MATEMATICA

per le quarte

degli Istituti professionali

LORENZO PANTIERI

Questo lavoro spiega il programma di matematica degli Istituti professionali italiani. Ringrazio i miei studenti per l'aiuto fornito: il libro è più loro che mio. Se avete idee su argomenti da aggiungere o modificare, o se vi dovesse capitare di notare un errore, di battitura o di sostanza, mi fareste un favore comunicandomelo. Spero che possiate studiare la matematica con il mio stesso piacere.

♡

Lorenzo Pantieri

Matematica per gli Istituti professionali

☞ lorenzo.pantieri@gmail.com

INDICE

1 EQUAZIONI DI GRADO ELEVATO

In questo capitolo ci proponiamo di risolvere equazioni algebriche di grado superiore al secondo. Prenderemo in considerazione tre casi:

- le equazioni binomie (della forma $ax^n + b = 0$)
- le equazioni trinomie (della forma $ax^{2n} + bx^n + c = 0$)
- le equazioni riconducibili al prodotto di due o più fattori

1.1 EQUAZIONI BINOMIE

Tra le equazioni di grado superiore al secondo, le *equazioni binomie* sono le più semplici. Sono della forma:

$$ax^n + b = 0$$

con a e b numeri reali e $a \neq 0$.

Per esempio, sono equazioni binomie:

- $x^3 - 8 = 0$
- $x^4 - 16 = 0$
- $x^6 - 1 = 0$

La soluzione di un'equazione binomia dipende dall'esponente n cui è elevata la x.

- Se n è *dispari*, la soluzione dell'equazione binomia è

  $$x = \sqrt[n]{-\frac{b}{a}}$$

  Infatti si può estrarre la radice di indice dispari di qualunque numero reale indipendentemente dal segno della quantità $-\frac{b}{a}$.

- Se n è *pari*, dobbiamo distinguere due sottocasi.
  - Se i coefficienti a e b sono *discordi*, cioè se hanno segno diverso, allora l'equazione binomia ha due soluzioni:

    $$x = \pm\left(\sqrt[n]{-\frac{b}{a}}\right)$$

Infatti in questo caso la quantità $-\dfrac{b}{a}$ è positiva, per cui si può estrarne la radice.

- Se invece a e b sono *concordi*, cioè hanno segno uguale, l'equazione binomia non ha soluzioni. Infatti la quantità $-\dfrac{b}{a}$ è negativa, per cui non si può estrarne la radice.

Esercizio 1. Risolvi l'equazione $x^3 - 8 = 0$.

Soluzione. Scriviamo l'equazione come

$$x^3 = 8$$

Possiamo estrarre la radice senza preoccuparci del segno perché l'esponente di x è dispari, da cui

$$x = \sqrt[3]{8} \quad \Longrightarrow \quad x = 2$$

L'equazione ha dunque una soluzione e

$$\mathcal{S} = \{2\}$$ □

Esercizio 2. Risolvi l'equazione $x^3 + 8 = 0$.

Soluzione. Scriviamo l'equazione come

$$x^3 = -8$$

Poiché x è dispari, estraiamo la radice senza preoccuparci del segno:

$$x = \sqrt[3]{-8} \quad \Longrightarrow \quad x = -2$$

L'equazione ha dunque una soluzione e

$$\mathcal{S} = \{-2\}$$ □

Esercizio 3. Risolvi l'equazione $x^4 - 16 = 0$.

Soluzione. Il coefficiente del termine in x è 1, mentre il termine noto è -16. Poiché i due numeri sono discordi abbiamo due soluzioni distinte:

$$x^4 = 16 \quad \Longrightarrow \quad x = \pm\sqrt[4]{16} = \pm 2$$

cioè

$$\mathcal{S} = \{-2, 2\}$$ □

Esercizio 4. Risolvi l'equazione $x^4 + 16 = 0$.

Soluzione. Il coefficiente del termine in x è 1, e il termine noto è 16. Poiché i due numeri sono concordi, l'equazione è impossibile:

$$\mathcal{S} = \emptyset$$

□

1.2 EQUAZIONI TRINOMIE

Passiamo a un caso più complesso di equazioni di grado superiore al secondo: le *equazioni trinomie*, che si presentano nella forma

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0 \tag{1}$$

con a, b e c numeri reali e $a \neq 0$.

Per esempio, sono equazioni trinomie:

- $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$
- $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$
- $x^6 + 9x^3 + 8 = 0$

Per trovare le soluzioni di un'equazione trinomia basta fare un *cambiamento di variabile*: ponendo $x^n = t$ si ottiene

$$at^2 + bt + c = 0 \tag{2}$$

cioè un'equazione di secondo grado nell'incognita t. Sappiamo che un'equazione di secondo grado ha soluzioni in base al segno del discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$. Procediamo quindi per casi.

- Se $\Delta < 0$ l'equazione 2 non ha soluzioni e di conseguenza nemmeno la trinomia 1 a essa associata ne ha.
- Se $\Delta = 0$ l'equazione 2 ha una sola soluzione $t = -\frac{b}{2a}$. Dunque, ricordando che $t = x^n$, ci troveremo a risolvere l'equazione binomia
$$x^n = -\frac{b}{2a}$$
- Se $\Delta > 0$ l'equazione 2 ha due soluzioni distinte del tipo
$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
Tornando all'incognita x dobbiamo risolvere
$$x^n = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad x^n = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
cioè due equazioni binomie.

Le equazioni trinomie includono un caso particolare, la famiglia delle cosiddette *equazioni biquadratiche*, che si presentano nella forma

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

Esercizio 5. Risolvi l'equazione $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.

Soluzione. Facciamo la sostituzione $x^2 = t$:

$$t^2 - 5t + 4 = 0 \quad \Longrightarrow \quad (t-1)(t-4) = 0$$

da cui

$$t = 1 \quad \vee \quad t = 4$$

Ritorniamo all'incognita x ponendo $t = x^2$:

$$x^2 = 1 \quad \vee \quad x^2 = 4$$

da cui

$$x = \pm 1 \quad \vee \quad x = \pm 2$$

Quindi:

$$\mathcal{S} = \{-2, -1, 1, 2\}$$

□

Esercizio 6. Risolvi l'equazione $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$.

Soluzione. Facciamo la sostituzione $x^3 = t$:

$$t^2 - 9t + 8 = 0 \quad \Longrightarrow \quad (t-1)(t-8) = 0$$

da cui

$$t = 1 \quad \vee \quad t = 8$$

Ritorniamo all'incognita x ponendo $t = x^3$:

$$x^3 = 1 \quad \vee \quad x^3 = 8 \quad \Longrightarrow \quad x = 1 \quad \vee \quad x = 2$$

Quindi:

$$\mathcal{S} = \{1, 2\}$$

□

Esercizio 7. Risolvi l'equazione $x^4 + 2x^2 + 1 = 0$.

Soluzione. Cambiamo la variabile ponendo $x^2 = t$:

$$t^2 + 2t + 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad (t+1)^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad t + 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad t = -1$$

Tornando alla prima variabile troviamo l'equazione binomia

$$x^2 = -1$$

che non ha soluzione. Dunque l'equazione data non ha soluzione:

$$\mathcal{S} = \emptyset$$

□

Esercizio 8. Risolvi l'equazione $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$.

Soluzione. Cambiamo la variabile ponendo $x^2 = t$.

$$t^2 - 2t + 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad (t-1)^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad t - 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad t = 1$$

Torniamo alla prima variabile:

$$x^2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad x = \pm 1$$

Quindi:

$$\mathcal{S} = \{-1, 1\}$$

□

Esercizio 9. Risolvi l'equazione $x^4 + x^2 + 1 = 0$.

