^5v^6) : (2u^5v^4) + 2,5u^2$ [$3u^2 - 2v^2$]

- 233 $\left[\left(-\frac{3}{2}a^6 \right) : \left(-\frac{9}{4}a^4 \right) + \left(-\frac{1}{9} \right) \cdot (-3a)^2 \right]^3 + (-2a^3)^2$ $[5a^6]$
- 234 $[(-100m^7) : (-10m^3) : (-2m^2)]^2 - (-m) \cdot (-3m)^3$ $[-2m^4]$
- 235 $\left[\left(-\frac{1}{2}x^2yz^3 \right)^3 : \left(-\frac{1}{2}x^2yz^4 \right)^2 \right] : (-yz) + (5x^8) : (2x^6)$ $[3x^2]$
- 236 $\left(-\frac{1}{2}x^2y \right) : \left(-\frac{1}{8}y \right) + [(-2x)^2 \cdot (-3x)^3] : (-6x^3)$ $[22x^2]$
- 237 $\left[\left(\frac{1}{2}a + \frac{2}{3}a \right)^2 : \left(\frac{1}{3}a - \frac{3}{2}a \right) \right]^2 : \left(\frac{2}{3}a + \frac{1}{2}a \right)$ $\left[\frac{7}{6}a \right]$
- 238 $\left[\left(-\frac{3}{2}x^3y \right)^5 \left(-\frac{2}{3}xy^3 \right)^4 + \frac{1}{2}(x^7y^6)^3 : \left(-\frac{1}{2}x^2y \right) \right] : (-x^4y^3)^4$ $\left[-\frac{5}{2}x^3y^5 \right]$
- 239 $\left(-\frac{3}{4}a^2b^3 + 0,2a^2b^3 \right) : \left(-\frac{11}{5}a^2b \right) + [(-2b)^3(3b^4)] : (32b^5)$ $\left[-\frac{1}{2}b^2 \right]$
- 240 $(-2a)^2 - 3a(-2a) + 4b(-b)^2 + (-2b)^3 + (-24b^5) : (-2b^2)$ $[10a^2 + 8b^3]$
- 241 $\left\{ \left[\frac{3}{2}x^2y^3z^4 : \left(-\frac{3}{4}xy^2z^2 \right) \right]^2 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right)^3 xy^2z \right\} : (x^3y^4z)$ $\left[-\frac{1}{2}z^4 \right]$
- 242 $(-2ab)^3 \cdot (-a)^2 - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}a^3(-a^2b^3) - (a^6b^6) : (ab^3)$ $[-9a^5b^3]$

5

EQUAZIONI LINEARI

5.1 PRINCIPI E DEFINIZIONI

Uguaglianze ed equazioni

Analizziamo le proposizioni:

- «3 è la somma di 1 e 2»
- «2 più 2 fa 5»
- «il doppio di un numero è 4»
- «la somma di due numeri è 3»

Esse si possono tradurre in linguaggio matematico nel modo seguente:

- $3 = 1 + 2$
- $2 + 2 = 5$
- $2x = 4$
- $x + y = 3$

Le formule che contengono solo numeri (come le prime due) si dicono *uguaglianze*, mentre quelle che contengono numeri e variabili (come le ultime due) si dicono *equazioni*.

Definizione 34. Chiamiamo *uguaglianza* una formula contenente solo numeri e il simbolo = (“uguale”). Chiamiamo *equazione* una formula contenente numeri, variabili e il simbolo =.

Un’uguaglianza è o vera o falsa: per esempio, l’uguaglianza $3 = 1 + 2$ è vera, mentre $2 + 2 = 5$ è falsa.

Un’equazione, invece, in generale è vera per certi valori sostituiti alla variabile (o alle variabili) e falsa per altri. Per esempio, l’equazione $2x = 4$ è vera se $x = 2$, ma falsa se $x = 1$. Ancora, l’equazione $x + y = 3$ è vera se $x = 1$ e $y = 2$, ma falsa se $x = y = 2$.

Definizione 35. L’insieme dei valori che sostituiti alle variabili trasformano l’equazione in un’uguaglianza vera è l’*insieme soluzione* dell’equazione (lo indicheremo con \mathcal{S}). *Risolvere un’equazione* significa trovarne l’insieme soluzione.

Definizione 36. Le variabili che compaiono nell’equazione si chiamano *incognite*, e le due espressioni che compaiono a sinistra e a destra del simbolo

di uguaglianza si chiamano rispettivamente *primo membro* e *secondo membro*.

Principi di equivalenza

Vediamo come risolvere un'equazione, ovvero come trovarne l'insieme soluzione.

Definizione 37. Due equazioni sono *equivalenti* se hanno le stesse soluzioni.

Principio 1 (Primo principio di equivalenza). Sommando o sottraendo a ciascuno dei due membri di un'equazione uno stesso numero, si ottiene un'equazione equivalente a quella data.

Questo principio ci permette in pratica di “spostare” un addendo da un membro all'altro dell'equazione cambiandogli segno, o di eliminare da entrambi i membri gli addendi uguali.

Principio 2 (Secondo principio di equivalenza). Moltiplicando o dividendo ciascuno dei due membri di un'equazione per uno stesso numero *diverso da zero*, si ottiene un'equazione equivalente a quella data.

Nel paragrafo successivo vedremo come risolvere un'equazione applicando i due principi di equivalenza.

5.2 RISOLUZIONE DELLE EQUAZIONI LINEARI

Definizione 38. Un'equazione si dice *intera* se, dopo aver eventualmente applicato i principi di equivalenza, è riconducibile alla forma $P(x) = 0$, dove $P(x)$ è un polinomio. Si dice *grado* dell'equazione il grado di $P(x)$. Un'equazione di primo grado si dice *lineare*.

Per esempio:

- $2x - 4 = 0$ è un'equazione lineare
- $x^2 - 5x + 6 = 0$ è un'equazione di secondo grado
- $x^3 - 4x = 0$ è un'equazione di terzo grado

Definizione 39. Un'equazione si dice *determinata* se ha un numero finito di soluzioni, *indeterminata* se ne ha infinite, *impossibile* se non ne ha.

Per esempio, si dimostra che:

- $2x - 4 = 0$ è determinata
- $2x + 2 = 2(x + 1)$ è indeterminata
- $x^2 + 1 = 0$ è impossibile

In questo paragrafo studieremo le equazioni lineari i cui coefficienti sono numeri razionali. Per risolvere un'equazione di questo tipo si procede come segue:

- si portano i termini con l'incognita al primo membro e i termini noti al secondo
- si sommano i monomi simili
- si dividono entrambi i membri per il coefficiente dell'incognita
- si semplificano le frazioni e si scrive l'insieme soluzione

Esercizio 52. Risolvi l'equazione $5x - 2 = 3x + 4$.

Soluzione.

- Portiamo a sinistra i termini con l'incognita e a destra i termini noti, cambiando il segno quando passiamo da un membro all'altro:

$$5x - 3x = 2 + 4$$

- Sommiamo i monomi simili:

$$2x = 6$$

- Dividiamo entrambi i membri per il coefficiente della x , applicando il secondo principio delle equazioni. È fondamentale osservare che tale coefficiente è 2, che è un numero *diverso da zero*.

$$\frac{2x}{2} = \frac{6}{2}$$

- Semplifichiamo:

$$\frac{2x}{2} = \frac{6}{2} \implies x = 3$$

- Quindi l'equazione è determinata e l'insieme soluzione è:

$$S = \{3\}$$

□

Esercizio 53. Risolvi l'equazione $5x - 2 = 5x + 4$.

Soluzione.

- Portiamo a sinistra i termini con l'incognita e a destra i termini noti, cambiando il segno quando passiamo da un membro all'altro:

$$5x - 5x = 2 + 4$$

- Sommiamo i monomi simili:

$$0x = 6$$

- Il coefficiente dell'incognita è 0: non possiamo applicare il secondo principio e dividere entrambi i membri per zero. D'altra parte non c'è alcun numero che moltiplicato per zero dia come prodotto 6. Quindi l'equazione è impossibile:

$$S = \emptyset \quad \square$$

Esercizio 54. Risolvi l'equazione $5x - 2 = 5x - 2$.

Soluzione.

- Portiamo a sinistra i termini con l'incognita e a destra i termini noti, cambiando il segno quando passiamo da un membro all'altro:

$$5x - 5x = 2 - 2$$

- Sommiamo i monomi simili:

$$0x = 0$$

- Il coefficiente dell'incognita è 0: non possiamo applicare il secondo principio e dividere entrambi i membri per zero. D'altra parte, qualunque numero moltiplicato per zero dà come prodotto zero. Quindi l'equazione è indeterminata:

$$S = \mathbb{R} \quad \square$$

Esercizio 55. Risolvi l'equazione $4(2x - 1) + 5 = 1 - 2(-3x - 6)$.

Soluzione.

- Eseguiamo i prodotti:

$$8x - 4 + 5 = 1 + 6x + 12$$

- Portiamo a sinistra i termini con l'incognita e a destra i termini noti:

$$8x - 6x = 1 + 12 + 4 - 5 \implies 2x = 12 \implies \frac{2}{2}x = \frac{12}{2} \implies x = 6$$

- Quindi l'equazione è determinata e l'insieme soluzione è

$$S = \{6\} \quad \square$$

Esercizio 56. Risolvi l'equazione $\frac{1}{2}(x+5) - x = \frac{1}{2}(3-x)$.

Soluzione. Sommiamo le frazioni. Il mcm dei denominatori è 2:

$$\frac{x+5-2x}{2} = \frac{3-x}{2}$$

Moltiplichiamo entrambi i membri per 2:

$$\frac{x+5-2x}{2} = \frac{3-x}{2} \implies x+5-2x = 3-x$$

Portiamo a sinistra i termini con l'incognita e a destra i termini noti:

$$x - 2x + x = 3 - 5 \implies 0 = -2$$

Come si vede, l'incognita x è scomparsa, e l'equazione si riduce a un'uguaglianza falsa. Quindi l'equazione è impossibile e

$$S = \emptyset \quad \square$$

Esercizio 57. Risolvi l'equazione $(x+2)^2 - 4(x+1) = x^2$.

Soluzione. Svolgiamo i calcoli:

$$x^2 + 4x + 4 - 4x - 4 = x^2 \implies 0 \cdot x = 0 \implies 0 = 0$$

che è vera. Dunque l'equazione è indeterminata e

$$S = \mathbb{R} \quad \square$$

Esercizio 58. Risolvi l'equazione $(x-1)^2 + 5x = x^2 - 2$.

Soluzione. Svolgiamo i calcoli:

$$x^2 - 2x + 1 + 5x = x^2 - 2 \implies -2x + 5x = -2 - 1 \implies 3x = -3 \implies x = -1$$

Quindi l'equazione è determinata e

$$S = \{-1\} \quad \square$$

Esercizio 59. Risolvi l'equazione $\frac{2x-3}{2} = 1 - \frac{x+3}{10}$.

Soluzione. Il mcm dei denominatori è 10. Quindi:

$$\frac{5(2x-3)}{10} = \frac{10 - (x+3)}{10}$$

Moltiplichiamo entrambi i membri per 10 e svolgiamo i calcoli:

$$5(2x-3) = 10 - (x+3) \implies 10x - 15 = 10 - x - 3 \implies 11x = 22 \implies x = 2$$

Quindi l'equazione è determinata e

$$S = \{2\} \quad \square$$

Esercizio 60. Risolvi l'equazione $6x + 1 = 34x - 27$.

Soluzione. Portiamo a sinistra i termini con l'incognita e a destra i termini noti:

$$6x - 34x = -27 - 1 \implies -28x = -28 \implies x = 1$$

Quindi l'equazione è determinata e

$$S = \{1\} \quad \square$$

Nell'esercizio precedente avremmo potuto ricavare, portando le x a destra e i termini noti a sinistra:

$$1 + 27 = 34x - 6x \implies 28 = 28x$$

Leggendo la relazione da destra a sinistra:

$$28x = 28 \implies x = 1$$

che coincide con il risultato precedente. In generale, si può isolare l'incognita in modo che il suo coefficiente risulti positivo, portandola nel membro più opportuno.

Esercizio 61. Risolvi l'equazione $\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right) = \frac{x+3}{6}$.

Soluzione. Svolgiamo i calcoli:

$$\frac{1}{2}x - \frac{1}{6} - \frac{1}{3}x + \frac{1}{6} = \frac{x+3}{6}$$

Il mcm dei denominatori è 6. Quindi:

$$\frac{3x - 1 - 2x + 1}{6} = \frac{x+3}{6} \implies 3x - 1 - 2x + 1 = x + 3 \implies 0 = 3$$

che è un'uguaglianza falsa. Quindi l'equazione è impossibile e

$$S = \emptyset \quad \square$$

Esercizio 62. Risolvi $\frac{4}{5} - \frac{x}{2} = \frac{2-5x}{10}$.

Soluzione. Sommiamo le frazioni. Il mcm dei denominatori è 10. Quindi:

$$\frac{8-5x}{10} = \frac{2-5x}{10}$$

Moltiplichiamo entrambi i membri per 10:

$$8-5x = 2-5x \implies 5x-5x = 2-8 \implies 0 = -6$$

che è un'uguaglianza falsa. Quindi l'equazione è impossibile e

$$\mathcal{S} = \emptyset$$

□

Esercizio 63. Risolvi $\frac{x}{6} - \frac{2x}{3} = -\frac{x}{2}$.

Soluzione. Sommiamo le frazioni. Il mcm dei denominatori è 6. Quindi:

$$\frac{x-4x}{6} = \frac{-3x}{6}$$

Moltiplichiamo entrambi i membri per 6:

$$x-4x = -3x \implies x-4x+3x = 0 \implies 0 = 0$$

che è un'uguaglianza vera. Quindi l'equazione è indeterminata e

$$\mathcal{S} = \mathbb{R}$$

□

5.3 PROBLEMI LINEARI IN UN'INCOGNITA

I problemi che si presentano nel corso degli studi o del lavoro sono di diverso tipo. La matematica ci aiuta a risolverli quando si possono formalizzare tramite opportune relazioni. In questo paragrafo analizzeremo problemi algebrici e geometrici, formalizzabili con un'equazione lineare in una sola incognita. Per risolvere un problema di questo genere si procede come segue:

- si individuano i dati e l'obiettivo del problema
- si stabilisce l'incognita e si determina l'insieme in cui si ricerca il suo valore
- si traducono in forma matematica le relazioni che intercorrono tra i dati e l'incognita, individuando l'equazione che risolve il problema
- si risolve l'equazione trovata
- si confronta la soluzione trovata con le condizioni poste su di essa

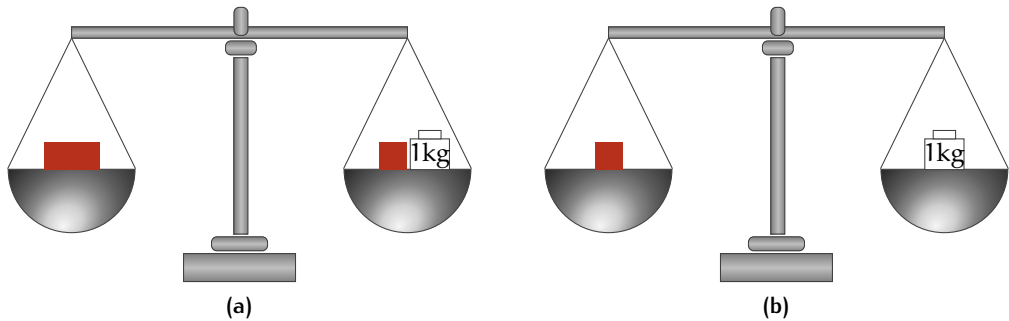


Figura 14: Un mattone pesa un chilo più mezzo mattone. Quanto pesa un mattone?

Esercizio 64. Un mattone pesa un chilo più mezzo mattone. Quanto pesa un mattone?

Soluzione. La figura 14a descrive la situazione. Se togliamo da ogni piatto della bilancia mezzo mattone, la bilancia è ancora in equilibrio (figura 14b); da ciò possiamo dedurre che mezzo mattone pesa un chilo. Il mattone intero pesa dunque due chili.

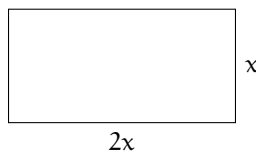
Risolviamo ora il problema formalizzandolo attraverso un'equazione lineare. L'incognita del problema è il peso in kg del mattone, che indichiamo con x . Il valore di x è un numero positivo. L'equazione che risolve il problema è la traduzione matematica dell'unica relazione contenuta nel testo del problema:

$$x = 1 + \frac{1}{2}x \quad \Rightarrow \quad x - \frac{1}{2}x = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}x = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 2$$

Il mattone pesa 2 kg. La soluzione è accettabile; il problema è determinato. \square

Esercizio 65. In un rettangolo il perimetro è 120 cm e la base è il doppio dell'altezza; determina l'area.

Soluzione. Poiché la base è il doppio dell'altezza, se indichiamo con x l'altezza in cm la base sarà $2x$.



Traduciamo matematicamente il fatto che il perimetro è 120 cm.

$$2(2x + x) = 120 \quad \Rightarrow \quad 6x = 120 \quad \Rightarrow \quad x = 20$$

quindi

$$\text{altezza} = 20 \text{ cm} \quad \text{base} = 40 \text{ cm}$$

Ora possiamo trovare l'area:

$$\text{area} = \text{base} \cdot \text{altezza} = 40 \text{ cm} \cdot 20 \text{ cm} = 800 \text{ cm}^2 \quad \square$$

Quando il matematico Carl Friedrich Gauss aveva nove anni, un giorno a scuola il maestro, per impegnare una classe di ragazzi molto vivaci, diede loro il compito di sommare tutti i numeri naturali da uno a cento, sperando di poter stare in pace per una mezz'oretta, ma dopo un solo minuto il piccolo genio arrivò con la risposta esatta (5050). Evidentemente non aveva avuto il tempo di fare tutte le somme. Come aveva fatto? Seguiamo il ragionamento del "piccolo Gauss".

Esercizio 66. Calcola la somma $1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100$.

Soluzione. Per risolvere il problema, posto

$$x = 1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100$$

disponiamo i numeri nell'ordine inverso e osserviamo che il valore della somma non cambia:

$$x = 100 + 99 + 98 + \dots + 3 + 2 + 1$$

Incolonniamo le due sequenze e sommiamole termine a termine:

$$\begin{array}{r} x = 1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100 \\ x = 100 + 99 + 98 + \dots + 3 + 2 + 1 \\ \hline 2x = \underbrace{101 + 101 + 101 + \dots + 101 + 101 + 101}_{100 \text{ volte}} \end{array}$$

Ogni coppia di numeri incolonnati ha come somma 101. Ci sono esattamente cento coppie di numeri incolonnati che hanno come somma 101. Per trovare la somma di tutti i numeri basta allora moltiplicare la somma di ogni coppia (101) per il numero delle coppie (100):

$$x + x = 101 \cdot 100 \quad \implies \quad 2x = 10\,100 \quad \implies \quad x = \frac{10\,100}{2} = 5050 \quad \square$$

5.4 ESERCIZI

Chi non risolve esercizi non impara la matematica.

Risolvi le seguenti equazioni lineari.

- | | | | | | | | | |
|----|---------------|------|----|--------------------|---------------|----|--------------------|------|
| 1 | $x + 2 = 7$ | [5] | 15 | $-7 = x$ | [-7] | 29 | $6x - 12 = 24$ | [6] |
| 2 | $2 + x = 3$ | [1] | 16 | $1 + x = 0$ | [-1] | 30 | $5 - x = 1$ | [4] |
| 3 | $16 + x = 26$ | [10] | 17 | $1 - x = 0$ | [1] | 31 | $7x - 2 = 5$ | [1] |
| 4 | $x - 1 = 1$ | [2] | 18 | $0 = 2 - x$ | [2] | 32 | $2x + 8 = 8 - x$ | [0] |
| 5 | $3 + x = -5$ | [-8] | 19 | $3x - 1 = 2x - 3$ | [-2] | 33 | $x + 2 = 0$ | [-2] |
| 6 | $12 + x = 22$ | [10] | 20 | $7x + 1 = 6x + 2$ | [1] | 34 | $4x - 4 = 0$ | [1] |
| 7 | $3x = 2x - 1$ | [-1] | 21 | $-1 - 5x = 3 - 6x$ | [4] | 35 | $2x + 3 = x + 3$ | [0] |
| 8 | $8x = 7x + 4$ | [4] | 22 | $2x = 8$ | [4] | 36 | $3x = 12 - x$ | [3] |
| 9 | $2x = x - 1$ | [-1] | 23 | $6x = 24$ | [4] | 37 | $4x - 8 = 3x$ | [8] |
| 10 | $5x = 4x + 2$ | [2] | 24 | $0x = 1$ | [impossibile] | 38 | $-x - 2 = -2x - 3$ | [-1] |
| 11 | $3x = 2x - 3$ | [-3] | 25 | $2x = -2$ | [-1] | 39 | $-3(x - 2) = 3$ | [1] |
| 12 | $3x = 2x - 2$ | [-2] | 26 | $3x = 6$ | [2] | 40 | $3(x - 2) = 0$ | [2] |
| 13 | $7 + x = 0$ | [-7] | 27 | $2x + 1 = 7$ | [3] | 41 | $3(x - 2) = 3$ | [3] |
| 14 | $7 = -x$ | [-7] | 28 | $3 - 2x = 3$ | [0] | | | |

Risolvi le seguenti equazioni lineari.

- | | | | | | |
|----|-------------------------|-----------------|----|--|-----------------------------|
| 42 | $6x + 24 = 3x + 12$ | [-4] | 54 | $x = x + 1$ | [impossibile] |
| 43 | $3 - 2x = 7 + 2x$ | [-1] | 55 | $3(x - 1) + 2(x - 2) + 1 = 2x$ | [2] |
| 44 | $x - 2x + 1 = x + 1$ | [0] | 56 | $x - 5(1 - x) = 5 + 5x$ | [10] |
| 45 | $(x + 2)^2 = (x - 2)^2$ | [0] | 57 | $3(2 + x) = 5(1 + x) - 3(2 - x)$ | [7/5] |
| 46 | $(x + 1)^2 = x^2 - 1$ | [-1] | 58 | $4(x - 2) - 3(x + 2) = 2(x - 1)$ | [-12] |
| 47 | $-5x + 2 = -6x + 6$ | [4] | 59 | $(x - 1)^2 - (x + 3)^2 = x + 1$ | [-1] |
| 48 | $-2 + 5x = 8 + 4x$ | [10] | 60 | $2(x + 3) = 2x + 5$ | [impossibile] |
| 49 | $7x - 2x - 2 = 4x - 1$ | [1] | 61 | $2(x + 4) = 2x + 8$ | [indeterminata] |
| 50 | $-3x + 12 = 3x + 18$ | [-1] | 62 | $\frac{2x + 1}{2} = x + 1$ | [impossibile] |
| 51 | $0(x - 1) = 1$ | [impossibile] | 63 | $\frac{3(x - 1)}{4} = \frac{3(x + 1)}{5} - \frac{1}{10}$ | $\left[\frac{25}{3}\right]$ |
| 52 | $0x = 0$ | [indeterminata] | | | |
| 53 | $-2 - 3x = -2x - 4$ | [2] | | | |

$$64 \quad \frac{x+2}{2} = \frac{x+1}{2}$$

[impossibile]

$$65 \quad \frac{x}{2} + \frac{1}{4} = 3x - \frac{1}{2}$$

 $\left[\frac{3}{10}\right]$

$$66 \quad \frac{x}{2} + \frac{1}{4} = \frac{x}{4} - \frac{1}{2}$$

[-3]

$$67 \quad \frac{x}{2} + \frac{1}{4} = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$$

[impossibile]

$$68 \quad \frac{x}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$$

 $\left[\frac{3}{4}\right]$

$$69 \quad \frac{x-4}{5} = \frac{2x+1}{3}$$

 $\left[-\frac{17}{7}\right]$

$$70 \quad \frac{x+1}{2} + \frac{x-1}{5} = \frac{1}{10}$$

 $\left[\frac{2}{-7}\right]$

$$71 \quad \frac{x}{3} - \frac{1}{2} = \frac{x}{4} - \frac{x}{6}$$

[2]

$$72 \quad 8x - \frac{x}{6} = 2x + 11$$

 $\left[\frac{66}{35}\right]$

$$73 \quad 3(x-1) - \frac{1}{7} = 4(x-2) + 1$$

 $\left[\frac{27}{7}\right]$

$$74 \quad \frac{2x+3}{5} = x-1$$

 $\left[\frac{8}{3}\right]$

$$75 \quad \frac{x}{2} - \frac{x}{6} - 1 = \frac{x}{3}$$

[impossibile]

$$76 \quad \frac{4-x}{5} + \frac{3-4x}{2} = 3$$

 $\left[-\frac{7}{22}\right]$

$$77 \quad \frac{x+3}{2} = 3x-2$$

 $\left[\frac{7}{5}\right]$

$$78 \quad \frac{3}{2}(x+1) - \frac{1}{3}(1-x) = x+2$$

[1]

$$79 \quad \frac{(x+1)^2}{4} - \frac{2+3x}{2} = \frac{(x-1)^2}{4}$$

[-2]

$$80 \quad \frac{3}{2}x + \frac{x}{4} = 5\left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}\right) - x$$

 $\left[\frac{30}{7}\right]$

$$81 \quad (x-2)(x+5) + \frac{1}{4} = x^2 - \frac{1}{2}$$

 $\left[\frac{37}{12}\right]$

$$82 \quad \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) = x^2 + \frac{1}{2}$$

 $\left[-\frac{1}{4}\right]$

$$83 \quad \frac{(1-x)^2}{2} - \frac{x^2-1}{2} = 1$$

[0]

$$84 \quad \frac{(x+1)^2}{3} = \frac{1}{3}(x^2-1)$$

[-1]

$$85 \quad \frac{2x-1}{3} - \frac{x-5}{6} = \frac{x-3}{4}$$

[-5]

$$86 \quad \frac{1}{5}x - 1 + \frac{2}{3}x - 2 = \frac{10}{15} + \frac{3}{5}x$$

 $\left[\frac{55}{4}\right]$

Risolvi le seguenti equazioni lineari.

$$87 \quad \frac{2x-1}{3} + \frac{x-5}{4} = \frac{x+1}{3} - 4$$

 $\left[-\frac{25}{7}\right]$

$$88 \quad 3(x-2) - 4(5-x) = 3x\left(1 - \frac{1}{3}\right)$$

 $\left[\frac{26}{5}\right]$

$$89 \quad 2(1-x) - (x+2) = 4x - 3(2-x)$$

[3/5]

$$90 \quad (2x-3)(5+x) + \frac{1}{4} = 2(x-1)^2 - \frac{1}{2}$$

 $\left[\frac{65}{44}\right]$

$$91 \quad 2 - \frac{1}{2}x + 3(x-2) = \frac{1}{4} + 3x - 1$$

 $\left[-\frac{13}{2}\right]$

$$92 \quad 2(x-5) - (1-x) = 3x$$

[impossibile]

$$93 \quad \frac{1}{2}(x+5) - x = \frac{1}{2}(3-x)$$

[impossibile]

$$94 \quad (x+3)^2 = (x-2)(x+2) + \frac{1}{3}x$$

 $\left[\frac{39}{17}\right]$

$$95 \quad 2\left(x - \frac{1}{3}\right) + x = 3x - 2$$

[impossibile]

$$96 \quad x - (2x+2) = 3x - (x+2) - 1$$

[1/3]

$$97 \quad -2(x+1) - 3(x-2) = 6x+2$$

[2/11]

- 198 $(x+1)^2 + 2x + 2(x-1) = (x+2)^2$ [5/2]
- 199 $-\frac{x-2}{4} + \frac{x-2}{3} + \frac{1}{3}(x-2) = \frac{x-1}{2} - \frac{1}{4}$ [-1]
- 200 $\frac{1}{3}x\left(\frac{1}{3}x-1\right) + \frac{5}{3}x\left(1+\frac{1}{3}x\right) = \frac{2}{3}x(x+3)$ [0]
- 201 $\frac{1}{2}\left(3x+\frac{1}{3}\right) - (1-x) + 2\left(\frac{1}{3}x-1\right) = -\frac{3}{2}x+1$ [$\frac{23}{28}$]
- 202 $3+2x - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}+1\right) - \frac{3}{4}x = \frac{3}{4}x + \frac{x+3}{2}$ [4]
- 203 $\frac{1}{2}\left[\frac{x+2}{2} - \left(x+\frac{1}{2}\right) + \frac{x+1}{2}\right] + \frac{1}{4}x = \frac{x-2}{4} - \left(x+\frac{2-x}{3}\right)$ [$-\frac{5}{2}$]
- 204 $2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 = (x+1)(3x-1) - 5x - \frac{1}{2}$ [$-\frac{9}{8}$]
- 205 $\frac{2(x-1)}{3} + \frac{x+1}{5} - \frac{3}{5} = \frac{x-1}{5} + \frac{7}{15}x$ [$\frac{13}{3}$]
- 206 $\frac{1}{2}(x-2) - \left(\frac{x+1}{2} - \frac{1+x}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{2-x}{6} + \frac{1+x}{3}$ [impossibile]
- 207 $-\left(\frac{1}{2}x+3\right) - \frac{1}{2}\left(x+\frac{5}{2}\right) + \frac{3}{4}(4x+1) = \frac{1}{2}(x-1)$ [2]
- 208 $\frac{(x+1)(x-1)}{9} - \frac{3x-3}{6} = \frac{(x-1)^2}{9} - \frac{2-2x}{6}$ [1]
- 209 $\frac{1}{2}\left(3x-\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3}(1+x)(-1+x) + 3\left(\frac{1}{3}x-1\right)^2 = \frac{2}{3}x$ [$\frac{19}{7}$]
- 210 $(x-3)(x-4) - \frac{1}{3}(1-3x)(2-x) = \frac{1}{3}x - 5\left(\frac{2x-9}{6}\right)$ [$\frac{23}{20}$]
- 211 $\frac{x+5}{3} + 3 + \frac{2(x-1)}{3} = x+4$ [indeterminata]
- 212 $2\left(\frac{1}{2}x-1\right)^2 - \frac{(x+2)(x-2)}{2} + 2x = x + \frac{1}{2}$ [$\frac{7}{2}$]
- 213 $\frac{x+2}{2} - \frac{x-3}{6} + \frac{3-x}{12} = \frac{10-x}{6} - \frac{5}{3} - x+1$ [$-\frac{9}{17}$]
- 214 $\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)x = \left(\frac{1}{2}x+1\right)^2$ [$-\frac{20}{3}$]
- 215 $\frac{3}{20} + \frac{6x+8}{10} - \frac{2x-1}{12} + \frac{2x-3}{6} = \frac{x-2}{4}$ [-2]
- 216 $\frac{2}{3}x + \frac{5x-1}{3} + \frac{(x-3)^2}{6} + \frac{1}{3}(x+2)(x-2) = \frac{1}{2}(x-1)^2$ [$\frac{2}{7}$]
- 217 $\frac{5}{12}x - 12 + \frac{x-6}{2} - \frac{x-24}{3} = \frac{x+4}{4} - \left(\frac{5}{6}x-6\right)$ [12]
- 218 $\frac{3}{2} = 2x - \left[\frac{x-1}{3} - \left(\frac{2x+1}{2} - 5x\right) - \frac{2-x}{3}\right]$ [0]

119 Indica la risposta corretta.

a. Una sola delle seguenti equazioni è impossibile. Quale?

A $x = x + 1$ B $x + 1 = 0$ C $x - 1 = 1$ D $x + 1 = 1$

b. Una sola delle seguenti equazioni è di primo grado nella sola incognita x . Quale?

A $x + y = 5$ B $x^2 + 1 = 45$ C $x + x^2 = 1$ D $x - \frac{7}{89} = +1$

c. Tra le seguenti una sola equazione *non* è equivalente alle altre. Quale?

A $\frac{1}{2}x - 1 = 3x$ B $6x = x - 2$ C $x - 2x = 3x$ D $3x = \frac{1}{2}(x - 2)$

d. Da $8x = 2$ si ottiene:

A $x = -6$ B $x = 4$ C $x = \frac{1}{4}$ D $x = -\frac{1}{4}$

e. Da $-9x = 0$ si ottiene:

A $x = 9$ B $x = -\frac{1}{9}$ C $x = 0$ D $x = \frac{1}{9}$

f. L'insieme soluzione dell'equazione $2(x + 1) = 5(x - 1) - 11$ è:

A $S = \{-6\}$ B $S = \{6\}$ C $S = \left\{ \frac{11}{3} \right\}$ D $S = \left\{ \frac{1}{6} \right\}$

[Una risposta A, una B, tre C e una D]

120 Vero o falso?

a. L'equazione $3x = 0$ è impossibile.

V F

b. L'equazione $3x = 1$ ha come soluzione il reciproco di 3.

V F

c. L'equazione $x - 5 = 0$ ha come soluzione l'opposto di 5.

V F

d. L'equazione $\frac{3}{4}x = 0$ ha come soluzione $x = \frac{4}{3}$.

V F

e. L'equazione $\frac{3}{4}x = \frac{5}{4}$ ha come soluzione $x = \frac{1}{2}$.

V F

f. L'equazione $7x = 5$ è impossibile in \mathbb{N} ma non in \mathbb{R} .

V F

g. L'equazione $x = -x$ è impossibile.

V F

h. L'equazione $x + 6 = x + 7$ è impossibile.

V F

i. L'equazione $(x - 1)^2 = (1 - x)^2$ è indeterminata.

V F

[4 affermazioni vere e 5 false]

Risolvi i seguenti problemi.

- 121** Se a un numero sommiamo il suo doppio, il suo triplo, il suo quintuplo e sottraiamo 21, otteniamo 100. Qual è il numero? [11]
- 122** Se a un numero sottraiamo 34 e sommiamo 75, otteniamo 200. Qual è il numero? [159]
- 123** Se alla terza parte di un numero sommiamo 45 e poi sottraiamo 15, otteniamo 45. Qual è il numero? [45]
- 124** Se a un numero intero sommiamo il doppio del suo successivo otteniamo 77. Qual è il numero? [25]
- 125** Se alla terza parte di un numero sommiamo la sua metà, otteniamo il numero diminuito di 2. Qual è il numero? [12]
- 126** Il doppio di un numero intero è la metà del suo successivo più 1. Qual è il numero? [1]
- 127** Un numero intero è uguale al suo successivo meno 1. Trova il numero. [indeterminato]
- 128** La somma tra un numero intero e il suo successivo è uguale al numero aumentato di 2. Trova il numero. [1]
- 129** La somma tra un numero intero e il suo successivo aumentato di 1 è uguale a 18. Qual è il numero? [8]
- 130** La somma tra un numero e lo stesso numero aumentato di 3 è uguale a 17. Qual è il numero? [7]
- 131** La terza parte di un numero aumentata di 3 è uguale a 27. Trova il numero. [72]
- 132** La somma tra la terza parte di un numero e la sua quarta parte è uguale alla metà del numero aumentata di 1. Trova il numero. [12]
- 133** Determina il numero intero la cui metà, aumentata di 20, è uguale al triplo del numero stesso diminuito di 95. [46]
- 134** Trova un numero intero tale che se calcoliamo la differenza tra il quadrato del numero stesso e il quadrato del precedente otteniamo 111. [56]
- 135** Qual è il numero che sommato alla sua metà è uguale a 27? [18]
- 136** Moltiplicando un numero per 9 e sommando il risultato alla quarta parte del numero si ottiene 74. Qual è il numero? [8]
- 137** Un triangolo isoscele ha il perimetro di 39. Determina le lunghezze dei lati del triangolo sapendo che la base è $\frac{3}{5}$ del lato. [9 cm, 15 cm, 15 cm]
- 138** Un triangolo isoscele ha il perimetro di 122 m, la base di 24 m. Quanto misura ciascuno dei due lati obliqui congruenti? [49]
- 139** In un triangolo ABC di perimetro 12 cm il lato AB è $\frac{4}{5}$ di AC e BC è $\frac{3}{5}$ di AC. Quanto misurano i lati del triangolo? [3 cm, 4 cm, 5 cm]
- 140** Un rettangolo ha il perimetro che misura 240 cm, la base è tripla dell'altezza. Calcola l'area del rettangolo. [2700 cm²]
- 141** In un triangolo isoscele la base è $\frac{8}{5}$ del lato ed il perimetro misura 108 cm. Applicando opportunamente il teorema di Pitagora, trova l'area del triangolo. [432 cm²]
- 142** In un rombo la differenza tra le due diagonali è di 2 cm. Sapendo che la diagonale maggiore è $\frac{4}{3}$ della minore, calcolare il perimetro del rombo. [20 cm]
- 143** Le due dimensioni di un rettangolo differiscono di 4 cm. Trovare la loro misura sapendo che aumentandole entrambe di 3 cm l'area del rettangolo aumenta di 69 cm². [8 cm, 12 cm]

6

STATISTICA

Avrai certamente sentito parlare, magari al telegiornale, di *statistiche* (per esempio sulla disoccupazione o sull'inflazione).