Soluzione. Cambiamo la variabile ponendo $x^2 = t$:

$$t^2 + t + 1 = 0$$

che non ha soluzioni, perché $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0$. Di conseguenza nemmeno l'equazione data ne ha:

$$\mathcal{S} = \emptyset$$

□

1.3 EQUAZIONI SCOMPONIBILI

Tramite opportune scomposizioni si può spesso ricondurre un'equazione di grado superiore al secondo a prodotti di polinomi di primo e secondo grado, o a equazioni binomie e trinomie. Si procede come segue:

- si portano tutti i termini al primo membro
- si scompone il polinomio al primo membro con uno dei metodi noti (raccoglimento totale, raccoglimento parziale, quadrato di un binomio, differenza tra due quadrati, trinomio speciale, regola di Ruffini)
- si applica la legge di annullamento del prodotto, uguagliando a zero ciascun fattore
- si mettono insieme tutte le soluzioni trovate

Vediamo come funziona il procedimento attraverso qualche esempio.

Esercizio 10. Risolvi l'equazione $x^3 - 9x = 0$.

Soluzione. Scomponiamo in fattori il polinomio al primo membro con un raccoglimento totale e poi con la differenza di quadrati:

$$x^3 - 9x = 0 \quad \Longrightarrow \quad x(x^2 - 9) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x(x-3)(x+3) = 0$$

Uguagliamo a zero ciascun fattore:

$$x = 0 \quad \vee \quad x - 3 = 0 \quad \vee \quad x + 3 = 0$$

da cui

$$x = 0 \quad \vee \quad x = 3 \quad \vee \quad x = -3$$

Quindi:

$$\mathcal{S} = \{-3, 0, 3\}$$

□

Esercizio 11. Risolvi l'equazione $x^3 - 3x = 0$.

Soluzione. Scomponiamo in fattori il polinomio al primo membro con un raccoglimento totale:

$$x^3 - 3x = 0 \quad \Longrightarrow \quad x(x^2 - 3) = 0$$

Uguagliamo a zero ciascun fattore:

$$x = 0 \quad \vee \quad x^2 - 3 = 0$$

da cui

$$x = 0 \quad \vee \quad x = \pm\sqrt{3}$$

Mettiamo insieme le soluzioni:

$$\mathcal{S} = \left\{-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}\right\}$$

□

Esercizio 12. Risolvi l'equazione $x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0$.

Soluzione. Scomponiamo in fattori il polinomio al primo membro con un raccoglimento parziale e poi con la differenza di quadrati:

$$x^2(x+1) - 4(x+1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad (x+1)(x^2-4) = 0 \quad \Longrightarrow \quad (x+1)(x-2)(x+2) = 0$$

Uguagliamo a zero ciascun fattore:

$$x + 1 = 0 \quad \vee \quad x - 2 = 0 \quad \vee \quad x + 2 = 0$$

da cui

$$x = -1 \quad \vee \quad x = 2 \quad \vee \quad x = -2$$

Quindi:

$$\mathcal{S} = \{-2, -1, 2\}$$

□

Esercizio 13. Risolvi l'equazione $4x^3 + x^2 - 4x - 1 = 0$.

Soluzione. Scomponiamo in fattori il polinomio al primo membro:

$$x^2(4x+1)-(4x+1)=0 \quad \Longrightarrow \quad (4x+1)(x^2-1)=0 \quad \Longrightarrow \quad (4x+1)(x-1)(x+1)=0$$

Uguagliamo a zero ciascun fattore:

$$4x+1=0 \quad \vee \quad x-1=0 \quad \vee \quad x+1=0$$

da cui

$$x=-\frac{1}{4} \quad \vee \quad x=1 \quad \vee \quad x=-1$$

Quindi:

$$\mathcal{S}=\left\{-1,-\frac{1}{4},1\right\}$$

□

Esercizio 14. Risolvi l'equazione $x^4 - \frac{16}{9}x^2 = 0$.

Soluzione. Scomponiamo in fattori il polinomio al primo membro con un raccoglimento totale e poi con la differenza di quadrati:

$$x^4-\frac{16}{9}x^2=0 \quad \Longrightarrow \quad x^2\left(x^2-\frac{16}{9}\right)=0 \quad \Longrightarrow \quad x^2\left(x-\frac{4}{3}\right)\left(x+\frac{4}{3}\right)=0$$

Uguagliamo a zero ciascun fattore:

$$x^2=0 \quad \vee \quad x-\frac{4}{3}=0 \quad \vee \quad x+\frac{4}{3}=0$$

da cui

$$x=0 \quad \vee \quad x=\frac{4}{3} \quad \vee \quad x=-\frac{4}{3}$$

Quindi:

$$\mathcal{S}=\left\{-\frac{4}{3},0,\frac{4}{3}\right\}$$

□

Esercizio 15. Risolvi l'equazione $x^4 - 2x^2 = 0$.

Soluzione. Scomponiamo in fattori il polinomio al primo membro

$$x^4-2x^2=0 \quad \Longrightarrow \quad x^2(x^2-2)=0$$

Uguagliamo a zero ciascun fattore:

$$x^2 = 0 \quad \vee \quad x^2 - 2 = 0$$

da cui

$$x = 0 \quad \vee \quad x = \pm\sqrt{2}$$

Quindi:

$$\mathcal{S} = \left\{ -\sqrt{2}, 0, \sqrt{2} \right\}$$

□

Esercizio 16. Risolvi l'equazione $x^3 - 5x^2 + 4x = 0$.

Soluzione. Scomponiamo in fattori il polinomio al primo membro con un raccoglimento totale e poi con la regola del trinomio speciale:

$$x^3 - 5x^2 + 4x = 0 \quad \Longrightarrow \quad x(x^2 - 5x + 4) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x(x-4)(x-1) = 0$$

Uguagliamo a zero ciascun fattore:

$$x = 0 \quad \vee \quad x - 4 = 0 \quad \vee \quad x - 1 = 0$$

da cui

$$x = 0 \quad \vee \quad x = 4 \quad \vee \quad x = 1$$

Mettiamo insieme le soluzioni:

$$\mathcal{S} = \{0, 1, 4\}$$

□

Esercizio 17. Risolvi l'equazione $2x^3 + 3x^2 - 5x = 0$.

Soluzione. Raccogliamo x nel polinomio al primo membro:

$$2x^3 + 3x^2 + 5x = 0 \quad \Longrightarrow \quad x(2x^2 + 3x - 5) = 0$$

Uguagliamo a zero ciascun fattore:

$$x = 0 \quad \vee \quad 2x^2 + 3x - 5 = 0$$

Risolviamo l'equazione di secondo grado:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-5)}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 40}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{-3 \pm 7}{4}$$

da cui

$$x = \frac{-3-7}{4} = -\frac{10}{4} = -\frac{5}{2} \quad \vee \quad x = \frac{-3+7}{4} = 1$$

Mettiamo insieme le soluzioni:

$$\mathcal{S} = \left\{ -\frac{5}{2}, 0, 1 \right\}$$

□

Esercizio 18. Risolvi l'equazione $2x^3 - x^2 - x = 0$.

Soluzione. Raccogliamo x nel polinomio al primo membro:

$$2x^3 - x^2 - x = 0 \quad \Longrightarrow \quad x(2x^2 - x - 1) = 0$$

Uguagliando a zero ciascun fattore:

$$x = 0 \quad \vee \quad 2x^2 - x - 1 = 0$$

Risolviamo l'equazione di secondo grado:

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4}$$

da cui

$$x = \frac{1-3}{4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2} \quad \vee \quad x = \frac{1+3}{4} = 1$$

Mettiamo insieme le soluzioni:

$$\mathcal{S} = \left\{ -\frac{1}{2}, 0, 1 \right\}$$

□

Esercizio 19. Risolvi l'equazione $6x^3 - x^2 - 2x = 0$.

Soluzione. Raccogliamo x nel polinomio al primo membro:

$$6x^3 - x^2 - 2x = 0 \quad \Longrightarrow \quad x(6x^2 - x - 2) = 0$$

Uguagliamo a zero ciascun fattore:

$$x = 0 \quad \vee \quad 6x^2 - x - 2 = 0$$

Risolviamo l'equazione di secondo grado:

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-2)}}{2 \cdot 6} = \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{12} = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{12} = \frac{1 \pm 7}{12}$$

da cui

$$x = \frac{1-7}{12} = -\frac{6}{12} = -\frac{1}{2} \quad \vee \quad x = \frac{1+7}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

Mettiamo insieme le soluzioni:

$$\mathcal{S} = \left\{ -\frac{1}{2}, 0, \frac{2}{3} \right\}$$

□

Esercizio 20. Risolvi l'equazione $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$.

Soluzione. Scomponiamo il polinomio al primo membro $P(x)$ con la regola di Ruffini.

$$P(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 11 \cdot 1 - 6 = 1 - 6 + 11 - 6 = 0$$

quindi $P(x)$ si scompone come $(x-1)Q(x)$, con $Q(x)$ polinomio di secondo grado.

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & -6 & 11 & -6 \\ 1 & & 1 & -5 & 6 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & 0 \end{array}$$

Allora:

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x^2 - 5x + 6)$$

Per la regola del trinomio speciale l'equazione diventa:

$$(x-1)(x^2 - 5x + 6) = 0 \quad \Longrightarrow \quad (x-1)(x-2)(x-3) = 0$$

Uguagliamo a zero ciascun fattore:

$$x - 1 = 0 \quad \vee \quad x - 2 = 0 \quad \vee \quad x - 3 = 0$$

da cui

$$x = 1 \quad \vee \quad x = 2 \quad \vee \quad x = 3$$

In conclusione:

$$\mathcal{S} = \{1, 2, 3\}$$ □

Esercizio 21. Risolvi l'equazione $x^3 + x^2 - 10x + 8 = 0$.

Soluzione. Scomponiamo il polinomio al primo membro $P(x)$ con la regola di Ruffini.

$$P(1) = 1^3 + 1^2 - 10 \cdot 1 + 8 = 1 + 1 - 10 + 8 = 0$$

quindi $P(x)$ si scompone come $(x-1)Q(x)$, con $Q(x)$ polinomio di secondo grado.

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 1 & -10 & 8 \\ 1 & & 1 & 2 & -8 \\ \hline & 1 & 2 & -8 & 0 \end{array}$$

Quindi:

$$x^3 + x^2 - 10x + 8 = (x-1)(x^2+2x-8)$$

Per la regola del trinomio speciale l'equazione diventa:

$$(x-1)(x^2+2x-8) = 0 \quad \Longrightarrow \quad (x-1)(x-2)(x+4) = 0$$

Uguagliamo a zero ciascun fattore:

$$x-1=0 \quad \vee \quad x-2=0 \quad \vee \quad x+4=0$$

da cui

$$x=1 \quad \vee \quad x=2 \quad \vee \quad x=-4$$

In conclusione:

$$\mathcal{S} = \{-4, 1, 2\}$$

□

Esercizio 22. Risolvi l'equazione $x^3 - 7x^2 + 4x + 12 = 0$.

Soluzione. Scomponiamo il polinomio al primo membro $P(x)$ con la regola di Ruffini.

$$P(-1) = (-1)^3 - 7(-1)^2 + 4(-1) + 12 = -1 - 7 - 4 + 12 = 0$$

quindi $P(x)$ si scompone come $(x+1)Q(x)$, con $Q(x)$ polinomio di secondo grado.

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & -7 & 4 & 12 \\ -1 & & -1 & 8 & -12 \\ \hline & 1 & -8 & 12 & 0 \end{array}$$

Per la regola del trinomio speciale l'equazione diventa:

$$(x+1)(x^2-8x+12) = 0 \quad \Longrightarrow \quad (x+1)(x-6)(x-2) = 0$$

Uguagliamo a zero ciascun fattore:

$$x+1=0 \quad \vee \quad x-6=0 \quad \vee \quad x-2=0$$

da cui

$$x=-1 \quad \vee \quad x=6 \quad \vee \quad x=2$$

In conclusione:

$$\mathcal{S} = \{-1, 2, 6\}$$

□

Esercizio 23. Risolvi l'equazione $x^3 - 7x - 6 = 0$.

Soluzione. Scomponiamo il polinomio al primo membro $P(x)$ con la regola di Ruffini.

$$P(-1) = (-1)^3 - 7 \cdot (-1) - 6 = -1 + 7 - 6 = 0$$

quindi $P(x)$ si scompone come $(x+1)Q(x)$, con $Q(x)$ polinomio di secondo grado.

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 0 & -7 & -6 \\ -1 & & -1 & 1 & 6 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & 0 \end{array}$$

Quindi:

$$x^3 - 7x - 6 = (x+1)(x^2 - x - 6)$$

Per la regola del trinomio speciale l'equazione diventa:

$$x^3 - 7x - 6 = 0 \quad \Longrightarrow \quad (x+1)(x^2 - x - 6) = 0 \quad \Longrightarrow \quad (x+1)(x-3)(x+2) = 0$$

Uguagliando a zero ciascun fattore:

$$x + 1 = 0 \quad \vee \quad x - 3 = 0 \quad \vee \quad x + 2 = 0$$

da cui

$$x = -1 \quad \vee \quad x = 3 \quad \vee \quad x = -2$$

In conclusione:

$$\mathcal{S} = \{-2, -1, 3\}$$ □

1.4 ESERCIZI

Chi non risolve esercizi non impara la matematica.

Risolvi le seguenti equazioni binomie.

1 $81x^4 - 1 = 0$ $\left[\pm\frac{1}{3}\right]$

2 $81x^4 + 1 = 0$ [impossibile]

3 $81x^4 - 16 = 0$ $\left[\pm\frac{2}{3}\right]$

4 $x^4 - 1 = 0$ $[-1, 1]$

5 $16x^4 - 1 = 0$ $\left[\pm\frac{1}{2}\right]$

6 $16x^4 + 1 = 0$ [impossibile]

Risolvi le seguenti equazioni trinomie.

7 $x^4 - 8x^2 + 16 = 0$ $[\pm 2]$

8 $2x^4 - 20x^2 + 18 = 0$ $[-3, -1, 1, 3]$

9 $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ $[-3, -2, 2, 3]$

10 $x^4 - 2x^2 - 15 = 0$ $\left[-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right]$

11 $x^4 + 6x^2 + 9 = 0$ [impossibile]

12 $x^4 - 7x^2 + 6 = 0$ $\left[-\sqrt{6}, -1, 1, \sqrt{6}\right]$

13 $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$ $\left[-2, -\sqrt{3}, \sqrt{3}, 2\right]$

14 $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$ $\left[\pm\sqrt{3}\right]$

Risolvi le seguenti equazioni scomponibili.