La *statistica* è una scienza nata per analizzare fenomeni d'importanza sociale che riguardano uno Stato. La statistica si applica ai *fenomeni collettivi*, cioè a quei fatti che abbracciano molti fenomeni individuali fra loro simili. Per esempio, il fatto che Luciana è alta 165 cm è un fenomeno individuale, mentre l'altezza dei compagni di classe di Luciana è un fenomeno collettivo. La statistica analizza i fenomeni collettivi e permette di fare previsioni sul loro andamento.

6.1 TABELLE DI FREQUENZA

Supponi di esaminare il fenomeno "altezza degli alunni della tua classe". La collettività a cui il fenomeno si riferisce (la tua classe, in questo caso) si chiama *popolazione*, mentre la caratteristica oggetto d'indagine (l'altezza) si dice *variabile statistica*.

Esercizio 67. La tabella 3 raccoglie le informazioni relative al fenomeno "altezza dei 20 alunni della tua classe". Interpreta e rappresenta i dati raccolti.

Tabella 3: Altezze degli alunni di una classe: dati grezzi

Nome	Altezza (cm)	Nome	Altezza (cm)
Luciana	165	Ettore	174
Giulio	168	Massimo	177
Mario	174	Cristian	165
Ernesto	177	Rossana	166
Giorgio	166	Elisabetta	158
Elena	168	Roberto	165
Vittorio	174	Walter	166
Marco	168	Nicoletta	186
Eleonora	165	Sara	165
Fabio	165	Nicola	168

Frequenze assolute

Analizziamo le informazioni. Innanzitutto conviene riscrivere i valori in ordine crescente (tabella 4).

Tabella 4: Altezze degli alunni di una classe: valori in ordine crescente

158	165	165	165	165	165	165	166	166	166
168	168	168	168	174	174	174	177	177	186

Poi realizziamo una tabella dove nella prima colonna scriviamo tutte le altezze registrate e nella seconda colonna il numero degli alunni che hanno quell'altezza (tabella 5).

Tabella 5: Altezze degli alunni: frequenze assolute

Altezza (cm)	158	165	166	168	174	177	186	Totale
Numero di alunni	1	6	3	4	3	2	1	20

La tabella 5 ci fornisce già un'immagine del fenomeno. I numeri riportati nella seconda riga (numero degli alunni) rappresentano la *frequenza assoluta* di ciascun valore (altezza), cioè il numero di volte con cui quel valore si presenta nell'indagine.

Frequenze relative

Può essere utile indicare per ciascun valore il rapporto tra la sua frequenza assoluta e il totale dei dati esaminati: si parla allora di *frequenza relativa* di un valore. Per ottenere la frequenza relativa di un valore si applica la seguente formula:

$$\text{frequenza relativa} = \frac{\text{frequenza assoluta}}{\text{totale dei dati}}$$

Frequenze percentuali

La *frequenza percentuale* di un valore è la sua frequenza relativa moltiplicata per 100. Per ottenere la frequenza percentuale di un valore si applica la seguente formula:

$$\text{frequenza percentuale} = \frac{\text{frequenza assoluta}}{\text{totale dei dati}} \cdot 100$$

Applicando le formule precedenti alla tabella 5 delle altezze degli alunni otteniamo la tabella 6.

Tabella 6: Altezze degli alunni: frequenze assolute, relative e percentuali

Altezza (cm)	Frequenza assoluta	Frequenza relativa	Frequenza percentuale
158	1	$1/20 = 0,05$	5
165	6	$6/20 = 0,30$	30
166	3	$3/20 = 0,15$	15
168	4	$4/20 = 0,20$	20
174	3	$3/20 = 0,15$	15
177	2	$2/20 = 0,10$	10
186	1	$1/20 = 0,05$	5
Totale	20	1	100

Raggruppamento per classi

Esercizio 68. Supponi di fare un'indagine sul fenomeno "peso dei 60 ragazzi iscritti a una scuola di calcio" e di raccogliere i valori nella tabella 7. Interpreta e rappresenta i dati raccolti.

Tabella 7: Peso in kg dei ragazzi iscritti a una scuola di calcio: valori grezzi

50	60	65	70	66	57	71	67	67	75
61	76	58	77	62	79	70	55	78	74
72	57	62	68	85	65	85	73	58	73
65	78	66	61	71	54	70	54	68	74
80	69	81	59	68	81	61	65	60	80
72	64	73	68	82	63	69	69	82	85

Calcolare le frequenze di questi valori sarebbe laborioso e poco significativo. In questi casi conviene raggruppare i valori in una tabella suddivisa per *classi*.

- Innanzitutto riscriviamo i valori in ordine crescente (tabella 8).

Tabella 8: Peso in kg dei ragazzi iscritti a una scuola di calcio: valori in ordine crescente

50	54	54	55	57	57	58	58	59	60
60	61	61	61	62	62	63	64	65	65
65	65	66	66	67	67	68	68	68	68
69	69	69	70	70	70	71	71	72	72
73	73	73	74	74	75	76	77	78	78
79	80	80	81	81	82	82	85	85	85

- Consideriamo l'intervallo numerico tra il valore più piccolo e quello più grande, cioè $50 \text{ kg} \div 85 \text{ kg}$; esso rappresenta il *campo di variazione* della variabile statistica considerata.
- Consideriamo gli estremi del campo di variazione ed eseguiamo la loro differenza, che vale $(85 - 50) \text{ kg} = 35 \text{ kg}$. Questa differenza è detta *ampiezza del campo di variazione*.
- Suddividiamo l'ampiezza in opportuni intervalli uguali, per esempio di ampiezza 5 kg, definendo le classi di peso riportate nella tabella 9.

Tabella 9: Classi di peso (in kg) dei ragazzi iscritti a una scuola di calcio

Classe	1	2	3	4	5	6	7	8
Intervallo	$50 \div 54$	$55 \div 59$	$60 \div 64$	$65 \div 69$	$70 \div 74$	$75 \div 79$	$80 \div 84$	$85 \div 89$

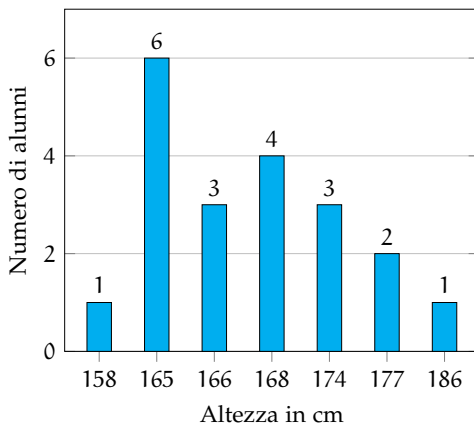
In queste otto classi sistemiamo la nostra popolazione: basta considerare i ragazzi appartenenti a ogni classe per avere la frequenza della classe (tabella 10).

Tabella 10: Peso in kg dei ragazzi iscritti a una scuola di calcio, suddivisi per classe

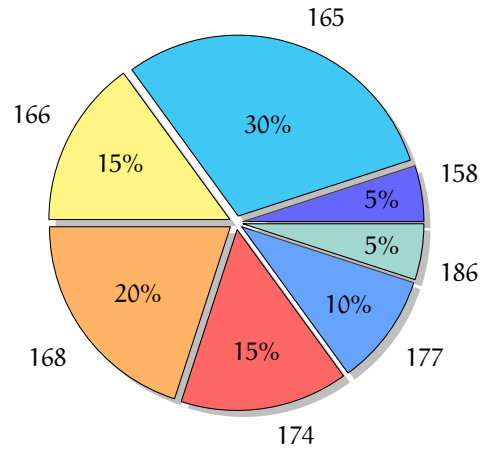
Classi di peso (kg)	Frequenza assoluta	Frequenza relativa	Frequenza percentuale
$50 \div 54$	3	0,05	5
$55 \div 59$	6	0,10	10
$60 \div 64$	9	0,15	15
$65 \div 69$	15	0,25	25
$70 \div 74$	12	0,20	20
$75 \div 79$	6	0,10	10
$80 \div 84$	6	0,10	10
$85 \div 89$	3	0,05	5
Totale	60	1	100

6.2 RAPPRESENTAZIONI GRAFICHE

I dati raccolti nelle tabelle precedenti si possono rappresentare graficamente. I grafici più usati sono gli *istogrammi* e i *diagrammi a torta*. La scelta del grafico dipende dal tipo di tabelle che abbiamo creato.



(a) Istogramma



(b) Diagramma a torta (altezza in cm)

Figura 15: Rappresentazioni grafiche del fenomeno “altezza degli alunni”

- Se si ha una tabella delle frequenze assolute, il grafico più opportuno è l'*istogramma*, che è una serie di barre verticali la cui altezza è proporzionale al valore della frequenza. La figura 15a, per esempio, rappresenta i valori della tabella 5.
- Se si ha una tabella delle frequenze relative o percentuali, il grafico più opportuno è il *diagramma a torta*, che dà un immediato messaggio visivo di come sono distribuiti i valori statistici. La figura 15b, per esempio, rappresenta i valori della tabella 6.

Una tabella per classi differisce da una tabella semplice solo per il fatto che si ha a che fare non con singoli valori ma con intervalli di valori. Una tabella per classi come la 10, per esempio, si può quindi rappresentare con un istogramma o con un diagramma a torta (figura 16).

6.3 MODA, MEDIA E MEDIANA

La moda, la media e la mediana di un'indagine statistica sono valori numerici usati per sintetizzare i dati e dare un'idea del loro ordine di grandezza.

Moda

La *moda* di un'indagine statistica è il valore che ha la frequenza maggiore. Per esempio, la moda dei valori 4, 4, 8, 9 e 10 è 4. Nel caso della tabella 5 la frequen-

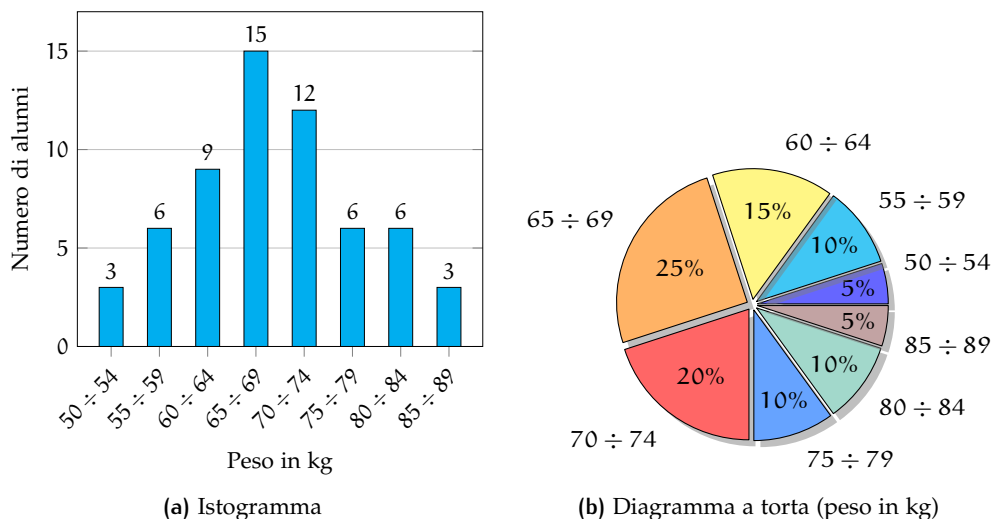


Figura 16: Rappresentazioni del fenomeno “peso dei ragazzi iscritti a una scuola di calcio”

za maggiore è 6, e corrisponde al numero di alunni alti 165 cm; quindi la moda è 165 cm.

Media

La *media* è la somma di tutti i valori, ciascuno sommato tante volte quante figura nei dati, divisa per il numero dei dati. Per esempio, la media dei valori 4, 4, 8, 9 e 10 è:

$$\text{media} = \frac{4 + 4 + 8 + 9 + 10}{5} = \frac{35}{5} = 7$$

In presenza di una tabella delle frequenze assolute, come la 5, la media si calcola più agevolmente sommando il prodotto di ciascun valore per la propria frequenza assoluta e dividendo il risultato per il numero dei dati.

$$\text{media} = \frac{158 \cdot 1 + 165 \cdot 6 + 166 \cdot 3 + 168 \cdot 4 + 174 \cdot 3 + 177 \cdot 2 + 186 \cdot 1}{20} \text{ cm} = 169 \text{ cm}$$

Mediana

La *mediana* di un insieme di valori *disposti in ordine crescente*, ciascuno preso tante volte quante figura nei dati, è il valore che occupa il posto centrale se i dati sono in numero dispari, oppure la media dei due valori centrali se i dati sono in numero pari. Per esempio, la mediana dei cinque valori 4, 4, 8, 9 e 10 è 8 (il termine centrale è il terzo, che ha due valori a sinistra e due valori a destra).

Per calcolare in modo semplice qual è o quali sono i termini centrali, basta dividere per 2 il numero totale dei dati. Nella tabella 4, per esempio, abbiamo una

serie di 20 valori. Poiché 20 è un numero pari, la mediana è la media dei due valori centrali. Poiché 20 diviso 2 fa 10, i termini centrali sono il decimo (che ha nove valori che lo precedono) e l'undicesimo (che ha nove valori che lo seguono). Questi valori sono rispettivamente 166 cm e 168 cm (tabella 11). Quindi la mediana è $(166 + 168)/2 \text{ cm} = 167 \text{ cm}$.

Tabella 11: I valori centrali sono 166 e 168

158	165	165	165	165	165	165	165	166	166	166
168	168	168	168	174	174	174	177	177	186	

Esercizio 69. Supponi di aver svolto un'indagine statistica sul voto di matematica degli alunni di una classe di 16 alunni (tabella 12). Determina le frequenze assolute, relative e percentuali, rappresenta i dati graficamente e calcola la moda, la media e la mediana.

Tabella 12: Voti di matematica degli alunni di una classe

Nome	Voto	Nome	Voto
Marco	6	Angela	7
Anna	8	Pietro	4
Luigi	5	Giorgia	10
Lucia	9	Michela	6
Francesco	10	Sergio	5
Elena	6	Roberta	5
Carlo	9	Aldo	9
Giulia	6	Giovanna	7

Scriviamo la tabella delle frequenze assolute (nella prima colonna scriviamo tutti i voti registrati e nella seconda colonna il numero degli alunni che hanno riportato quel voto), delle frequenze relative (pari al rapporto tra la frequenza assoluta di un voto e il totale dei voti registrati) e percentuali (tabella 13). La figura 17 mostra l'istogramma dei valori e il diagramma a torta.

Determiniamo la moda, la media e la mediana.

- La frequenza assoluta maggiore è 4, e corrisponde al numero di alunni che hanno riportato un voto pari a 6: quindi la moda è 6.
- La media è:

$$\text{media} = \frac{4 \cdot 1 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 4 + 7 \cdot 2 + 8 \cdot 1 + 9 \cdot 3 + 10 \cdot 2}{16} = 7$$

Tabella 13: Frequenze assolute, relative e percentuali

Voto	Frequenza assoluta	Frequenza relativa	Frequenza percentuale
4	1	0,0625	6,25
5	3	0,1875	18,75
6	4	0,2500	25,00
7	2	0,1250	12,50
8	1	0,0625	6,25
9	3	0,1875	18,75
10	2	0,1250	12,50
Totale	16	1	100

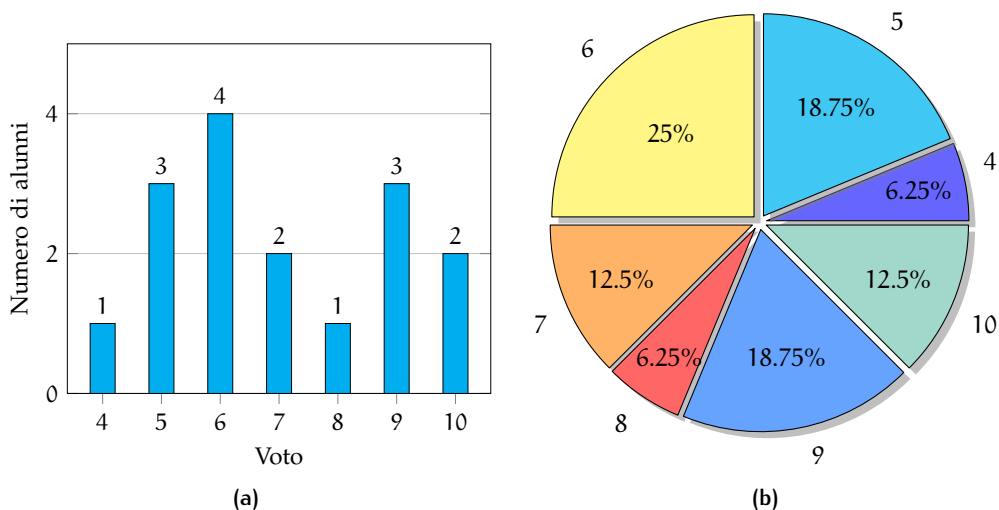


Figura 17: Rappresentazioni del fenomeno “voto di matematica degli alunni”

- Per calcolare la mediana riscriviamo i valori in ordine crescente (tabella 14).