15 $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$ $[-1, 1, 2]$

16 $x^3 - 2x^4 = 0$ $\left[0, \frac{1}{2}\right]$

17 $x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$ $[-3, -1, 1]$

18 $x^3 + 4x^2 + 4x = 0$ $[-2, 0]$

19 $x^3 - 4x^2 + 3x = 0$ $[0, 1, 3]$

20 $x^3 - 4x^2 + x - 4 = 0$ $[4]$

21 $x^3 + 3x^2 + 2x = 0$ $[-2, -1, 0]$

22 $x^3 - 3x^2 + 2x = 0$ $[0, 1, 2]$

23 $x^3 - 9x^2 + 8x = 0$ $[0, 1, 8]$

24 $x^3 + 2x^2 - 4x - 8 = 0$ $[-2, 2]$

25 $x^3 + x^2 - 9x - 9 = 0$ $[-3, -1, 3]$

26 $4x^3 + 4x^2 - 4x - 4 = 0$ $[-1, 1]$

27 $2x^3 + 3x^2 - 5x = 0$ $\left[-\frac{5}{2}, 0, 1\right]$

28 $6x^3 - x^2 - 2x = 0$ $\left[-\frac{1}{2}, 0, \frac{2}{3}\right]$

29 $6x^3 + 13x^2 + 6x = 0$ $\left[-\frac{3}{2}, -\frac{2}{3}, 0\right]$

30 $x^3 - 6x^2 + 9x = 0$ $[0, 3]$

31 $x^3 + x^2 + x = 0$ $[0]$

32 $x^3 - 2x^2 - 15x = 0$ $[-3, 0, 5]$

Risolvi le seguenti equazioni di grado superiore al secondo dopo aver scomposto il polinomio a primo membro con la regola di Ruffini.

33 $12x^3+x^2-10x-3=0$ $\left[-\frac{3}{4}, -\frac{1}{3}, 1\right]$

34 $x^3-2x^2-5x+6=0$ $[-2, 1, 3]$

35 $x^3+6x^2-x-30=0$ $[-5, -3, 2]$

36 $x^3+4x^2+x-6=0$ $[-3, -2, 1]$

37 $x^3+5x^2-2x-24=0$ $[-4, -3, 2]$

38 $x^3-7x^2+4x+12=0$ $[-1, 2, 6]$

39 $x^3-3x+2=0$ $[-2, 1]$

40 $x^3+2x^2+2x+1=0$ $[-1]$

41 $6x^3-7x^2-x+2=0$ $\left[-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1\right]$

42 $x^3+3x^2+4x+4=0$ $[-2]$

43 $6x^3+7x^2-7x-6=0$ $\left[-\frac{3}{2}, -\frac{2}{3}, 1\right]$

44 $2x^3+5x^2+5x+2=0$ $[-1]$

45 $x^3-3x^2+3x-1=0$ $[1]$

46 $2x^4-5x^3+5x-2=0$ $\left[-1, \frac{1}{2}, 1, 2\right]$

Risolvi le seguenti equazioni.

47 $x^4-3x^2+2=0$ $\left[\pm 1, \pm\sqrt{2}\right]$

48 $x^4-9x^2+20=0$ $\left[\pm 2, \pm\sqrt{5}\right]$

49 $x^4+x^2-6=0$ $\left[\pm\sqrt{2}\right]$

50 $9x^4-2x^2=0$ $\left[0, \pm\sqrt{2}/3\right]$

51 $9x^3-9x^2-x+1=0$ $[\pm 1/3, 1]$

52 $4x^4-3x^2=0$ $\left[0, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

53 $4x^3-4x^2-x+1=0$ $\left[1, \pm\frac{1}{2}\right]$

54 $27x^4-27x^3+9x^2-x=0$ $\left[0, \frac{1}{3}\right]$

55 $4x^4-3x^2-1=0$ $[\pm 1]$

56 $x^4-10x^2+9=0$ $[\pm 1, \pm 3]$

57 $8x^6-7x^3-1=0$ $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$

58 $x^6-9x^3+8=0$ $[1, 2]$

59 $x^8-5x^4+4=0$ $\left[\pm 1, \pm\sqrt{2}\right]$

60 $x^3+9x^2=0$ $[-9, 0]$

61 $x^7+12x^6+35x^5=0$ $[-7, -5, 0]$

62 $x^5+3x^4-x-3=0$ $[-3, -1, 1]$

63 $x^3+6x^2+11x+6=0$ $[-3, -2, -1]$

64 $x^3+8x^2+11x-20=0$ $[-5, -4, 1]$

65 $x^3+6x^2+5x=0$ $[-5, -1, 0]$

66 $x^3-3x^2+x-3=0$ $[3]$

67 $x^5-16x=0$ $[0, \pm 2]$

68 $x^3+2x^2-3x-6=0$ $\left[-2, \pm\sqrt{3}\right]$

69 $9x^4-x^2=0$ $\left[0, \pm\frac{1}{3}\right]$

70 $16x^4-9=0$ $\left[\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

71 $4x^4-25x^2+36=0$ $\left[\pm 2, \pm\frac{3}{2}\right]$

72 $x^4+4x^2+3=0$ [impossibile]

73 $x^4+9x^2+20=0$ [impossibile]

74 $x^4-3x^2-4=0$ $[\pm 2]$

75 $9x^4+6x^2+1=0$ [impossibile]

76 $x^4=81$ $[\pm 3]$

77 $x^6+12=0$ [impossibile]

78 $x^5=32$ $[2]$

79 $x^5=-32$ $[-2]$

80 $x^6-9x^3+8=0$ $[1, 2]$

81 $x^4+25=0$ [impossibile]

82 $x^4-8x^2-9=0$ $[\pm 3]$

83 $x^4+x^2-20=0$ $[\pm 2]$

84 $x^4+225=0$ [impossibile]

85 $x^6-8x^3+16=0$ $\left[\sqrt[3]{4}\right]$

86 $x^4-5x^2+6=0$ $\left[\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{3}\right]$

87 $x^{10}+64=0$ [impossibile]

88 $x^{100}+49=0$ [impossibile]

89 $2x^4 - 3x^3 - 12x^2 + 7x + 6 = 0$ $\left[-2, -\frac{1}{2}, 1, 3\right]$

90 $2x^4 - 7x^3 + x^2 + 7x - 3 = 0$ $\left[\pm 1, \frac{1}{2}, 3\right]$

91 $4x^4 + 4x^3 - 19x^2 - 16x + 12 = 0$ $\left[\frac{1}{2}, \pm 2, -\frac{3}{2}\right]$

92 $2x^5 + x^4 - 11x^3 + 7x^2 - 13x + 6 = 0$ $\left[-3, \frac{1}{2}, 2\right]$

93 Indica la risposta corretta.

a. Le soluzioni dell'equazione $x^3 - 5x^2 - 4x + 20 = 0$ sono:

A $x = \pm 2 \vee x = -5$

B $x = \pm 2 \vee x = 5$

C $x = \pm 4 \vee x = 5$

D nessuna delle precedenti

b. Le soluzioni dell'equazione $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ sono:

A $x = 1$

B $x = -1$

C $x = \pm 1$

D nessuna delle precedenti

c. Le soluzioni dell'equazione $x^6 - x^2 = 0$ sono:

A $x = 0 \vee x = \pm 1$

B $x = \pm 1$

C $x = -1 \vee x = 0$

D nessuna delle precedenti

d. Le soluzioni dell'equazione $x^4 - 8x^2 + 16 = 0$ sono:

A $x = \pm 2$

B $x = -2$

C $x = 2$

D nessuna delle precedenti

e. L'equazione $8x^3 + 1 = 0$:

A è impossibile

B ha due soluzioni distinte

C ha solo la soluzione $x = 1/2$

D ha solo la soluzione $x = -1/2$

f. L'equazione $16x^4 + 81 = 0$:

A ha per soluzioni $x = \pm 3/2$

B ha per soluzioni $x = \pm 9/4$

C è impossibile

D nessuna delle precedenti

g. La legge di annullamento del prodotto dice che un prodotto di due o più fattori è uguale a zero se:

- A tutti i fattori sono uguali a zero
- B un solo fattore è uguale a zero
- C almeno uno dei fattori è uguale zero
- D nessuna delle precedenti

[Due risposte A, due B, due C e una D]

94 Indica la risposta corretta.

a. Un'equazione di grado n ha:

- A sempre n soluzioni
- B almeno una soluzione
- C al massimo n soluzioni
- D nessuna delle precedenti

b. L'equazione $x^3 = 1$ ha come soluzioni:

- A solo $x = 1$
- B solo $x = -1$
- C sia $x = -1$ che $x = 1$
- D nessuna soluzione

c. L'equazione $x^3 = -1$ ha come soluzioni:

- A solo $x = 1$
- B solo $x = -1$
- C sia $x = -1$ che $x = 1$
- D nessuna soluzione

d. L'equazione $x^4 = 1$ ha come soluzioni:

- A solo $x = 1$
- B solo $x = -1$
- C sia $x = -1$ che $x = 1$
- D nessuna soluzione

e. L'equazione $x^4 = -1$ ha come soluzioni:

- A solo $x = 1$
- B solo $x = -1$
- C sia $x = -1$ che $x = 1$
- D nessuna soluzione

f. L'equazione $x^6 - 5x^3 + 6 = 0$ si può trasformare in un'equazione di secondo grado in t ponendo:

- A $t = x$
- B $t = x^2$
- C $t = x^3$
- D $t = x^6$

g. L'equazione $(x^2 - 4)(x^2 - 9) = 0$ ha come soluzioni:

A $x = \pm 2 \vee x = \pm 3$

B $x = 4$

C $x = 9$

D è impossibile

[Due risposte A, una B, tre C e una D]

95 Indica la risposta corretta.

a. L'equazione $(x-1)^{10} = 0$ ha come soluzioni:

A nessuna soluzione

B sia $x = -1$ che $x = 1$

C solo $x = 1$

D solo $x = -1$

b. L'equazione $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$ ha tra le sue soluzioni:

A $x = -1$ B $x = 0$ C $x = 1$ D $x = 2$

c. L'equazione $x^6 - 8 = 0$ ha:

A una sola soluzione $x = \sqrt[6]{8}$

B due soluzioni distinte $x = \pm\sqrt{8}$

C due soluzioni distinte $x = \pm\sqrt{2}$

D nessuna delle precedenti

d. Le soluzioni dell'equazione $2x^4 - 5x^3 + 5x - 2 = 0$ sono:

A $x = \pm 2 \vee x = \pm 5$

B $x = \pm 1 \vee x = 1/2 \vee x = 2$

C $x = \pm 1 \vee x = -1/2 \vee x = 2$

D nessuna delle precedenti

e. L'equazione $kx^6 - 1 = 0$ ha:

A due soluzioni $\forall k \in \mathbb{R}$

B due soluzioni $\forall k > 0$

C due soluzioni $\forall k \neq 0$

D due soluzioni $\forall k < 0$

f. Quale delle seguenti equazioni può essere definita trinomia?

A $x^6 + 2x^4 - 1 = 0$

B $3x^4 + 3x + 3 = 0$

C $2x^3 + x^3 = 3$

D nessuna delle precedenti

g. L'equazione $2x^3 - 54 = 0$ ha per soluzioni:

A $x = 3$ B $x = \pm 3$ C $x = \pm 27$ D $x = \sqrt{27}$

[Una risposta A, due B, due C e due D]

96 Indica la risposta corretta.

a. L'equazione $x^3 = k$ ha soluzioni:

A solo per $k > 0$ | C per ogni valore di k
B solo per $k < 0$ | D per nessun valore di k

b. L'equazione $2x^6 - 18x^3 + 16 = 0$ ha per soluzioni:

A $x = 1 \vee x = 2$ | C $x = \pm\sqrt{2}$
B $x = \pm 1 \vee x = \pm 2$ | D $x = \sqrt[3]{2}$

c. L'equazione $10\,000x^4 - 1 = 0$ ha per soluzioni:

A $x = \pm 10$ | B $x = \pm 0{,}1$ | C $x = \pm 100$ | D $x = \pm 0{,}01$

d. L'equazione $32x^6 - 2x^2 = 0$ ha per soluzioni:

A $x = 0 \vee x = \pm 6$ | C $x = 0 \vee x = \pm 16$
B $x = 0 \vee x = \pm 4$ | D $x = 0 \vee x = \pm 1/2$

e. L'equazione $x^3 + 3x^2 - 2x - 6 = 0$ ha per soluzioni:

A $x = -3 \vee x = \pm\sqrt{2}$ | C $x = \pm 3 \vee x = -2$
B $x = -3 \vee x = 2$ | D $x = \pm\sqrt{3} \vee x = \pm\sqrt{2}$

f. Quale delle seguenti equazioni ha tre soluzioni distinte?

A $x^3 = 3x$ | B $x^3 = 3$ | C $x^3 + 3x = 0$ | D $x^3 - 3x^2 = 0$

g. L'equazione $2x^6 - 128 = 0$ ha per soluzioni:

A $x = 2$ | B $x = -2$ | C $x = \pm 2$ | D impossibile

[Tre risposte A, una B, due C e una D]

97 Indica la risposta corretta.

a. L'insieme soluzione dell'equazione $x^4 - 4x^2 = 0$ è:

A $\{0, 1, 4\}$ | B $\{0, \pm 2, 4\}$ | C $\{0, 2\}$ | D $\{0, \pm 2\}$

b. L'insieme soluzione dell'equazione $x^4 + 6x^2 + 9 = 0$ è:

$\boxed{A}$ $\{\pm 2, \pm 3\}$ $\boxed{B}$ $\emptyset$ $\boxed{C}$ $\{\pm 2, \pm 3\}$ $\boxed{D}$ $\mathbb{R}$

c. L'insieme soluzione dell'equazione $x^{10} - 31x^5 - 32 = 0$ è:

$\boxed{A}$ $\{\pm 1, \pm 2\}$ $\boxed{B}$ $\{\pm 1\}$ $\boxed{C}$ $\{\pm 2\}$ $\boxed{D}$ $\{-1, 2\}$

d. L'insieme soluzione dell'equazione $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ è:

$\boxed{A}$ $\{1, 2\}$ $\boxed{B}$ $\{-2, -1\}$ $\boxed{C}$ $\{-2, 1\}$ $\boxed{D}$ $\{\pm 1, \pm 2\}$

e. L'insieme soluzione dell'equazione $(x-1)^3 - (x-1)^2 = x - 2$ è:

$\boxed{A}$ $\{0, 1, 2\}$ $\boxed{B}$ $\{0, 2\}$ $\boxed{C}$ $\{-1, 0, 1\}$ $\boxed{D}$ $\{-1, 0, 2\}$

f. L'insieme soluzione dell'equazione $x^3 + 6x^2 + 5x = 0$ è:

$\boxed{A}$ $\{-1, 0, 3\}$ $\boxed{B}$ $\{-5, -1, 3\}$ $\boxed{C}$ $\{-5, -1, 0\}$ $\boxed{D}$ $\{0, 1, 5\}$

g. L'insieme soluzione dell'equazione $x^5 - 16x = 0$ è:

$\boxed{A}$ $\{0, \pm 2\}$ $\boxed{B}$ $\{0, \pm 4\}$ $\boxed{C}$ $\{0, 2\}$ $\boxed{D}$ $\{-2, 0\}$

[Una risposta A, due B, una C e tre D]

2 DISEQUAZIONI

2.1 INTERVALLI SULLA RETTA REALE

Definizione 1. Dati due numeri reali a e b, con $a < b$, si chiamano *intervalli* i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$:

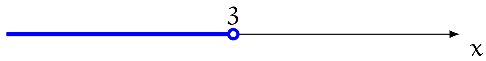
- $(a, b) = \{ a < x < b \}$ intervallo aperto e limitato (a e b sono esclusi)
- $[a, b] = \{ a \leqslant x \leqslant b \}$ intervallo chiuso e limitato (a e b sono inclusi)
- $[a, b) = \{ a \leqslant x < b \}$ intervallo chiuso a sinistra e aperto a destra, e limitato (a è incluso, b è escluso)
- $(a, b] = \{ a < x \leqslant b \}$ intervallo aperto a sinistra e chiuso a destra, e limitato (a è escluso, b è incluso)
- $(a, +\infty) = \{ x > a \}$ intervallo aperto e superiormente illimitato (a è escluso)
- $[a, +\infty) = \{ x \geqslant a \}$ intervallo chiuso e superiormente illimitato (a è incluso)
- $(-\infty, a) = \{ x < a \}$ intervallo aperto e inferiormente illimitato (a è escluso)
- $(-\infty, a] = \{ x \leqslant a \}$ intervallo chiuso e inferiormente illimitato (a è escluso)

I numeri a e b si chiamano *estremi* dell'intervallo.

Ciascuno degli intervalli così definiti si può rappresentare sulla retta reale: gli intervalli limitati corrispondono a segmenti e quelli illimitati a semirette. Vediamo qualche esempio.

Esercizio 24. Rappresenta graficamente l'intervallo $(-\infty, 3) = \{ x < 3 \}$.

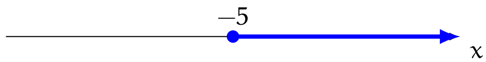
Soluzione. Segniamo sulla retta reale il punto 3. L'intervallo è rappresentato da tutti i punti della semiretta che precedono il numero 3, *escluso* 3.



Abbiamo disegnato con una linea più spessa la semiretta dei punti che appartengono all'intervallo. Per mettere in evidenza che 3 *non appartiene* alla semiretta abbiamo messo un *pallino vuoto* sul punto. □

Esercizio 25. Rappresenta graficamente l'intervallo $[-5, +\infty) = \{\, x \geqslant -5 \,\}$.

Soluzione. Segniamo sulla retta reale il punto -5; l'intervallo è rappresentato dalla semiretta di tutti i punti che seguono -5, *incluso* lo stesso -5.



Abbiamo disegnato con una linea più spessa la semiretta dei punti che appartengono all'intervallo. Per indicare che il punto -5 *appartiene* all'intervallo abbiamo messo un *pallino pieno* sul punto. □

Esercizio 26. Rappresenta graficamente l'intervallo $(-2, 6) = \{\, -2 < x < 6 \,\}$.

Soluzione. Segniamo sulla retta reale i punti -2 e 6. L'intervallo è rappresentato dal segmento che ha per estremi questi due punti.

Abbiamo come al solito disegnato il segmento con una linea più spessa. Poiché i due estremi del segmento sono esclusi, su ciascuno di essi abbiamo messo un pallino vuoto. □

Esercizio 27. Rappresenta graficamente l'intervallo $(-2, 6] = \{\, -2 < x \leqslant 6 \,\}$.

Soluzione. Rispetto al caso precedente, il segmento che rappresenta l'intervallo è "chiuso a destra", cioè il punto 6 è incluso nell'intervallo, mentre il punto -2 è escluso.

La figura precedente rappresenta l'intervallo. □

Esercizio 28. Rappresenta graficamente l'intervallo $[2, 6] = \{\, -2 \leqslant x \leqslant 6 \,\}$.

Soluzione. Il segmento che rappresenta l'intervallo contiene tutti e due i suoi estremi.

La figura precedente rappresenta l'intervallo. □

2.2 DISEGUAGLIANZE E DISEQUAZIONI

Consideriamo le seguenti proposizioni:

- «1 è minore di 2»
- «3 è un numero negativo»
- «il quadrato di un numero reale è maggiore o uguale a zero»
- «togliendo 2 da un numero, si ottiene un numero positivo»

Esse si possono tradurre in linguaggio matematico usando i simboli $>$ (maggiore), $<$ (minore), $\geqslant$ (maggiore o uguale) e $\leqslant$ (minore o uguale). Precisamente:

- $1 < 2$
- $3 < 0$
- $x^2 \geqslant 0$
- $x - 2 > 0$

Le formule che contengono solo numeri (come le prime due) si dicono *diseguaglianze*; quelle che contengono numeri e variabili (come le ultime due) si dicono *disequazioni*.

Definizione 2. Chiamiamo *disuguaglianza* una formula contenente solo numeri e uno dei simboli $<$ (minore), $>$ (maggiore), $\leqslant$ (minore o uguale), $\geqslant$ (maggiore o uguale).

Definizione 3. Chiamiamo *disequazione* una formula contenente numeri, variabili e uno dei simboli $<$ (minore), $>$ (maggiore), $\leqslant$ (minore o uguale), $\geqslant$ (maggiore o uguale).

Una diseguaglianza è o vera o falsa: per esempio, la disuguaglianza $1 < 2$ è vera, mentre $3 < 0$ è falsa. Una disequazione, invece, in generale è vera per certi valori sostituiti alla variabile e falsa per altri. Per esempio, la disequazione $x - 2 > 0$ è vera se $x = 3$, ma è falsa se $x = 1$.

Definizione 4. L'insieme dei valori che sostituiti all'incognita trasformano la disequazione in una disuguaglianza vera è l'*insieme soluzione* della disequazione (lo indicheremo con $\mathcal{S}$). *Risolvere una disequazione* significa trovarne l'insieme soluzione.

Definizione 5. Chiamiamo *incognite* le variabili che compaiono nella disequazione, e chiamiamo *primo membro* e *secondo membro* le due espressioni che compaiono rispettivamente a sinistra e a destra del simbolo di disuguaglianza.

2.3 PRINCIPI DI EQUIVALENZA

Vediamo come risolvere una disequazione, cioè come trovarne l'insieme soluzione. Premettiamo la seguente definizione:

Definizione 6. Due disequazioni si dicono *equivalenti* se hanno lo stesso insieme soluzione.

Principio 1 (Primo principio di equivalenza)**.** Sommando o sottraendo a ciascuno dei due membri di una disequazione uno stesso numero, si ottiene una disequazione equivalente a quella data.

Questo principio ci permette in pratica di "spostare" un addendo da un membro all'altro della disequazione cambiandogli segno, o di eliminare da entrambi i membri gli addendi uguali.

Principio 2 (Secondo principio di equivalenza)**.** Moltiplicando o dividendo ciascuno dei due membri di una disequazione per uno stesso numero *positivo*, si ottiene una disequazione equivalente a quella data.

Principio 3 (Terzo principio di equivalenza)**.** Moltiplicando o dividendo ciascuno dei due membri di una disequazione per uno stesso numero *negativo*, si ottiene una disequazione equivalente alla data ma *con il verso cambiato*.

Nei paragrafi successivi vedremo come risolvere una disequazione applicando i tre principi delle disequazioni.

2.4 DISEQUAZIONI LINEARI

Definizione 7. Una disequazione si dice *intera* se, eventualmente dopo aver applicato i principi di equivalenza, è riconducibile a una delle seguenti *forme normali*:

$$P(x) \geqslant 0 \qquad P(x) > 0 \qquad P(x) \leqslant 0 \qquad P(x) < 0$$

dove $P(x)$ è un polinomio. Si dice *grado* della disequazione il grado di $P(x)$. Una disequazione di primo grado si dice *lineare*.