Tabella 14: Voti in ordine crescente

4	5	5	5	6	6	6	6
7	7	8	9	9	9	10	10

I valori sono sedici, che è un numero pari: la mediana è la media dei due valori centrali, che sono l’ottavo (che ha sette valori che lo precedono) e il nono (che ha sette valori che lo seguono); questi valori sono rispettivamente 6 e 7. Quindi la mediana è $(6 + 7)/2 = 6,5$.

6.4 ESERCIZI

Chi non risolve esercizi non impara la matematica.

1 Da un'indagine sulla distribuzione delle altezze in un gruppo di studenti sono stati rilevati i seguenti valori grezzi (espressi in cm):

175	168	169	173	160	165	170	172	177	172	170	173	182
164	174	185	188	164	175	160	177	176	184	180	176	168
174	175	177	183	174	166	181	173	166	172	174	165	180
190	175	176	188	171	172	181	185	184	183	175	173	181

Raggruppa i valori in classi di ampiezza 5 cm e costruisci la distribuzione di frequenza. Calcola poi frequenza relativa e percentuale.

2 Data la seguente distribuzione dei risultati dei test d'ingresso di matematica in una scuola media, sapendo che l'indagine è stata svolta su 200 alunni, determina frequenze assolute e relative.

Voto	3	4	5	6	7	8	9
Frequenza percentuale	5%	10%	25%	40%	15%	3%	2%
Frequenza assoluta							
Frequenza relativa							

3 Rappresenta attraverso un diagramma a torta la seguente tabella statistica, che indica le ore di studio giornaliere di uno studente.

Giorno	lunedì	martedì	mercoledì	giovedì	venerdì	sabato	domenica
Ore di studio	2	6	5	2	3	4	0

4 Rappresenta con un istogramma i dati riportati nella seguente tabella relativi alla vendita di automobili da un concessionario nell'anno 2019.

Marca automobile	Auto vendute
Renault	50
Fiat	270
Ford	120
Toyota	40
Alfa Romeo	30

5 Uno studente universitario di Fisica ha superato 28 esami con queste valutazioni:

18	25	26	23	30	21	24	20	29	28	24	21	23	28
28	24	22	25	24	27	24	21	23	28	18	25	26	23

Organizza i valori in una tabella e rappresentali con un istogramma.

6 Un insegnante di Fisica, per mostrare che le misure di uno stesso oggetto sono soggette ad errori che dipendono dall'osservatore, ha fatto misurare la lunghezza di una cattedra con un metro a ciascun alunno della propria classe. I risultati sono stati i seguenti:

Lunghezza (cm)	100,8	100,9	101,0	101,1	101,2
Frequenza	1	7	6	3	3

Qual è la lunghezza media della cattedra? [101,0 cm]

7 Sono dati i seguenti punteggi a un test sostenuto da un gruppo di otto studenti: 20, 24, 20, 15, 8, 5, 11, 17. Calcola la moda, la media e la mediana. [20; 15; 16]

8 In un gruppo di studenti universitari la valutazione dell'esame di biologia risulta così distribuita: 29, 24, 28, 18, 23, 19, 20, 24, 30, 20, 21, 30, 22, 30, 23, 24, 27, 29, 29, 30.

- Organizza i dati in una tabella e calcola la frequenza assoluta, relativa e percentuale.
- Rappresenta i dati in un grafico a piacere.
- Calcola moda, media e mediana. [30; 25; 24]

9 È stata fatta un'indagine statistica sul numero di libri letti nella scorsa estate. I dati sono raccolti nella seguente tabella:

Numero di libri letti	0	1	2	3	4	5	6	7
Numero di persone	6	5	1	4	1	2	0	1

- Organizza i dati in una tabella e calcola la frequenza assoluta, relativa e percentuale.
- Rappresenta i dati in un grafico scelto a piacere.
- Calcola moda, media e mediana. [0; 2; 1]

10 Indica la risposta corretta.

a. Se fai un'indagine sul peso degli allievi della tua scuola, la popolazione è costituita:

- | | |
|--------------------------------------|----------------------------------|
| A | C |
| dagli allievi della scuola. | dal peso di ciascun allievo. |
| B | D |
| dai pesi degli allievi della scuola. | da ciascun allievo della scuola. |

b. La frequenza percentuale si ottiene:

- A dividendo la frequenza assoluta per la somma delle frequenze assolute.
- B moltiplicando la frequenza assoluta per 100.
- C moltiplicando la frequenza relativa per 100.
- D dividendo la frequenza relativa per 100.

c. La mediana:

- A è la somma dei valori delle singole osservazioni diviso per il loro numero.
- B è il valore centrale di un insieme di valori ordinati (se i dati sono dispari).
- C è il valore che si presenta con la massima frequenza in un insieme di valori.
- D indica la percentuale di valori al di sopra o al di sotto della media.

d. Sia data la seguente distribuzione di valori: 2, 4, 4, 4, 4, 6, 6, 6, 7, 7. Allora:

- A la moda è 4, la media è 5, la mediana è 6.
- B la moda è 6, la media è 4, la mediana è 5.
- C la moda è 6, la media è 5, la mediana è 4.
- D la moda è 4, la media è 5, la mediana è 5.

e. Nella tua classe la moda dell'altezza è 165 cm. Questo significa che:

- A non ci sono alunni più bassi di 165 cm.
- B 165 cm è l'altezza più comune.
- C 165 cm occupa il posto centrale delle altezze degli alunni in ordine crescente.
- D in media gli alunni sono alti 165 cm.

f. Nella tua classe la media dell'altezza è 165 cm. Questo significa che:

- A non ci sono alunni più bassi di 165 cm.
- B 165 cm è l'altezza più comune.
- C 165 cm occupa il posto centrale delle altezze degli alunni in ordine crescente.
- D la somma delle altezze degli alunni diviso per il numero degli alunni è 165 cm.

g. Nella tua classe la mediana dell'altezza è 165 cm. Questo significa che:

- A non ci sono alunni più bassi di 165 cm.
- B 165 cm è l'altezza più comune.

- C 165 cm occupa il posto centrale delle altezze degli alunni in ordine crescente.
- D in media gli alunni sono alti 165 cm.

[Una risposta A, due B, due C e due D]

11 Sono state misurate le pulsazioni al minuto di 20 persone ottenendo i seguenti dati:
66 67 67 68 68 68 69 69 69 70 70 71 72 72 72 72 74 77 79 80.

- a. Organizza i dati in una tabella e calcola la frequenza assoluta, relativa e percentuale.
- b. Rappresenta graficamente i dati.
- c. Calcola moda, media e mediana. [72; 71; 70]

12 Stabilisci se le seguenti proposizioni sono corrette: se lo sono giustificalo, altrimenti mostra che sono false attraverso un controesempio.

- a. Se due sequenze di numeri hanno la stessa media, allora hanno anche la stessa mediana. V F
- b. Se due sequenze di numeri hanno la stessa mediana, allora hanno anche la stessa media. V F
- c. Ci sono sequenze di numeri per cui la moda, la media e la mediana coincidono. V F
- d. La moda di una sequenza di numeri interi è sempre un numero intero. V F
- e. La mediana di una sequenza di numeri interi è sempre un numero intero. V F
- [2 affermazioni vere e 3 false]

13 Venti ragazzi sono stati sottoposti a una verifica; i dati seguenti indicano il numero di errori commessi da ciascuno di loro: 3, 0, 0, 5, 1, 6, 8, 3, 9, 1, 2, 2, 2, 2, 4, 5, 7, 9, 9.

- a. Organizza i dati in una tabella comprensiva di percentuale di frequenze.
- b. Rappresenta graficamente i dati.
- c. Calcola moda, media e mediana. [2; 4; 3]
- d. Quanti alunni, in percentuale, hanno fatto meno di 5 errori? [60%]

14 I dati riportati in tabella si riferiscono al numero di giorni di assenza degli alunni di una classe.

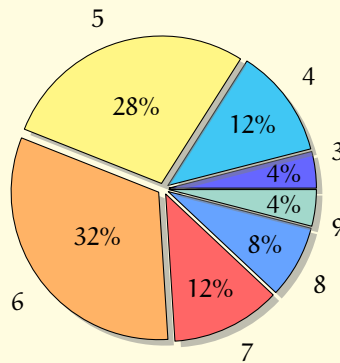
Alunno	n. giorni	Alunno	n. giorni	Alunno	n. giorni	Alunno	n. giorni
Mauro	3	Romeo	8	Bruna	7	Silvia	0
Antonio	6	Anna	3	Pietro	9	Alessio	2
Paola	2	Luca	6	Nicola	1	Patrizia	6
Luisa	1	Amedeo	3	Aldo	5	Franca	9
Carla	0	Marco	1	Luigi	2	Chiara	6

- a. Organizza i dati in una tabella comprensiva delle frequenze percentuali.
- b. Rappresenta i dati con un istogramma.
- c. Calcola moda, media e mediana. [6; 4; 3]
- d. Quanti alunni, in percentuale, hanno fatto meno assenze rispetto alla media? [55%]

15 Quattro amici sostengono l'Esame di Stato conseguendo punteggi la cui media è $77,5/100$. Se tre di essi hanno conseguito un punteggio, in centesimi, rispettivamente di 70, 76 e 80, quale punteggio ha conseguito il quarto studente? [84]

16 La media di 11 numeri è 4850. Se ciascuno degli undici numeri viene diminuito di 10, quanto diventa la loro media? [4840]

17 I 25 alunni della terza C, dopo aver raccolto i voti conseguiti nella verifica scritta di matematica, hanno costruito il seguente grafico:



Quanti ragazzi hanno conseguito come voto 7? [3]

18 Indica la risposta corretta.

- a. Lo sfruttamento medio della capacità ricettiva di un albergo è uguale all'88% durante i tre mesi estivi e al 44% durante i rimanenti mesi dell'anno. Qual è lo sfruttamento medio relativo all'intero anno?

A 46% B 50% C 55% D 66%

- b. Antonio, Carlo, Giovanni, Filippo e Matteo fanno una gara di tiro a segno. Antonio e Filippo totalizzano ciascuno 16 punti, Carlo totalizza 18 punti, Giovanni ne totalizza 14 e Matteo 10. Qual è il punteggio medio realizzato dai cinque amici?

A 11,6 B 14,8 C 15 D 15,2%

- c. La media degli studenti promossi da una scuola, nei quattro anni 2010-2013, è stata di 325 studenti l'anno, mentre nei cinque anni 2010-2014 la media è stata superiore del 20% rispetto al precedente intervallo temporale. Quanti studenti sono stati promossi dalla scuola nel 2014?

- A 390 B 455 C 600 D 650

d. Stabilisci quale delle seguenti affermazioni è vera.

- A La mediana di un insieme di dati può essere uguale alla media.
 B La media di un insieme di dati non può mai essere uguale a zero.
 C La moda di un insieme di dati non può mai essere uguale alla mediana.
 D La media di un insieme di dati non può mai essere uguale alla moda.

e. Mario, Luigi e Giacomo pesano complessivamente 210 kg. Sapendo che Mario e Luigi pesano rispettivamente 3 kg in meno e 4 kg in più della media fra i pesi di tutti e tre, quanto pesa Giacomo?

- A 68 kg B 69 kg C 70 kg D 71 kg

f. Le temperature massime giornaliere registrate a Cesena in una settimana sono le seguenti:

Giorno	lunedì	martedì	mercoledì	giovedì	venerdì	sabato	domenica
Temperatura	29 °C	30 °C	32 °C	31 °C	28 °C	30 °C	30 °C

Quale delle seguenti affermazioni è *falsa*?

- A La temperatura media è quella registrata martedì.
 B La temperatura modale è quella registrata mercoledì.
 C La temperatura mediana è quella registrata sabato.
 D La temperatura mediana è uguale alla temperatura modale.
- g. Un impiegato ha percepito per i primi 3 mesi dell'anno uno stipendio mensile di 1000 €. Nei 9 mesi successivi lo stipendio mensile è aumentato di 400 €. Qual è lo stipendio medio nell'anno di quell'impiegato?

- A 1250 € B 1300 € C 1350 € D 1400 €

h. La media dei voti ottenuti in un compito in classe è stata 6 e la mediana 5,5. Il professore decide di alzare tutti i voti di mezzo punto. Allora:

- A la media resta invariata e la mediana aumenta di 0,5.
 B la media aumenta di 0,5 e la mediana resta invariata.
 C sia la media che la mediana restano invariate.
 D sia la media che la mediana aumentano di 0,5.

- i. La mamma di Andrea ha firmato sul libretto scolastico i seguenti voti di matematica: 7, 5, 6, 4. Andrea rientra con un quinto voto dell'ultimo compito in classe e dice alla mamma: «Ho ottenuto la media del 6». Quale voto ha preso Andrea?

A 6

B 7

C 8

D 9

- j. Uno studio statistico sulle altezze, misurate in metri, dei componenti di una classe di 20 studenti ha condotto ai seguenti risultati.

Moda	Media	Mediana
1,87 m	1,76 m	1,74 m

In base a queste informazioni, quale delle seguenti affermazioni è sicuramente vera?

A Nessuno studente della classe è alto 1,90 m.

B La somma delle altezze degli studenti della classe è 35,2 m.

C Gli studenti della classe che hanno altezza inferiore a 1,74 m sono 9.

D Almeno uno studente della classe ha altezza uguale a 1,76 m.

[Due risposte A, tre B, due C e tre D]

7

PROVE INVALSI

Le prove Invalsi (Istituto Nazionale per la VALutazione del Sistema di Istruzione e formazione), che nelle scuole superiori coinvolgono le classi seconde e quinte, valutano l'apprendimento degli studenti italiani. Questo capitolo, rivolto alle classi prime, contiene esercizi di preparazione alle prove Invalsi di matematica.

7.1 ALGEBRA

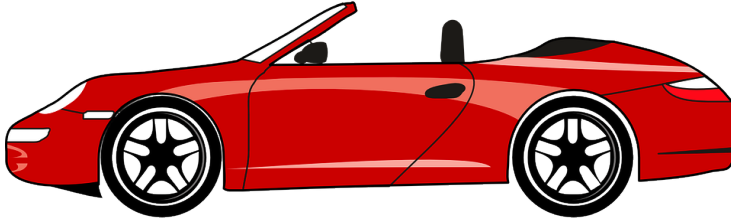
Esercizio 70. Un'automobile che l'anno scorso costava 20 000 euro ora costa 21 000 euro. Qual è stato l'aumento percentuale?

A 1%

B 5%

C 10%

D 20%



Soluzione.

$$\frac{21\,000 - 20\,000}{20\,000} = \frac{1\,000}{20\,000} = \frac{1}{20} = \frac{5}{100} = 5\%$$

La risposta esatta è la B. □

Esercizio 71. Una galassia ha in media cento miliardi di stelle e nell'universo ci sono circa cento miliardi di galassie. Le stelle dell'universo sono circa:

A 10^{20}

B 10^{21}

C 10^{22}

D 10^{100}

Soluzione.

$$100 \text{ miliardi} \cdot 100 \text{ miliardi} = (10^2 \cdot 10^9) \cdot (10^2 \cdot 10^9) = 10^{22}$$

La risposta esatta è la C. □

Esercizio 72. Il doppio di 2^{15} è:

A 4^8

B 2^{30}

C 4^{16}

D 4^{30}

Soluzione.

$$2 \cdot 2^{15} = 2^{16} = (2^2)^8 = 4^8$$

La risposta esatta è la A.

Esercizio 73. A dicembre un paio di scarpe costava 110 euro. A gennaio, nel periodo dei saldi, il prezzo è scontato del 20% rispetto al prezzo di dicembre. Qual è il prezzo delle scarpe in saldo?

A 80 euro

B 81 euro

C 88 euro

D 90 euro



Soluzione. Le scarpe in saldo costano l'80% del prezzo iniziale:

$$110 \cdot 80\% \text{ €} = 110 \cdot \frac{80}{100} \text{ €} = 88 \text{ €}$$

La risposta esatta è la C.

Soluzione. Lo sconto fatto è pari a:

$$110 \cdot 20\% \text{ €} = 110 \cdot \frac{20}{100} \text{ €} = 22 \text{ €}$$

Poiché $(110 - 22) \text{ €} = 88 \text{ €}$, la risposta esatta è la C.

Esercizio 74. Sfruttando la (buona) approssimazione $2^{10} = 1024 \approx 1000 = 10^3$, individua tra le seguenti la potenza di 10 che più si avvicina al numero 2^{300} .

A 10^{60}

B 10^{70}

C 10^{80}

D 10^{90}

Soluzione.

$$2^{300} = (2^{10})^{30} = 1024^{30} \approx 1000^{30} = (10^3)^{30} = 10^{90}$$

La risposta esatta è la D.

Esercizio 75. Cinque amici si inviano messaggi con lo smartphone. Ciascuno invia un messaggio a tutti gli altri. Quanti sono i messaggi inviati in tutto?

A 5

B 10

C 20

D 25



Soluzione. Ognuno dei cinque amici manda un messaggio agli altri quattro amici, quindi i messaggi inviati sono in tutto:

$$\underbrace{4 + 4 + 4 + 4 + 4}_{\text{cinque volte}} = 5 \cdot 4 = 20$$

La risposta esatta è la C. □

Esercizio 76. A una riunione d'affari ci sono dieci manager. Alla fine della riunione, ciascuno di loro stringe la mano a tutti i presenti. Quante strette di mano avvengono in tutto?