Per esempio:

- $2x - 4 > 0$ è una disequazione lineare
- $x^2 - 4x + 3 \geqslant 0$ è una disequazione di secondo grado
- $x^3 + x^2 + x + 1 < 0$ è una disequazione di terzo grado

In questo paragrafo studieremo le disequazioni lineari, i cui coefficienti sono numeri razionali. Per risolvere una disequazione di questo tipo si procede come segue:

- si portano tutti i termini con l'incognita al primo membro e tutti i termini noti al secondo membro
- si sommano i monomi simili
- si dividono entrambi i membri per il coefficiente dell'incognita (*cambiando il verso* della disequazione se tale coefficiente è *negativo*)
- si semplificano le frazioni e si scrive l'insieme soluzione

Esercizio 29. Risolvi la disequazione $5x - 2 > 3x + 4$.

Soluzione.

- Portiamo a sinistra i termini con l'incognita e a destra i termini noti, cambiando il segno quando passiamo da un membro all'altro:

$$5x - 3x > 2 + 4$$

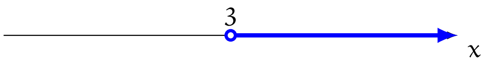
- Sommiamo i monomi simili:

$$2x > 6$$

- Dividiamo entrambi i membri per il coefficiente della x, applicando il secondo principio delle disequazioni. È fondamentale osservare che tale coefficiente è 2, che è un numero *positivo*: quindi il verso della disequazione *non cambia*.

$$\frac{2x}{2} > \frac{6}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad x > 3$$

- Quindi l'insieme soluzione è l'intervallo:



$$\mathcal{S} = \{\, x > 3 \,\} = (3, +\infty)$$ □

Esercizio 30. Risolvi la disequazione $3x + 1 > 5x + 5$.

Soluzione.

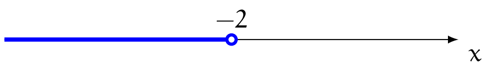
- Portiamo a sinistra i termini con l'incognita e a destra i termini noti, cambiando il segno quando passiamo da un membro all'altro:

$$3x - 5x > 5 - 1 \qquad \Longrightarrow \qquad -2x > 4$$

- Il coefficiente dell'incognita è *negativo*. Dividiamo entrambi i membri per -2 e *cambiamo il verso* della disequazione, applicando il terzo principio delle disequazioni:

$$\frac{-2x}{-2} < \frac{4}{-2} \qquad \Longrightarrow \qquad x < -2$$

- L'insieme soluzione è l'intervallo:



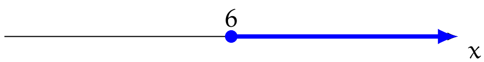
$$\mathcal{S} = \{\, x < -2 \,\} = (-\infty, -2)$$ □

Esercizio 31. Risolvi la disequazione $4(2x - 1) + 4 \geqslant -2(-3x - 6)$.

Soluzione. Svolgiamo i calcoli:

$$8x - 4 + 4 \geqslant 6x + 12 \qquad \Longrightarrow \qquad 8x - 6x \geqslant 12 \qquad \Longrightarrow \qquad 2x \geqslant 12 \qquad \Longrightarrow \qquad x \geqslant 6$$

L'insieme soluzione è l'intervallo:



$$\mathcal{S} = \{\, x \geqslant 6 \,\} = [6, +\infty)$$ □

Esercizio 32. Risolvi la disequazione $\dfrac{(x+1)^2}{4} - \dfrac{2+3x}{2} \geqslant \dfrac{(x-1)^2}{4}$.

Soluzione.

- Sommiamo le frazioni algebriche:

$$\frac{(x+1)^2 - 2(2+3x)}{4} \geqslant \frac{(x-1)^2}{4}$$

Moltiplichiamo entrambi i membri per 4, che è un numero positivo:

$$\frac{(x+1)^2 - 2(2+3x)}{\cancel{4}} \geqslant \frac{(x-1)^2}{\cancel{4}} \quad \Longrightarrow \quad (x+1)^2 - 2(2+3x) \geqslant (x-1)^2$$

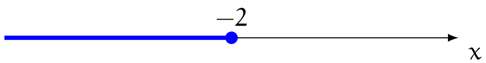
- Svolgiamo i calcoli:

$$\cancel{x^2} + 2x + 1 - 4 - 6x \geqslant \cancel{x^2} - 2x + 1 \quad \Longrightarrow \quad 2x + 2x - 6x \geqslant 4 \quad \Longrightarrow \quad -2x \geqslant 4$$

- Il coefficiente dell'incognita è negativo. Dividiamo entrambi i membri per -2 cambiando il verso della disequazione:

$$\frac{-2}{-2}x \leqslant \frac{4}{-2} \quad \Longrightarrow \quad x \leqslant -2$$

- Quindi:



$$\mathcal{S} = \{\, x \leqslant -2 \,\} = (-\infty, -2]$$ □

Esercizio 33. Risolvi la disequazione $\dfrac{1}{2}(x+5) - x > \dfrac{1}{2}(3-x)$.

Soluzione.

- Sommiamo le frazioni algebriche:

$$\frac{x+5-2x}{2} > \frac{3-x}{2}$$

Moltiplichiamo entrambi i membri per 2, che è un numero positivo:

$$\frac{x+5-2x}{\cancel{2}} > \frac{3-x}{\cancel{2}} \quad \Longrightarrow \quad x + 5 - 2x > 3 - x \quad \Longrightarrow \quad 0 > -2$$

- Come si vede, l'incognita x *è scomparsa*. Abbiamo ricondotto la disequazione a una disuguaglianza *vera*. Quindi la disequazione è *indeterminata*, cioè è verificata qualunque sia il valore dell'incognita x:

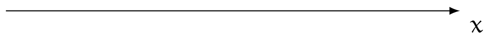
$$\mathcal{S} = \mathbb{R}$$ □

Esercizio 34. Risolvi la disequazione $(x+2)^2 - 4(x+1) < x^2 - 1$.

Soluzione. Svolgiamo i calcoli:

$$x^2 + 4x + 4 - 4x - 4 < x^2 - 1 \quad \Longrightarrow \quad 0 < -1$$

che è una disuguagolianza *falsa*. Dunque la disequazione è *impossibile*, cioè non ha soluzioni:



$$\mathcal{S} = \emptyset$$

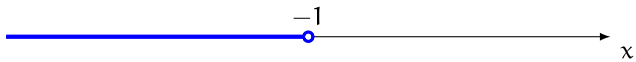
□

Esercizio 35. Risolvi la disequazione $(x-1)^2 + 5x < x^2 - 2$.

Soluzione. Svolgiamo i calcoli:

$$\cancel{x^2} - 2x + 1 + 5x < \cancel{x^2} - 2 \quad \Longrightarrow \quad -2x + 5x < -2 - 1 \quad \Longrightarrow \quad 3x < -3 \quad \Longrightarrow \quad x < -1$$

Quindi:



$$\mathcal{S} = \{\, x < -1 \,\} = (-\infty, -1)$$

□

Esercizio 36. Risolvi la disequazione $\dfrac{2x-3}{2} \geqslant 1 - \dfrac{x+3}{10}$.

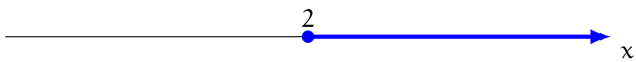
Soluzione. Il mcm dei denominatori è 10. Quindi:

$$\frac{5(2x-3)}{10} \geqslant \frac{10-(x+3)}{10}$$

Moltiplichiamo entrambi i membri per 10, che è un numero positivo:

$$5(2x-3) \geqslant 10 - (x+3) \quad \Longrightarrow \quad 10x - 15 \geqslant 10 - x - 3 \quad \Longrightarrow \quad 11x \geqslant 22 \quad \Longrightarrow \quad x \geqslant 2$$

Quindi:



$$\mathcal{S} = \{\, x \geqslant 2 \,\} = [2, +\infty)$$

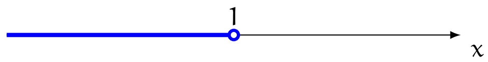
□

Esercizio 37. Risolvi la disequazione $6x + 1 > 34x - 27$.