A 10

B 20

C 45

D 90



Soluzione. Ognuno dei 10 manager stringe la mano agli altri 9 manager, quindi potremmo pensare a $10 \cdot 9$ strette di mano. In questo modo, però, avremmo contato ogni stretta di mano due volte, quindi le strette di mano sono

$$\frac{10 \cdot 9}{2} = 45$$

La risposta esatta è la C. □

Esercizio 77. Alcuni fiammiferi sono disposti come indicato nelle figure seguenti. Se si continua la sequenza delle figure, quanti fiammiferi ci vorranno per fare la figura 10?

A 30

B 33

C 36

D 42

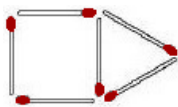


Figura 1

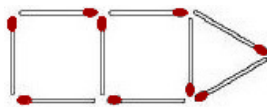


Figura 2

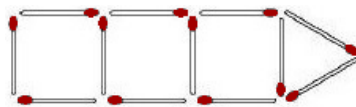


Figura 3

Soluzione. La prima figura è costituita da 6 fiammiferi, la seconda da $6 + 3 = 9$ fiammiferi, la terza da $6 + 3 \cdot 2 = 12$ fiammiferi. L' n -esima figura sarà costituita da $6 + 3 \cdot (n - 1)$ fiammiferi. La decima figura è quindi costituita da $6 + 3 \cdot (10 - 1) = 33$ fiammiferi. La risposta esatta è la B.

Esercizio 78. Quale delle seguenti *non* è una scomposizione in fattori primi?

A $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$

B $50 = 5 \cdot 10$

C $81 = 3^4$

D $100 = 2^5 \cdot 5^2$

Soluzione. L'uguaglianza $50 = 5 \cdot 10$ non è una scomposizione in fattori primi, perché 10 non è un numero primo. La risposta esatta è la B.

Esercizio 79. Quanti decimetri quadrati ci sono in un metro quadrato?

A 10

B 100

C 1000

D 10 000

Soluzione.

$$1 \text{ m}^2 = (1 \text{ m})^2 = (10 \text{ dm})^2 = 100 \text{ dm}^2$$

La risposta esatta è la B.

Esercizio 80. Quanti centimetri cubi ci sono in un litro?

A 10

B 100

C 1000

D 10 000

Soluzione.

$$1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3 = (1 \text{ dm})^3 = (10 \text{ cm})^3 = 1000 \text{ cm}^3$$

La risposta esatta è la C.

Esercizio 81. Un aereo parte alle 14:15 (ora di Roma) dall'aeroporto Roma-Fiumicino e arriva all'aeroporto JFK di New York alle 18:00 (ora di New

York). Sapendo che tra Roma e New York ci sono sei ore di differenza di fuso orario (cioè, se a New York è mezzanotte a Roma sono le sei del mattino), quanto è durato il volo?

A 3 ore e 45 minuti

C 9 ore e 45 minuti

B 4 ore e 15 minuti

D 10 ore e 15 minuti



Soluzione. Quando l'aereo arriva a New York, a Roma sono le 24:00. Poiché tra le 14:15 e le 24:00 ci sono 9 ore e 45 minuti di differenza, la risposta esatta è la C.

Esercizio 82. Se nella moltiplicazione $426 \cdot 843$ invece di 843 si moltiplica per 844, il risultato aumenta di:

A 1

B 426

C 843

D 844

Soluzione.

$$426 \cdot 844 - 426 \cdot 843 = 426 \cdot (844 - 843) = 426 \cdot 1 = 426$$

La risposta esatta è la B.

Esercizio 83. Roma è stata fondata nel 753 a.C. mentre l'America è stata scoperta nel 1492 d.C. Quanti anni sono passati tra i due eventi?

A -739

B 739

C 1492

D 2245

Soluzione. La differenza tra i due numeri è $1492 - (-753) = 1492 + 753 = 2245$. La risposta esatta è la D.

Esercizio 84. Un padre e i suoi quattro figli si dividono una cifra vinta alla lotteria in questo modo: al padre spetta un terzo dell'intera somma, e il rimanente è diviso in parti uguali tra i figli. Quale frazione della somma spetta a ognuno dei figli?

- A un sesto B un quarto C un terzo D un mezzo



Soluzione. Se x è la somma da dividere, al padre spetta $x/3$ e ai figli $2x/3$. A ciascuno dei quattro figli spetta quindi

$$\frac{2x}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{x}{6}$$

La risposta esatta è la A. □

Esercizio 85. La somma di tre numeri interi consecutivi:

- A è divisibile per 3 solo se il primo dei tre numeri è dispari.
 B non è mai divisibile per 3.
 C divisibile per 3 solo se il primo dei tre numeri è pari.
 D sempre divisibile per 3.

Soluzione. Se indichiamo i tre numeri consecutivi con n , $n + 1$ e $n + 2$, la loro somma è:

$$n + (n + 1) + (n + 2) = 3n + 3 = 3(n + 1)$$

che è sempre divisibile per 3. La risposta esatta è la D. □

Esercizio 86. La centesima parte di 100^{100} è:

- A $(0,01)^{100}$ B 1^{100} C 100^1 D 100^{99}

Soluzione.

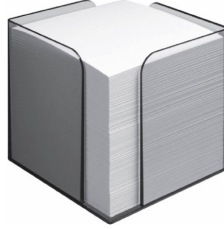
$$\frac{100^{100}}{100} = 100^{100-1} = 100^{99}$$

La risposta esatta è la D. □

Esercizio 87. La figura seguente rappresenta un contenitore con 800 foglietti che formano una pila alta 10 cm. Qual è circa lo spessore di ciascun

foglietto?

- A 0,0125 cm B 0,08 cm C 0,125 cm D 0,8 cm



Soluzione. Lo spessore di ciascun foglietto è

$$\frac{10 \text{ cm}}{800} = 0,0125 \text{ cm}$$

La risposta esatta è la A.

Esercizio 88. La somma $2,1 \cdot 10^4 + 3,5 \cdot 10^3$ vale:

- A $24,5 \cdot 10^3$ B $5,6 \cdot 10^7$ C $2,45 \cdot 10^7$ D $5,6 \cdot 10^{12}$

Soluzione.

$$2,1 \cdot 10^4 + 3,5 \cdot 10^3 = 21 \cdot 10^3 + 3,5 \cdot 10^3 = 24,5 \cdot 10^3$$

La risposta esatta è la A.

Esercizio 89. Quale delle seguenti frazioni *non* è equivalente a $6/4$?

- A $3/2$ B $2/3$ C $6/4$ D $18/12$

Soluzione. Dividendo numeratore e denominatore di $6/4$ per 2 si ha $3/2$; moltiplicando numeratore e denominatore di $6/4$ per 3 si ha $18/12$. La risposta esatta è la A.

Esercizio 90. Una mamma deve somministrare al figlio convalescente 150 mg di vitamina C ogni giorno. Avendo a disposizione compresse da 0,6 g, quante compresse al giorno deve dare al figlio?

- A due compresse e mezzo C un quarto di compressa
 B quattro compresse D una compressa



Soluzione. Il numero di compresse è uguale al rapporto tra il peso delle vitamine da somministrare diviso per il peso delle vitamine contenute in una compressa:

$$150 \text{ mg} : 0,6 \text{ g} = 150 \text{ mg} : 600 \text{ mg} = 0,25 = 1/4$$

La risposta esatta è la C.

Esercizio 91. Tra quali numeri è compresa la frazione $1/6$?

- A tra 0 e 1 B tra 1 e 6 C tra 5 e 6 D tra 6 e 7

Soluzione. La frazione $1/6$ è maggiore di 0 e minore di 1, perché si divide l'unità in sei parti uguali. La risposta esatta è la A.

Esercizio 92. Un computer costa 300 euro. Il prezzo è composto dal costo base più l'IVA, pari al 20% del costo base. Qual è l'IVA?

- A 20€ B 30€ C 40€ D 50€



Soluzione. Se x è il costo base del computer, il suo costo complessivo è:

$$x + \frac{20}{100}x = 300 \quad \Rightarrow \quad \frac{6}{5}x = 300 \quad \Rightarrow \quad x = 250$$

quindi l'importo dell'IVA è $(300 - 250) \text{ €} = 50 \text{ €}$. La risposta esatta è la D.

Esercizio 93. L'espressione $\left\{ \frac{2}{10} \cdot [10 - (3 + 2)] + 2 \right\} : \frac{1}{3}$ vale:

A $1/9$

B $1/3$

C 9

D $81/5$

Soluzione.

$$\left\{ \frac{2}{10} \cdot [10 - (3 + 2)] + 2 \right\} : \frac{1}{3} = \left\{ \frac{2}{10} \cdot 5 + 2 \right\} : \frac{1}{3} = \{1 + 2\} : \frac{1}{3} = 3 : \frac{1}{3} = 9$$

La risposta esatta è la C. □

Esercizio 94. Un supermercato, in un giorno particolare, fa uno sconto del 15% su tutti i prezzi di listino. Sulla frutta e verdura fa un altro sconto del 20%. Qual è lo sconto complessivo fatto sulla frutta e verdura?

A 5%

B 30

C 32%

D 35%

Soluzione. Se x è il prezzo di listino, il prezzo scontato del 15% è $85x/100$. Il prezzo della frutta e verdura dopo l'altro sconto del 20% è quindi:

$$\frac{80}{100} \cdot \frac{85}{100}x = \frac{6800}{10000} = \frac{68}{100}x$$

Lo sconto fatto è del $(100 - 68)\% = 32\%$: la risposta esatta è la C. □

Esercizio 95. Un minerale contiene il 20% di piombo. Quanti chilogrammi di quel minerale sono necessari per ricavare 650 kg di piombo?

A 780 kg

B 1170 kg

C 3250 kg

D 5200 kg

Soluzione. Basta una proporzione:

$$20 : 100 = 650 \text{ kg} : x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{650 \cdot 100}{20} \text{ kg} = 3250 \text{ kg}$$

La risposta esatta è la C. □

Esercizio 96. Un maglione che era venduto a 110 euro ora si vende a 100 euro. Qual è lo sconto?

A $9\% \text{ circa}$

B 10%

C $11\% \text{ circa}$

D 20%



Soluzione. Lo sconto è stato di 10€ su 110€, quindi $10/110 \approx 9\%$. La risposta esatta è la A.

Esercizio 97. In una classe di 25 alunni le femmine sono il 40% e $2/3$ dei maschi giocano a basket. Quanti sono i maschi che *non* giocano a basket?

A 5

B 6

C 8

D 10

Soluzione. Le femmine sono il 40% di 25, cioè 10, quindi nella classe ci sono $25 - 10 = 15$ maschi. I maschi che giocano a basket sono $2/3$ di 15, cioè 10; quindi i maschi che non giocano a basket sono $15 - 10 = 5$. La risposta esatta è la A.

Esercizio 98. In un paese gli studenti vanno a scuola a piedi, in bicicletta o in auto. Quelli che vanno a scuola in bicicletta sono 27 e rappresentano il 15% del totale degli studenti. Gli studenti che vanno a scuola a piedi sono 9. Quale percentuale rappresentano questi 9 studenti rispetto al totale degli studenti della scuola?

A 4%

B 5%

C 7%

D 8%



Soluzione. Indichiamo con x il numero degli studenti della scuola. I 27 studenti che vanno a scuola in bicicletta rappresentano il 15% del totale:

$$27 = \frac{15}{100}x \quad \Rightarrow \quad x = 180$$

Gli studenti che vanno a piedi sono quindi:

$$\frac{9}{180} = \frac{1}{20} = 5\%$$

La risposta esatta è la B.

Esercizio 99. Una carta geografica è in scala 1 : 500 000. Quanto distano sulla carta due città che, nella realtà, si trovano a 50 chilometri di distanza?

A 1 cm B 2 cm C 5 cm D 10 cm

Soluzione.

$$1 : 500\,000 = x : 50 \text{ km} \quad \Rightarrow \quad 500\,000x = 50 \text{ km}$$

da cui

$$x = \frac{50 \text{ km}}{500\,000} = \frac{50 \cdot 1000 \text{ m}}{500\,000} = \frac{50 \cdot 1000 \cdot 100 \text{ cm}}{500\,000} = \frac{5\,000\,000 \text{ cm}}{500\,000} = 10 \text{ cm}$$

La risposta esatta è la D. □

Esercizio 100. In una scuola con 300 allievi, 45 tifano per la squadra del Borgorosso. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

 A Un allievo su sei è tifoso del Borgorosso. B Un quinto degli allievi è tifoso del Borgorosso. C I tifosi del Borgorosso sono il 25% degli allievi. D I tifosi del Borgorosso sono il 15% degli allievi.

Soluzione. I tifosi del Borgorosso sono $45/300 = 15/100 = 15\%$. La risposta esatta è la D. □

Esercizio 101. Prima dei saldi una giacca costava 250 euro. Ora che è in saldo la stessa giacca costa 200 euro. Qual è stato lo sconto?

 A 20% B 25% C 40% D 50%

Soluzione. Lo sconto percentuale fatto è:

$$\frac{250 - 200}{250} = \frac{50}{250} = \frac{1}{5} = 20\%$$

La risposta esatta è la A. □

Esercizio 102. Se $x = 1001^2 - 999^2$, allora:

- A $x < 400$ B $x = 4000$ C $x = 5000$ D $x > 5000$

Soluzione. Applichiamo la formula della differenza tra due quadrati:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) \implies 1001^2 - 999^2 = (1001 - 999) \cdot (1001 + 999) = 4000$$

La risposta esatta è la B. □

Esercizio 103. Qual è il numero che, sommato alla sua terza parte, dà 108?

- A 36 B 37 C 72 D 81

Soluzione. Basta risolvere l'equazione:

$$x + \frac{x}{3} = 108 \implies \frac{4}{3}x = 108 \implies x = 81$$

La risposta esatta è la D. □

Esercizio 104. Ai soci di un supermercato un detersivo è venduto, con lo sconto del 20%, al prezzo di 1,40 euro. Quanto costa quel detersivo ai clienti che non sono soci del supermercato e che quindi non hanno diritto allo sconto?

- A 1,12€ B 1,68€ C 1,75€ D 2,80€

Soluzione. Se x è il prezzo non scontato del detersivo in euro, il prezzo riservato ai soci è:

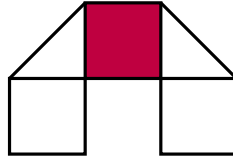
$$x - \frac{20}{100}x = 1,40 \implies \frac{4}{5}x = 1,4 \implies x = 1,75$$

La risposta esatta è la C. □

7.2 GEOMETRIA

Esercizio 105. A quale frazione corrisponde la parte colorata della figura seguente?

- A $1/5$ B $1/4$ C $1/3$ D $3/4$



Soluzione. La figura è costituita da quattro quadrati uguali (mettendo insieme i due triangoli si ottiene il quarto quadrato). Poiché uno di essi è colorato, la parte colorata è $1/4$. La risposta esatta è la B.

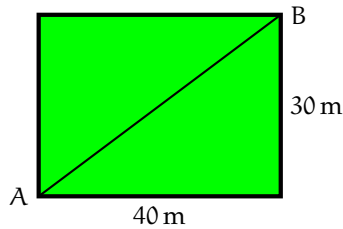
Esercizio 106. La figura seguente mostra un campo da calcetto rettangolare. Andrea e Bruna si sfidano a una gara di corsa: partendo dall'angolo indicato nella figura con A devono arrivare all'angolo B. Andrea corre lungo il bordo del campo, mentre Bruna corre lungo la diagonale del campo. Quanti metri in più percorre Andrea?

A 20 m

B 30 m

C 50 m

D 70 m



Soluzione. Bruna percorre $(40 + 30) \text{ m} = 70 \text{ m}$. La lunghezza della diagonale AB percorsa da Andrea è data dal teorema di Pitagora:

$$AB = \sqrt{30^2 + 40^2} \text{ m} = \sqrt{900 + 1600} \text{ m} = \sqrt{2500} \text{ m} = 50 \text{ m}$$

Poiché $(70 - 50) \text{ m} = 20 \text{ m}$, la risposta esatta è la A.

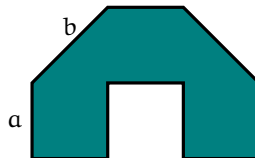
Esercizio 107. Il perimetro della figura seguente è

A $5a + 3b$

B $4a^2 + b^2$

C $8a^2 + b^2$

D $8a + 2b$



Soluzione. Il poligono è formato da otto segmenti di lunghezza a e da due segmenti di lunghezza b, quindi il perimetro è $8a + 2b$. La risposta esatta è la D.

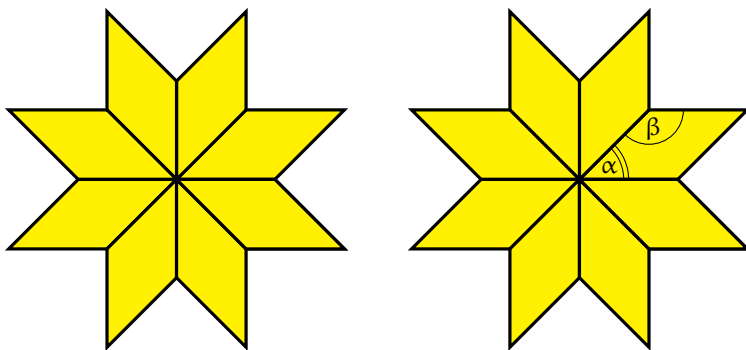
Esercizio 108. La seguente figura 1 è formata da otto rombi uguali tra loro. La misura di ogni angolo ottuso del rombo è:

A 90°

B 100°

C 135°

D 150°



Soluzione. Indichiamo con α e β rispettivamente gli angoli acuti e ottusi di ciascun rombo (figura 2). Allora:

$$8\alpha = 360^\circ \implies \alpha = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$$

La somma degli angoli interni di ogni rombo misura 360° :

$$2\alpha + 2\beta = 360^\circ \implies 2 \cdot 45^\circ + 2\beta = 360^\circ \implies 2\beta = 270^\circ \implies \beta = 135^\circ$$

La risposta esatta è la C.

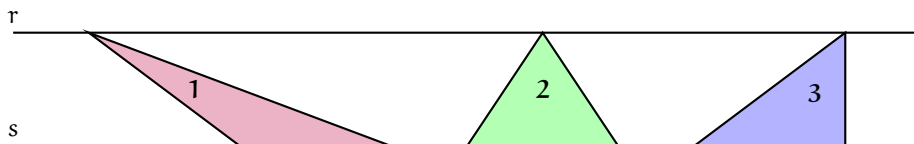
Esercizio 109. Nella figura seguente le rette r e s sono parallele e i triangoli 1, 2 e 3 hanno la base di ugual misura. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

A Solo 1 e 3 hanno la stessa area.

C I triangoli hanno aree diverse.

B Solo 1 e 2 hanno la stessa area.

D I triangoli hanno la stessa area.



Soluzione. Tutti i triangoli hanno la stessa base e la stessa altezza, quindi hanno la stessa area. la risposta esatta è la D.

Esercizio 110. Nell'atrio di un palazzo c'è una scala costituita da quattro gradini alti 16 cm e profondi 30 cm (vedi la seguente figura 1). Per permettere a carrozzine e passeggini di accedere al palazzo costruisce uno scivolo di legno da appoggiare alla scala. Quanto è lungo lo scivolo?

A 102 cm

B 136 cm

C 170 cm

D 184 cm

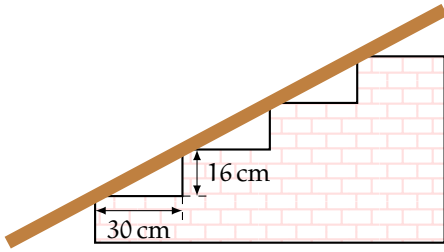


Figura 1

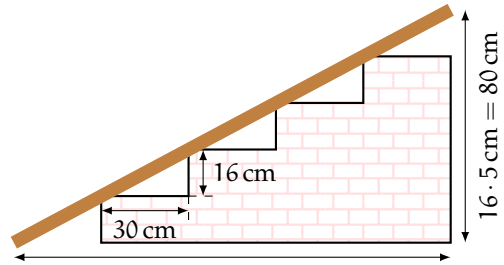


Figura 2

Soluzione. L'altezza dello scivolo è $16 \cdot 5 \text{ cm} = 80 \text{ cm}$, mentre la sua profondità è $30 \cdot 5 \text{ cm} = 150 \text{ cm}$ (vedi la figura 2). Per il teorema di Pitagora la lunghezza dello scivolo è:

$$\sqrt{150^2 + 80^2} \text{ cm} = \sqrt{22\,500 + 6\,400} \text{ cm} = \sqrt{28\,900} \text{ cm} = 170 \text{ cm}$$

La risposta esatta è la C. □

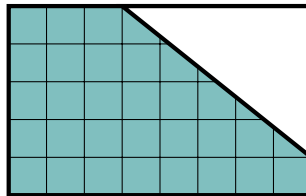
Esercizio 111. Da una lamiera rettangolare si elimina la parte non quadrata come nella figura seguente. Quale percentuale della superficie della lamiera è rimasta?

A 60%

B 70%

C 75%

D 80%



Soluzione. L'area della lamiera rettangolare è $8 \cdot 5 = 40$, mentre l'area della parte eliminata è $5 \cdot 4 / 2 = 10$. La superficie della lamiera rimasta è quindi $40 - 10 = 30$. Poiché $30/40 = 75\%$, la risposta esatta è la C. □

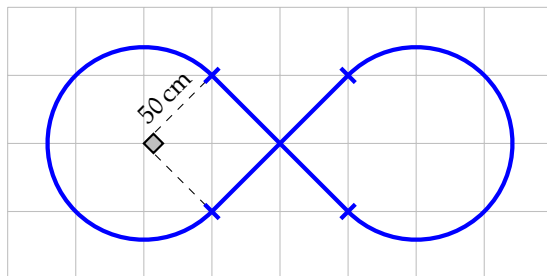
Esercizio 112. La figura seguente schematizza una pista formata da due archi di circonferenza di raggio 50 cm e due tratti rettilinei di 100 cm ciascuno, perpendicolari tra loro nel punto medio. Qual è circa la lunghezza della pista?

A 640 cm

B 671 cm

C 680 cm

D 691 cm



Soluzione. Indichiamo con $R = 50$ cm il raggio degli archi di circonferenza. La pista è formata da due archi, ciascuno dei quali lungo $\frac{3}{4}$ di una circonferenza, e da due tratti rettilinei, ciascuno dei quali lungo $2R$:

$$2 \cdot \frac{3}{4} 2\pi R + 2 \cdot (2R) = 3\pi R + 4R = R(3\pi + 4) \approx 50(3 \cdot 3,14 + 4) \text{ cm} \approx 671 \text{ cm}$$

La risposta esatta è la B. □

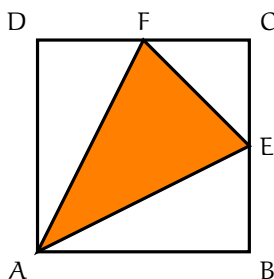
Esercizio 113. Il quadrato ABCD ha lato lungo 4; F ed E sono i punti medi dei lati CD e BC. Quanto misura l'area del triangolo AEF?

A 3

B 4,5

C 6

D 7,5



Soluzione. L'area del triangolo AEF è la differenza tra l'area del quadrato ABCD e la somma dei triangoli ABE, AFD e ECF:

$$4^2 - \left(\frac{4 \cdot 2}{2} + \frac{4 \cdot 2}{2} + \frac{2 \cdot 2}{2} \right) = 16 - (4 + 4 + 2) = 16 - 10 = 6$$

La risposta esatta è la C. □

Esercizio 114. Il solido rappresentato nella seguente figura 1 è composto da sette cubi congruenti di lato 5. Trovane il volume V e la superficie totale S .

A $V = 675$ $S = 750$

C $V = 875$ $S = 675$

B $V = 675$ $S = 875$

D $V = 875$ $S = 750$

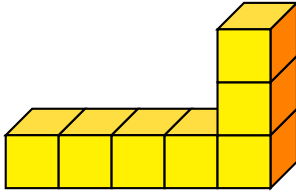


Figura 1

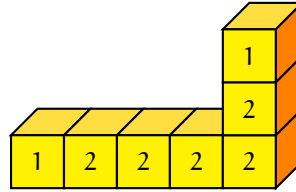


Figura 2

Soluzione.

- Poiché i cubi che compongono il solido sono sette e poiché il volume di un cubo di lato 5 è $5^3 = 125$, il volume del solido è $7 \cdot 125 = 875$.
- Poiché un cubo ha sei facce, le facce dei cubi che compongono il solido sono in tutto $7 \cdot 6 = 42$. Le facce del solido si ottengono sottraendo da 42 le facce che ciascun cubo ha in comune con gli altri, indicate nella figura 2:

$$42 - (2 \cdot 1 + 5 \cdot 2) = 42 - 12 = 30$$

Poiché l'area di un quadrato di lato 5 è $5^2 = 25$, la superficie totale del solido è $30 \cdot 25 = 750$.

La risposta esatta è la D. □

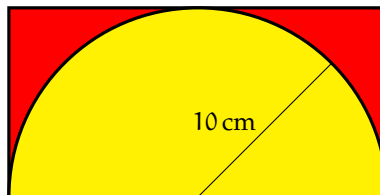
Esercizio 115. In un rettangolo è inscritto un semicerchio come in figura. Sapendo che il raggio del cerchio è 10 cm, il perimetro del rettangolo misura:

A 30 cm

B 40 cm

C 50 cm

D 60 cm



Soluzione. La base del rettangolo è pari al diametro del cerchio (20 cm) e la sua altezza è pari al raggio del cerchio (10 cm). Quindi il perimetro è $2 \cdot (20 + 10) \text{ cm} = 60 \text{ cm}$. La risposta esatta è la D. □

Esercizio 116. Il rettangolo ABCD della seguente figura 1 è costruito con cinque quadrati: i due più piccoli hanno lato di 1 cm. Quanto vale l'area di ABCD?

A 25

B 30

C 35

D 40

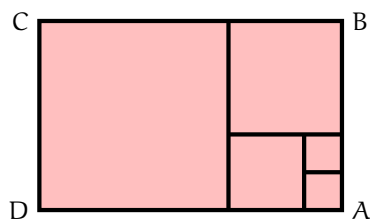


Figura 1

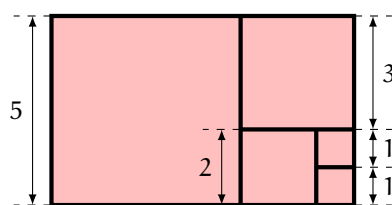


Figura 2

Soluzione. I due quadrati più piccoli hanno lato di 1 cm; gli altri tre hanno lati di 2 cm, 3 cm e 5 cm (vedi la figura 2). L'area del rettangolo ABCD è quindi:

$$1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 = 1 + 1 + 4 + 9 + 25 = 40$$

La risposta esatta è la D.

□

7.3 PROBABILITÀ E STATISTICA

Esercizio 117. Uno studente universitario ha superato quattro esami, con i seguenti voti: 28, 26, 30, 24. Qual è la sua media?

A 26

B 27

C 28

D 29



Soluzione. La media dello studente è:

$$\frac{28 + 26 + 30 + 24}{4} = \frac{108}{4} = 27$$

La risposta esatta è la B.

□

Esercizio 118. Quale tra i seguenti numeri *non* può rappresentare la probabilità di un evento?

A $2/3$

B $8/7$

C $11/15$

D $20/27$

Soluzione. La probabilità di un evento è un numero compreso tra zero e uno. Il numero $8/7$ è maggiore di 1, quindi la risposta esatta è la B.

Esercizio 119. Qual è la probabilità che lanciando un dado si ottenga un numero pari?

A 30%

B 40%

C 50%

D 60%

Soluzione. La probabilità è il rapporto tra il numero di casi favorevoli (tre, che si verificano quando si ottiene 2, 4 o 6) e il numero di casi possibili (sei). Poiché $3/6 = 50\%$, la risposta esatta è la C.

Esercizio 120. Lanciando contemporaneamente cinque dadi, qual è la probabilità di ottenere cinque numeri pari?

A $1/32$

B $1/25$

C $1/10$

D $1/6$



Soluzione. La probabilità di ottenere un numero pari lanciando un dado è $1/2$. La probabilità di ottenere cinque numeri pari lanciandone cinque è:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$$

La risposta esatta è la A.

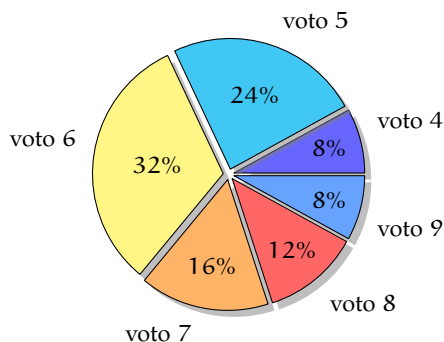
Esercizio 121. I 25 alunni di una classe, dopo aver raccolto i voti conseguiti nella verifica scritta di matematica, hanno costruito il grafico seguente. Quanti ragazzi hanno conseguito come voto 7?

A 4

B 7

C 12

D 16



Soluzione. Ha preso 7 il 16% dei 25 alunni. Poiché $16\% \cdot 25 = 16/100 \cdot 25 = 4$, la risposta esatta è la A.

Esercizio 122. I voti in matematica di dieci studenti in una verifica sono stati: 9, 8, 7, 6, 5, 7, 8, 8, 5, 4. Il voto minimo della metà degli studenti più bravi è:

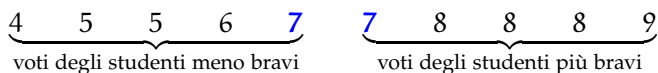
A la media dei voti

C la mediana dei voti

B la moda dei voti

D nessuna delle altre risposte

Soluzione. Disponiamo i dieci voti in ordine crescente:



Il voto minimo della metà degli studenti più bravi è 7, che è la mediana dei voti (pari alla media dei due valori centrali, entrambi uguali a 7). La risposta esatta è la C.

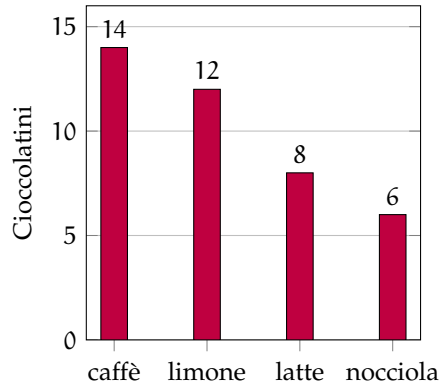
Esercizio 123. Il grafico seguente mostra il numero dei cioccolatini di diversi gusti contenuti in una scatola. Prendendo un cioccolatino a caso, qual è la probabilità di scegliere un cioccolatino alla nocciola?

A 6/34

B 6/14

C 6/40

D 1/4



Soluzione. I cioccolatini sono in tutto $14 + 12 + 8 + 6 = 40$. La probabilità di sceglierne uno alla nocciola è il numero di casi favorevoli (6) diviso per il numero di casi possibili (40). La risposta esatta è la C.

Esercizio 124. In un'indagine sul numero di gelati consumati a Ferragosto sono state intervistate 100 persone. La tabella seguente registra le risposte. Qual è la media dei gelati mangiati dagli intervistati?

A 1

B 1,5

C 2

D 2,5

Numero di gelati	0	1	2	3	4	5
Numero di persone	9	53	21	15	0	2

Soluzione. La media è:

$$\frac{9 \cdot 0 + 53 \cdot 1 + 21 \cdot 2 + 15 \cdot 3 + 0 \cdot 4 + 2 \cdot 5}{100} = 1,5$$

La risposta esatta è la B.

Esercizio 125. La probabilità che lanciando tre monete si ottengano tre risultati uguali (tre teste o tre croci) è:

A $1/8$

B $1/4$

C $3/8$

D $1/2$

Soluzione. Indicando con T testa e con C croce, scriviamo tutti i casi possibili che si possono presentare lanciando tre monete:

TTT TTC TCT TCC CTT CTC CCT CCC

La probabilità di ottenere tre teste o tre croci è il numero di casi favorevoli (due: TTT, CCC) diviso per il numero di casi possibili (otto). Poiché $2/8 = 1/4$, la risposta esatta è la B.

Esercizio 126. Un'urna contiene 12 palline bianche, 8 verdi, 15 rosse e 25 di altri colori. Qual è la probabilità di estrarre una pallina bianca o verde?

A 1/4

B 1/3

C 1/2

D 2/3



Soluzione. La probabilità è il numero di casi favorevoli ($12 + 8 = 20$) diviso per il numero di casi possibili ($12 + 8 + 15 + 25 = 60$). Poiché $20/60 = 1/3$, la risposta esatta è la B.

Esercizio 127. La mamma di Giovanni ha firmato sul diario scolastico i seguenti voti di matematica: 8, 6, 7 e 5. Giovanni rientra col quinto voto dell'ultimo compito in classe e dice alla mamma: «Ho la media del 7». Quale voto ha preso Giovanni?

A 7

B 8

C 9

D 10

Soluzione. Se x è il quinto voto, la media di Giovanni è:

$$\frac{8 + 6 + 7 + 5 + x}{5} = 7 \implies 26 + x = 35 \implies x = 9$$

La risposta esatta è la C.

Esercizio 128. Qual è la probabilità di estrarre da un mazzo di 40 carte da briscola un asso o una carta di denari?

A 1/4

B 13/40

C 7/20

D 3/8



Soluzione. In un mazzo di carte da briscola ci sono 10 carte di denari e 4 assi. La probabilità è il numero di casi favorevoli (13, perché l'asso di denari va contato una volta sola) diviso per il numero di casi possibili (40). La risposta esatta è la B. \square

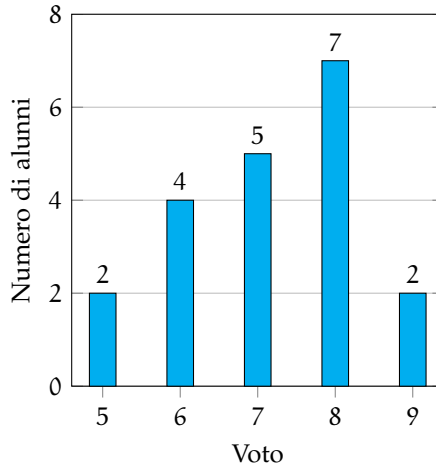
Esercizio 129. Il grafico seguente riporta i voti in matematica degli alunni di una classe. Qual è la percentuale di alunni che non hanno la sufficienza?

A 10%

B 15%

C 20%

D 25%



Soluzione. Gli alunni della classe sono in tutto $2 + 4 + 5 + 7 + 2 = 20$. Quelli che non hanno la sufficienza sono 2. Poiché $2/20 = 10\%$, la risposta esatta è la A. \square

Esercizio 130. Si svolge un'indagine sull'importo della «paghetta» che i ragazzi di 16 anni ricevono dai genitori. Il 75% degli intervistati riceve una media di 100 euro al mese; il 15% una media mensile di 80 euro e il restante 10% una media di 160 euro. Qual è la paghetta media mensile dei ragazzi del campione esaminato?

A 100 euro

B 103 euro

C 105 euro

D 110 euro

Soluzione. La paghetta media mensile in euro è:

$$\frac{75}{100} \cdot 100 + \frac{15}{100} \cdot 80 + \frac{10}{100} \cdot 160 = 75 + 12 + 16 = 103$$

La risposta esatta è la B. \square

7.4 ESERCIZI

Chi non risolve esercizi non impara la matematica.

1 Indica la risposta esatta.

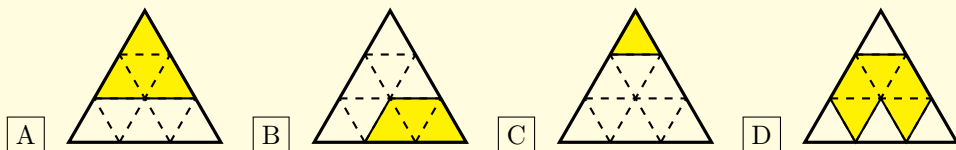
- a. La piscina Acquadolce offre ai suoi frequentatori due diversi modi di pagamento: si può fare un abbonamento mensile, che costa 75 euro indipendentemente dal numero di ingressi, oppure pagare un biglietto di 5 euro per ogni ingresso. Se in un mese si usa la piscina 20 volte, quanto si risparmia facendo l'abbonamento mensile?

A 10€ B 15€ C 20€ D 25€

- b. Quale dei seguenti è il numero 7 decimillesimi?

A $7/10\,000$ B $7/1000$ C $70/10\,000$ D $10\,000/7$

- c. Quale delle seguenti figure mostra che $3/9 = 1/3$?



- d. Quanto vale -4 elevato alla seconda?

A -16 B -8 C 8 D 16

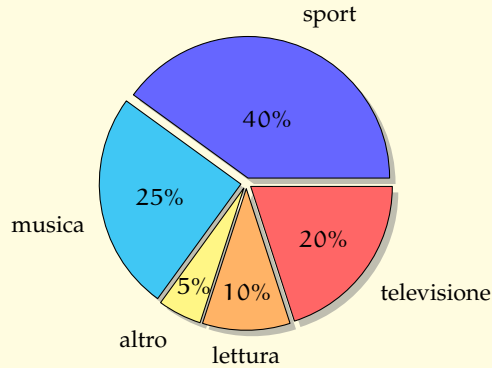
- e. Un mazzo di carte da poker è composto da 52 carte, di cui 12 sono figure. Pescando a caso una carta, qual è la probabilità che si verifichi l'evento «esce una figura o un asso»?

A $1/13$ B $3/13$ C $4/13$ D $6/13$

- f. Se x è un numero compreso tra 6 e 9, allora il numero $(x + 5)$ tra quali numeri è compreso?

A 1 e 4 B 10 e 13 C 11 e 14 D 30 e 45

- g. Un'indagine sull'attività preferita nel tempo libero, fatta su un campione di 220 studenti di una scuola con 700 studenti in totale, ha dato i risultati rappresentati nel grafico seguente. Qual è la probabilità che estraendo a caso uno studente del campione si ottenga un alunno che dedica il tempo libero alla lettura?



- A un decimo C un quinto
 B un duecentovesimo D un settantesimo

[Due risposte A, una B, due C e due D]

2 Indica la risposta esatta.

a. Le potenze $\left(\frac{4}{3}\right)^2$ e $\frac{4^2}{3}$ hanno lo stesso valore?

- A No, la prima vale $16/3$ e la seconda $16/9$
 B Sì, valgono entrambe $16/3$
 C Sì, valgono entrambe $16/9$
 D No, la prima vale $16/9$ e la seconda $16/3$

b. Se n è un numero intero, quale procedimento devi seguire per ottenere sempre un numero dispari?

- A $n - 1$ B $n + 1$ C $2n + 1$ D $n/2 + 1$

c. Quale delle seguenti disuguaglianze è vera?

- A $-\frac{17}{16} < -\frac{16}{17}$ B $+\frac{17}{16} < -\frac{16}{17}$ C $-\frac{17}{16} > +\frac{16}{17}$ D $+\frac{17}{16} < +\frac{16}{17}$

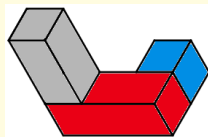
d. Scrivi al posto di x il numero che rende vera l'uguaglianza $4x = 1,6$.

- A 0,1 B 0,4 C 0,6 D 0,8

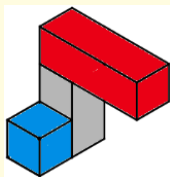
e. Un ragazzo prepara una limonata usando questa ricetta. Dosi per quattro persone: un litro di acqua, 30 g di zucchero, quattro limoni. Quali dosi deve usare per preparare la limonata per sei persone?

- A due litri di acqua, 45 g di zucchero, otto limoni
- B un litro e mezzo d'acqua, 60 g di zucchero, otto limoni
- C due litri di acqua, 60 g di zucchero, otto limoni
- D un litro e mezzo d'acqua, 45 g di zucchero, sei limoni

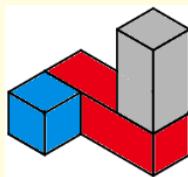
f. Osserva la figura seguente.



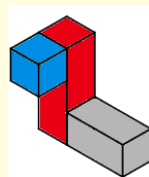
Il solido viene ruotato. Quale tra le seguenti figure *non* può rappresentare il solido ruotato?



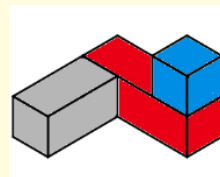
A



B



C



D

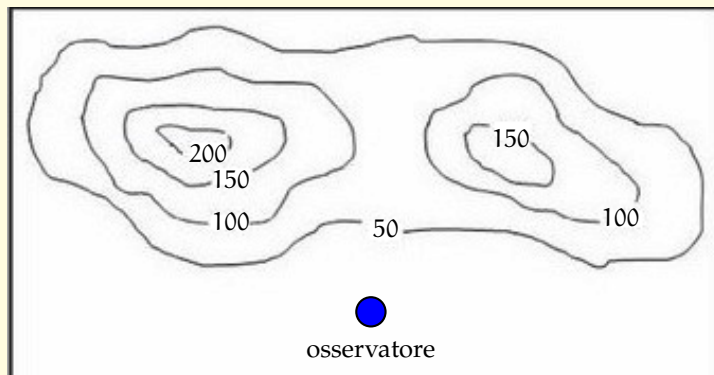
g. Nella borraccia di Michele, piena per metà, ci sono 0,6 litri di acqua. Michele beve la metà dell'acqua contenuta nella borraccia. Quanta acqua rimane?

- A 0,03 litri
- B 0,3 litri
- C 0,5 litri
- D 1,2 litri

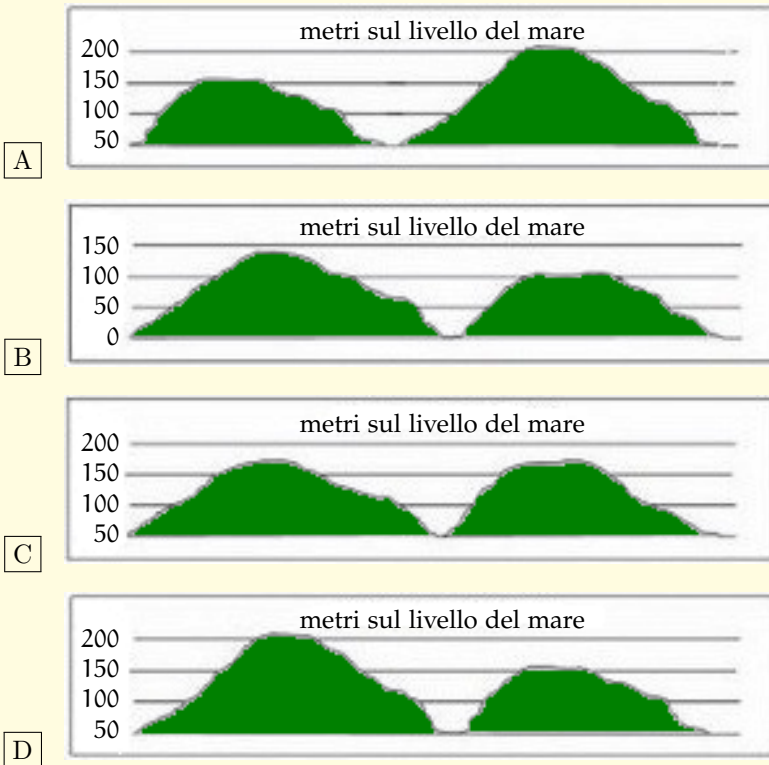
[Due risposte A, due B, una C e due D]

3 Indica la risposta esatta.

a. La figura seguente rappresenta, attraverso le linee di livello, la vista dall'alto di un territorio. Le linee di livello uniscono tutti i punti che si trovano alla stessa altitudine, indicata (in metri) su ogni linea.



Quale dei seguenti profili montuosi vede l'osservatore?



b. In 3 millilitri d'acqua ci sono circa 10^{23} molecole. Quante molecole ci sono circa in 3 litri d'acqua?

- A** 10^{25} **B** 10^{26} **C** 10^{28} **D** 10^{29}

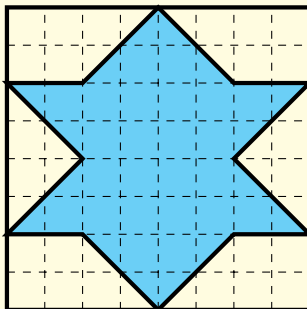
c. Antonio lavora in un bar. Viene pagato 8 euro l'ora se lavora all'ora di pranzo e 11 euro l'ora se lavora all'ora di cena. Se lavora la domenica il suo datore di lavoro gli dà in più una mancia di 15 euro. Questa domenica Antonio ha lavorato sia a pranzo sia a cena e ha guadagnato 75 euro. Se a pranzo ha lavorato due ore, quante ore ha lavorato a cena?

- A** 2 ore **B** 3 ore **C** 4 ore **D** 5 ore

d. Filippo, per il suo bassotto, compra sempre scatole di cibo per cani da 500 grammi. Ogni giorno il bassotto mangia 200 grammi di cibo per cani. Filippo, che conserva ogni scatola aperta finché non l'ha completamente svuotata, oggi non ha più scatole di cibo per cani e quindi deve comprarle. Quante scatole almeno dovrà comprare se vuole che gli bastino per una settimana?

A 2 B 3 C 4 D 5

- e. La figura seguente mostra un quadrato di lato 8 cm, al cui interno è disegnato un poligono colorato. Qual è l'area del poligono colorato?

 A 26 cm^2 B 28 cm^2 C 30 cm^2 D 32 cm^2

- f. Sia n un numero intero. Antonio afferma che « $4n - 1$ è sempre un multiplo di 3». Antonio ha ragione?

 A No, perché $4n - 1$ è sempre dispari. B Sì, perché se $n = 4$ allora $4n - 1 = 15$. C No, perché se $n = 3$ allora $4n - 1 = 11$. D Sì, perché $4n - 1 = 3n$.

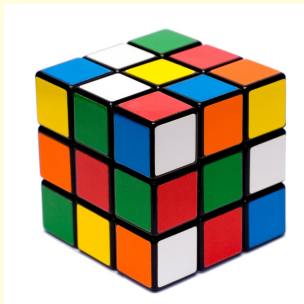
- g. Se moltiplichiamo 2,5 per un numero x otteniamo come risultato $-3,75$. Quanto vale x ?

 A $-3,75$ B $-1,5$ C $1,25$ D $1,5$

[Due risposte A, una B, due C e due D]

4 Indica la risposta esatta.

- a. Il cubo di Rubik è formato da $3^3 = 27$ cubetti uguali. Se a indica la lunghezza degli spigoli di questi cubetti, quale delle seguenti formule esprime la superficie totale S del solido ottenuto asportando dal cubo di Rubik gli otto cubetti posti «agli angoli»?



A $S = 48a^2$ B $S = 54a^2$ C $S = 60a^2$ D $S = 68a^2$

- b. Un bancomat distribuisce solo banconote da 100 euro, 50 euro e 20 euro. Sonia preleva 120 euro. Il bancomat può distribuire questa somma in tre modi diversi, una è: $1 \cdot 100 + 0 \cdot 50 + 1 \cdot 20$. Quali sono gli altri due?

A $0 \cdot 100 + 1 \cdot 50 + 3 \cdot 20$ $0 \cdot 100 + 2 \cdot 50 + 1 \cdot 20$

B $0 \cdot 100 + 0 \cdot 50 + 6 \cdot 20$ $0 \cdot 100 + 3 \cdot 50 + 1 \cdot 20$

C $0 \cdot 100 + 0 \cdot 50 + 6 \cdot 20$ $0 \cdot 100 + 2 \cdot 50 + 2 \cdot 20$

D $0 \cdot 100 + 0 \cdot 50 + 6 \cdot 20$ $0 \cdot 100 + 2 \cdot 50 + 1 \cdot 20$

- c. Un bancomat distribuisce solo banconote da 100 euro, 50 euro e 20 euro. Lorenzo vuole prelevare 160 euro dallo stesso bancomat. In quanti modi diversi il bancomat può distribuire le banconote?

A 3

B 4

C 5

D 6

- d. Usa la calcolatrice per calcolare la frazione seguente e indica il risultato corretto.

$$\frac{43,2 \cdot (5,8 + 7,3)}{4,9 + 0,5}$$

A 47,75

B 104,80

C 147,75

D 108,40

- e. La probabilità di estrarre una pallina rossa da un'urna contenente 100 palline è $\frac{3}{50}$. Quante sono le palline rosse contenute nell'urna?

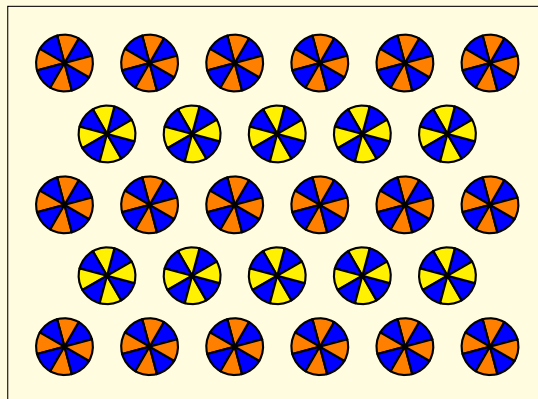
A 3

B 6

C 12

D 18

- f. Dalla terrazza panoramica dell'albergo «il Faro» si possono vedere tutti gli ombrelloni disposti sulla spiaggia, come mostra la figura seguente. Il bagnino può sistemare fino a due lettini per ciascun ombrellone. Il primo maggio il bagnino ha messo sotto ogni ombrellone almeno un lettino. In tutto ha sistemato 38 lettini. Sotto quanti ombrelloni ha messo due lettini?



A 10

B 12

C 13

D 14

g. Quanto fa $1 + 1/99$?

A $2/99$

B $99/100$

C $100/99$

D $198/99$

[Due risposte A, due B, due C e una D]

5 Indica la risposta esatta.

a. Quale delle seguenti uguaglianze esprime la frase «100 è la somma di due quadrati perfetti»?

A $100 = 16 + 84$

C $100 = 36 + 64$

B $100 = 99 + 1$

D $100 = 14 \cdot 7 + 2$

b. Quale delle seguenti uguaglianze esprime la frase «100 è il successivo di 99»?

A $100 = 16 + 84$

C $100 = 36 + 64$

B $100 = 99 + 1$

D $100 = 14 \cdot 7 + 2$

c. Quale delle seguenti uguaglianze esprime la frase «100 diviso 7 ha resto 2»?

A $100 = 16 + 84$

C $100 = 36 + 64$

B $100 = 99 + 1$

D $100 = 14 \cdot 7 + 2$

d. Tra i numeri interi da 1 a 15, quali *non* sono multipli di 3?

A 5, 10, 15

B 6, 12

C 3, 6, 9, 12, 15

D 3, 9, 15

e. In un triangolo rettangolo un cateto supera l'altro di 3 cm. Se x indica la lunghezza in centimetri del cateto minore, quale tra le seguenti espressioni rappresenta l'area del triangolo?

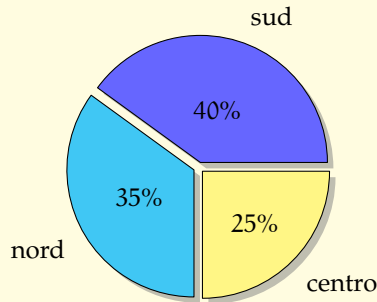
A $\frac{x - (x + 3)}{2}$

B $\frac{x + (x + 3)}{2}$

C $\frac{x(x + 3)}{2}$

D $\frac{x(x - 3)}{2}$

f. I dipendenti pubblici in Italia sono circa due milioni, e la loro distribuzione tra nord, centro e sud è data dal grafico seguente. Quale delle seguenti affermazioni possiamo dedurre?



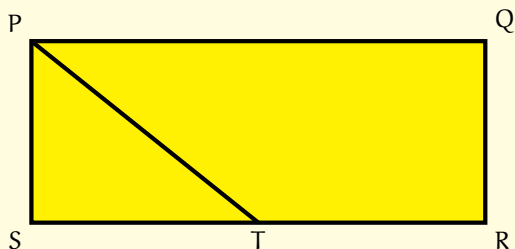
- A Più di un terzo dei dipendenti pubblici sono al centro.
- B I dipendenti pubblici sono ugualmente distribuiti tra le tre zone.
- C Tra nord e sud lavorano meno del 70% dei dipendenti pubblici.
- D Più di un terzo dei dipendenti pubblici sono nel nord.
- g. Quale delle seguenti espressioni rappresenta un numero intero dispari qualunque sia il numero intero n ?

- A $2n + 1$ B $2n$ C $3n + 1$ D $3n$

[Due risposte A, una B, due C e due D]

6 Indica la risposta esatta.

- a. In ottobre un maglione costa 100 euro. Prima di Natale il suo prezzo è aumentato del 20%. Nel mese di gennaio, con i saldi, il costo del maglione si è ribassato del 10% rispetto al prezzo natalizio. Quale affermazione è vera?
- A Il maglione in gennaio ha un costo maggiore rispetto a quello di ottobre dell'8%
- B Il maglione in gennaio ha un costo pari a quello di ottobre
- C Il maglione in gennaio ha un costo inferiore rispetto a quello di ottobre del 10%
- D Il maglione da ottobre a gennaio ha subito un rincaro del 10%
- b. Completa la formula del quadrato di binomio $(a-b)^2$.
- A $a^2 - b^2 + 2ab$ B $a^2 - b^2$ C $a^2 + b^2 - 2ab$ D $a^2 + b^2$
- c. Siano PQRS un rettangolo e T è il punto medio di SR. Qual è il rapporto tra l'area del triangolo PST e l'area del rettangolo PQRS?



- A $1/5$ B $1/4$ C $1/3$ D $1/2$

d. Un'urna contiene 26 palline, ognuna delle quali è contrassegnata da una lettera dell'alfabeto. Qual è la probabilità che, estraendo a caso una di queste palline, si verifichi l'evento «esce la lettera A»?

- A 0 B $1/26$ C 1 D $3/2$

e. Come si scrive il numero sedicimilatrentuno?

- A 16 000,31 B 160 031 C 16 031 D 1631 000

f. Aggiungendo un centesimo al numero 9,999 si ottiene:

- A 1 B 10 C 10,001 D 10,009

g. Qual è la probabilità che una persona risponda correttamente a una domanda che ha solo una risposta esatta, scegliendo a caso una risposta fra le quattro proposte?

- A $1/4$ B $1/2$ C $3/4$ D 1

[Due risposte A, due B, due C e una D]

7 Indica la risposta esatta.

a. Quale affermazione è vera?

- A La metà di $1/2$ è $1/4$. C La metà di $1/4$ è $1/2$.
 B Il doppio di $1/2$ è $1/4$. D La metà di $1/2$ è 1.

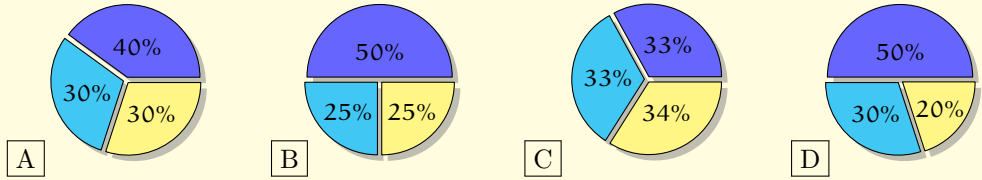
b. Quali delle seguenti affermazioni riguardo il mcm è vera?

- A $\text{mcm}(2, 3) = 3$ C $\text{mcm}(6, 8) = 24$
 B $\text{mcm}(2, 4) = 2$ D $\text{mcm}(3, 5) = 8$

c. Quale operazione è svolta correttamente?

A $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$
 B $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{5}$
 C $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{3}{5}$
 D $1 + \frac{2}{3} = \frac{3}{3}$

d. La spesa per generi alimentari della famiglia di Giorgio nel mese di marzo è stata di 600 euro, così suddivisa: la metà per pane e pasta, un quarto per carne e pesce e il resto per frutta e verdura. Quale tra i grafici seguenti rappresenta la spesa?



e. Qual è il più piccolo tra i seguenti numeri?

A 0,1
 B 0,10
 C 0,01
 D 0,011

f. Qual è il numero equidistante da 1,2 e 2,1?

A 1,125
 B 1,5
 C 1,65
 D 1,7

g. Per trovare il 27% di 350 si deve:

A dividere 350 per 27
 C moltiplicare 350 per 27
 B dividere 350 per 0,27
 D moltiplicare 350 per 0,27

[Due risposte A, due B, due C e una D]

8 Indica la risposta esatta.

a. A quale dei seguenti numeri si può togliere uno 0 senza alterarne il valore?

A 0,175
 B 1,705
 C 1,075
 D 1,750

b. Quanto vale $(-1)^2 + (-1)^3$?

A -2
 B 0
 C 2
 D 5

c. Quale dei seguenti numeri *non* è un divisore di 12?

A 3 B 4 C 5 D 6

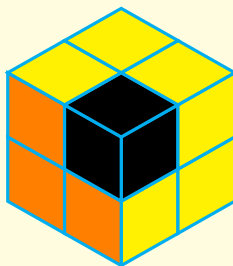
d. Nell'uguaglianza $3 + \frac{2}{5} + \frac{1}{1000} = x$, quanto vale x ?

 A $x = 3,041$ B $x = 3,201$ C $x = 3,251$ D $x = 3,401$

e. Il doppio di $1/4$ è

 A $1/8$ B $4/2$ C $1/2$ D 2

f. Il cubo nella figura seguente è formato da otto cubetti. Si elimina il cubetto nero: com'è la superficie totale del solido rimanente rispetto a quella del cubo di partenza?

 A minore di quella del cubo C maggiore di quella del cubo B uguale a quella del cubo D I dati non bastano per rispondere.

g. L'espressione $a^{37} + a^{38}$ è uguale a:

 A $a^{37}(a+1)$ B a^{75} C $2a^{75}$ D $a^{37 \cdot 38}$

[Una risposta A, due B, due C e due D]

9 Indica la risposta esatta.

a. Quale delle seguenti operazioni è impossibile?

 A $1 : 0$ B $0 : 1$ C $1 : 1$ D 1^0

b. Nelle seguenti frazioni n è un numero intero maggiore di 1. Qual è la frazione più grande?

 A $\frac{7}{n+1}$ B $\frac{7}{n}$ C $\frac{7}{n+2}$ D $\frac{7}{n-1}$

c. La tabella seguente riporta la «paghetta» settimanale ricevuta dai genitori in una classe di 25 studenti.

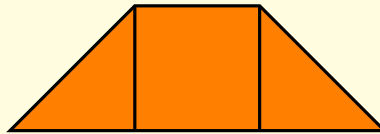
Paghetta (€)	5	10	20
Numero di alunni	10	5	10

Da essa si deduce che:

- A Più della metà degli alunni ha una paghetta minore di 10 euro.
 B Più della metà degli alunni ha una paghetta superiore a 5 euro.
 C I $\frac{3}{5}$ degli alunni hanno una paghetta superiore a 10 euro.
 D I $\frac{2}{5}$ degli alunni hanno una paghetta di 10 euro.
- d. Quale delle seguenti affermazioni è vera per ogni numero intero n ?

- A $7n + 1$ è dispari
 B $1 + 2n^2$ è pari
 C $n^2 + n$ è pari
 D $3n + 3$ è dispari

- e. La figura seguente è composta da un quadrato di lato 3 cm e da due triangoli rettangoli isosceli. Qual è l'area della figura?



- A 6
 B 9
 C 18
 D 24
- f. Quale operazione è svolta correttamente?

- A $\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} = 1$
 B $\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$
 C $\frac{3}{2} : \frac{2}{3} = 1$
 D $\frac{3}{2} : \frac{3}{2} = \frac{9}{4}$

- g. Calcola il valore dell'espressione $\frac{1}{3} - 3 \cdot \frac{1}{8} \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3} \right)$.

- A $\frac{1}{3}$
 B $\frac{1}{15}$
 C $\frac{5}{3}$
 D $\frac{2}{15}$

[Due risposte A, una B, due C e due D]

10 Indica la risposta esatta.

- a. Se una squadra di calcio ha vinto una partita, si può affermare che:

- A ha segnato esattamente una rete
 B ha segnato almeno una rete
 C ha segnato più di una rete
 D l'avversario non ha segnato

b. Quale delle seguenti affermazioni dice il contrario di «tutti gli alunni sono stati promossi»?

- A Nessun alunno è stato promosso.
 B Alcuni alunni sono stati promossi.
 C Almeno un alunno non è stato promosso.
 D Nessuna delle precedenti.

c. Quale dei seguenti numeri decimali corrisponde alla frazione $5/2$?

- A 5,2 B 2,5 C 0,25 D 2,25

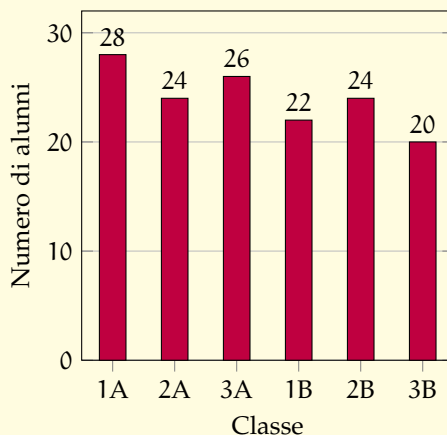
d. Quanti sono i numeri interi n che verificano la condizione $1 \leq n < 10$?

- A 9 B 10 C 11 D infiniti

e. Sono dati i numeri a , $a + 1$, $a + 2$, $a + 4$, dove a è un numero. Trova a in modo che la media di questa sequenza di numeri sia il triplo della mediana.

- A $-11/8$ B $8/11$ C $-8/11$ D $11/8$

f. Il grafico seguente riporta la distribuzione degli alunni per classe in una scuola media. Quale affermazione possiamo dedurre?



- A La classe più numerosa ha 24 alunni.
 B Gli alunni che non frequentano le classi prime sono in tutto 92.
 C Gli alunni della scuola sono in tutto 136.
 D Gli alunni delle seconde sono in tutto 48.

- g. Nella scuola di Michele quest'anno ci sono tre prime. Esattamente l'80% degli alunni della classe 1A è stato promosso in seconda. Ancora meglio è andata in 1B, con una percentuale di promossi del 90%. Per la classe 1C la percentuale dei promossi è stata invece solo del 70%. Che cosa puoi concludere circa la percentuale complessiva dei promossi dalla prima alla seconda classe, nella scuola di Michele?

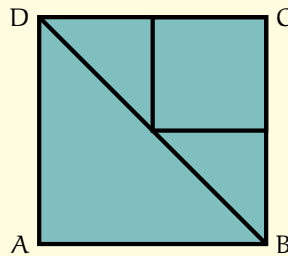
- A È uguale all'80%. C È compresa tra il 70% e il 90%.
 B È diversa dall'80%. D Nessuna delle precedenti.

[Due risposte A, due B, due C e una D]

- 11 Indica la risposta esatta.

- a. Il quadrato ABCD, di lato 1, è stato scomposto come mostrato in figura. Quale tra le seguenti espressioni corrisponde alla scomposizione del quadrato ABCD?

- A $1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/8$ C $1/2 + 1/3 + 1/3 + 1/3$
 B $1/2 + 1/4 + 1/4 + 1/4$ D $1/2 + 1/4 + 1/4 + 1/8$



- b. Quale operazione è svolta correttamente?

- A $-5 - 2 = -7$ B $-5 - 2 = 7$ C $2 - 5 = 7$ D $-2 + 5 = 7$

- c. Quale delle seguenti affermazioni è scorretta?

- A L'opposto di -3 è $+3$ C Il valore assoluto di -3 è 3
 B Il reciproco di 3 è $1/3$ D L'opposto del reciproco di -3 è 3

- d. Qual è il maggiore dei seguenti numeri?

- A 0,5 B 0,505 C 0,55 D $0,\bar{5}$

- e. La potenza $0,1^2$ è uguale a:

- A 0,001 B 0,01 C 0,2 D 1

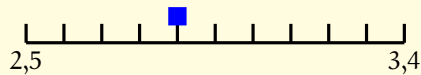
f. Quale numero è indicato dal quadratino?

A 2,1

B 2,54

C 2,9

D 3



g. Il risultato dell'espressione $\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)$ è:

A -2

B -1

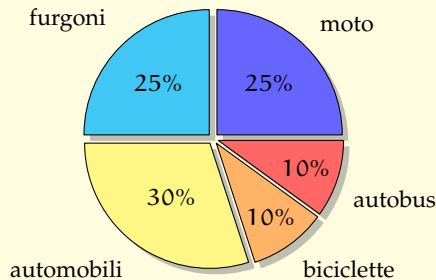
C 0

D 1

[Due risposte A, una B, due C e due D]

12 Indica la risposta esatta.

a. Il grafico seguente rappresenta la rilevazione di 80 veicoli passati su una strada in dieci minuti.



A Le automobili passate sono 24.

C Le bici passate sono 10.

B Le moto passate sono 25.

D I furgoni passati sono 22.

b. Per $a = -1/2$ l'espressione $a^3 + a^2 - a + 1$ vale:

A 16/9

B 18/3

C 13/8

D 15/7

c. Nell'espressione 3^2 il numero 2 si chiama

A fattore

B base

C potenza

D esponente

d. Il MCD e mcm di 14, 16 e 35 sono rispettivamente

A 1; 560

B 14; 35

C 16; 70

D 1; 70

e. Se x è un numero negativo, quale delle seguenti espressioni ha valore positivo?

A $-x^2$

B $2x$

C $2-x$

D $x-2$

f. Aggiungi 1 al prodotto di 2 e 3, dividi il risultato per la differenza tra 10 e 3, il risultato è:

A 0

B 1

C 2

D 5

g. In un negozio c'è un cartello su un tessuto: «20€ al metro». La preposizione «al» indica:

A una divisione

B un prodotto

C un rapporto

D una somma

[Due risposte A, due B, due C e una D]

13 Indica la risposta esatta.

a. Come si chiama la seguente figura geometrica?

A parallelepipedo

C rettangolo

B cubo

D parallelogramma



b. Dati tre numeri interi n , m , p se $p = m \cdot n$, allora:

A m è multiplo di p

C n è divisore di p

B m è multiplo di n

D p è divisore di m

c. Dall'affermazione «Chi dorme non piglia pesci» si deduce che

A Chi piglia pesci non dorme.

C Chi piglia pesci dorme.

B Chi non piglia pesci dorme.

D Chi non piglia pesci non dorme.

d. Qual è la negazione di «Ogni cane abbaia»?

A Nessun cane abbaia.

C Se un animale abbaia, è un cane.

B C'è almeno un cane che non abbaia.

D Nessuna delle altre risposte.

e. Quale affermazione è vera?

A La somma di due numeri positivi è positiva.

B La somma di due numeri negativi è negativa.

C Il prodotto di due numeri negativi è negativo.

D Il prodotto di due numeri discordi è negativo.

f. Quale uguaglianza è vera?

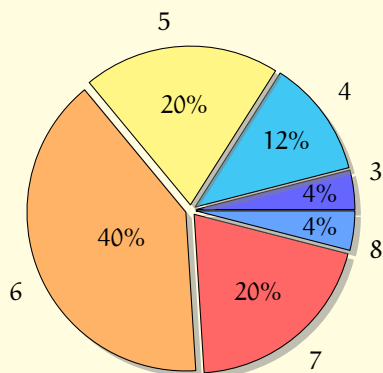
A $4^3 + 3^2 = 7^2$ B $2^3 \cdot 2^2 = 2^5$ C $6^3 : 3^2 = 2^{3-2}$ D $4^2 \cdot 4^2 = 16^4$

g. La frazione $5/3$ è compresa tra

A 0 e 0,5 B 0,5 e 1 C 1 e 1,5 D 1,5 e 2

[Due risposte A, due B, due C e una D]

14 La tabella e il grafico seguenti rappresentano i voti degli alunni di una classe in una verifica di matematica.



Voto	Numero di alunni
3	1
4	3
5	5
6	10
7	?
8	1

- a. Quanti alunni hanno preso 5?
 b. Quanti alunni hanno preso 7?
 c. Da quanti alunni è formata la classe?

- d. Qual è la moda dei voti?
 e. Qual è la media dei voti?

[5; 5; 25; 6; 5,72]

15 Indica la risposta esatta.

a. Quale affermazione è vera?

- A L'opposto di $3/5$ è $5/3$. C Il reciproco di 4 è $-1/4$
 B L'opposto di 0 è 0. D Il reciproco di -1 è 1.

b. Quale dei seguenti numeri vale $9/10$?

- A 0,09 B 0,9 C 1,9 D 90

c. Quale delle seguenti disuguaglianze è vera?

- A $\frac{5}{7} < \frac{3}{7}$ B $\frac{3}{7} < \frac{3}{11}$ C $\frac{3}{11} < \frac{2}{5}$ D $\frac{6}{7} < \frac{7}{8}$

d. L'espressione $\frac{1}{x} : \frac{1}{y}$ è uguale a:

- A $\frac{x+y}{xy}$
 B $\frac{x}{y}$
 C $\frac{1}{xy}$
 D $\frac{y}{x}$

e. Due grandezze sono inversamente proporzionali se è costante:

- A il loro prodotto
 C il loro prodotto
 B la loro differenza
 D la loro somma

f. Dei 1000 pazienti di un medico solo 500 sono stati vaccinati contro l'influenza. Dopo alcuni mesi si è riscontrato che l'80% dei vaccinati non ha avuto l'influenza mentre il 40% dei non vaccinati non ha avuto l'influenza. Qual è la probabilità che un paziente, preso a caso tra coloro che non sono stati vaccinati, abbia avuto l'influenza?

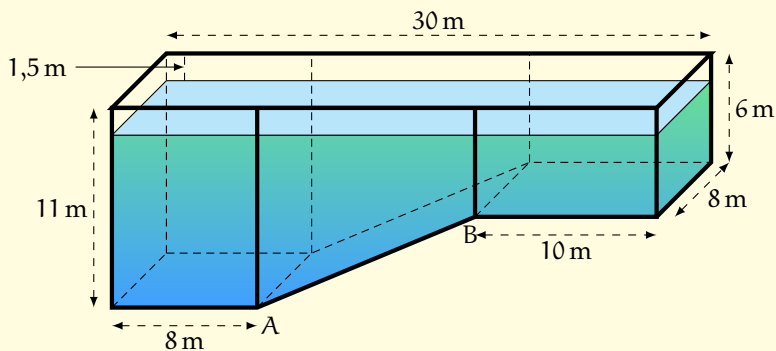
- A 20%
 B 30%
 C 50%
 D 60%

g. L'espressione $a \cdot b/c$ è uguale a:

- A $\frac{ab}{c}$
 B $\frac{ac}{b}$
 C $\frac{ab}{ac}$
 D $\frac{b}{ac}$

[Due risposte A, due B, una C e due D]

16 La figura seguente rappresenta la vasca di un acquario.



- a. Qual è l'altezza massima della vasca?
 b. Quanto misura AB?
 c. Quanti metri cubi di acqua mancano per riempire la vasca fino all'orlo?

[11 m; 13 m; 450 m³]