Soluzione. Portiamo a sinistra i termini con l'incognita e a destra i termini noti:

$$6x - 34x > -27 - 1 \quad \Longrightarrow \quad -28x > -28 \quad \Longrightarrow \quad x < 1$$

Quindi:



$$\mathcal{S} = \{\, x < 1 \,\} = (-\infty, 1) \qquad \square$$

Nell'esercizio precedente avremmo potuto ricavare, portando le x a destra e i termini noti a sinistra:

$$1 + 27 > 34x - 6x \quad \Longrightarrow \quad 28 > 28x$$

Leggendo la relazione da destra a sinistra:

$$28x < 28 \quad \Longrightarrow \quad x < 1$$

che coincide con il risultato precedente. In generale, si può isolare l'incognita in modo che il suo coefficiente risulti positivo, portandola nel membro più opportuno.

Esercizio 38. Risolvi la disequazione $\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right) < \frac{x+3}{6}$.

Soluzione. Svolgiamo i calcoli:

$$\frac{1}{2}x - \frac{1}{6} - \frac{1}{3}x + \frac{1}{6} < \frac{x+3}{6}$$

Il mcm dei denominatori è 6. Quindi:

$$\frac{3x - 1 - 2x + 1}{6} < \frac{x+3}{6} \quad \Longrightarrow \quad 3x - 1 - 2x + 1 < x + 3 \quad \Longrightarrow \quad 0 < 3$$

La disequazione si riduce dunque alla disuguaglianza $0 < 3$, che è vera. Quindi la disequazione è indeterminata, cioè è verificata qualunque sia il valore dell'incognita x:

$$\mathcal{S} = \mathbb{R} \qquad \square$$

Se nella disequazione precedente ci fosse stato $>$ al posto di $<$, avremmo ottenuto la disuguaglianza $0 > 3$, che è falsa. Dunque la disequazione non avrebbe avuto soluzioni, ossia $S = \emptyset$.

Esercizio 39. Risolvi $\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(x+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{16}-x \geqslant \left(x-\frac{1}{5}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{10}$.

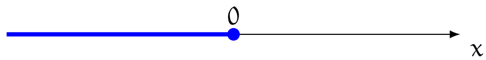
Soluzione. Svolgiamo i calcoli:

$$\cancel{x^2}-\frac{1}{16}+\frac{1}{16}-x \geqslant \cancel{x^2}+\frac{1}{2}x-\frac{1}{5}x-\frac{1}{10}+\frac{1}{10} \quad \Longrightarrow \quad -x \geqslant \frac{1}{2}x-\frac{1}{5}x$$

Il mcm dei denominatori è 10:

$$\frac{-10x}{10} \geqslant \frac{5x-2x}{10} \quad \Longrightarrow \quad -10x \geqslant 5x-2x \quad \Longrightarrow \quad -13x \geqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad x \leqslant 0$$

Quindi:



$$\mathcal{S} = \{\, x \leqslant 0 \,\} = (-\infty, 0] \qquad \square$$

2.5 DISEQUAZIONI DI SECONDO GRADO

Definizione 8. Una disequazione di secondo grado è detta *in forma normale* se si presenta in una delle seguenti forme:

$$ax^2+bx+c \geqslant 0 \qquad ax^2+bx+c > 0 \qquad ax^2+bx+c \leqslant 0 \qquad ax^2+bx+c < 0$$

dove a, b e c sono numeri reali, con $a \neq 0$.

Si può sempre portare una disequazione di secondo grado in forma normale, trasportando tutti i termini al primo membro e sommando i monomi simili.

Esercizio 40. Porta la disequazione $-x^2-2x \geqslant -2x^2+2x-3$ in forma normale.

Soluzione. Trasportiamo a sinistra tutti i termini e sommiamo i monomi simili:

$$2x^2-x^2-2x-2x+3 \geqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad x^2-4x+3 \geqslant 0 \qquad \square$$

Definizione 9. Data una disequazione di secondo grado, si chiama *equazione associata* l'equazione che si ottiene sostituendo il simbolo di disuguaglianza con l'uguale.

Esercizio 41. Risolvi l'equazione associata alla disequazione $x^2 - 4x + 3 \geqslant 0$.

Soluzione. Per scrivere l'equazione associata basta sostituire l'uguale al simbolo di maggiore:

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad (x-1)(x-3) = 0$$

da cui

$$x = 1 \quad \vee \quad x = 3$$

□

Definizione 10. Data una disequazione di secondo grado *in forma normale*, si chiama *parabola associata* la parabola che si ottiene ponendo y uguale al primo membro della disequazione.

Esercizio 42. Traccia la parabola associata alla disequazione $x^2 - 4x + 3 \geqslant 0$.

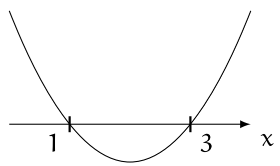
Soluzione. La disequazione è già in forma normale. Basta allora porre y uguale al primo membro della disequazione:

$$y = x^2 - 4x + 3$$

Poiché il coefficiente di x^2 è 1, che è *positivo*, la parabola volge la concavità *verso l'alto*. Inoltre la parabola interseca l'asse x nei punti che corrispondono alle soluzioni dell'equazione associata

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

che abbiamo trovato nell'esercizio precedente, cioè 1 e 3.



La figura precedente rappresenta la parabola in questione. □

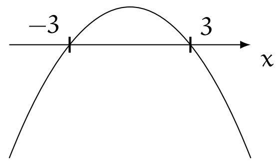
Esercizio 43. Disegna la parabola associata alla disequazione $-x^2 + 9 \geqslant 0$.

Soluzione. La disequazione è già in forma normale. Basta allora porre y uguale al primo membro della disequazione.

$$y = -x^2 + 9$$

Poiché il coefficiente di x^2 è -1, che è *negativo*, la parabola volge la concavità *verso il basso*. Inoltre la parabola interseca l'asse x nei punti che corrispondono alle soluzioni dell'equazione associata:

$$-x^2 + 9 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x^2 = 9 \quad \Longrightarrow \quad x = \pm 3$$



La figura precedente rappresenta la parabola in questione. □

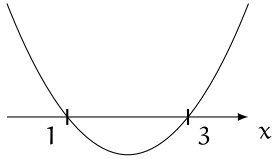
Per risolvere una disequazione di secondo grado si procede come segue:

- si porta la disequazione in forma normale
- si risolve l'equazione associata
- si disegna la parabola associata
- si individua l'insieme soluzione sul grafico in base al verso della disequazione: il primo membro della disequazione ha segno positivo quando la parabola "sta sopra" l'asse x, negativo quando "sta sotto" l'asse x, e si annulla quando interseca l'asse x

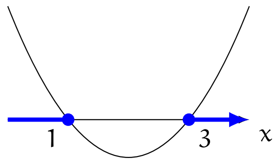
Esercizio 44. Risolvi la disequazione $x^2 - 4x + 3 \geqslant 0$.

Soluzione.

- La disequazione è già in forma normale.
- L'equazione associata ha per soluzioni 1 e 3 (vedi l'esercizio 41).
- La parabola associata volge la concavità verso l'alto ed è *secante* l'asse x (cioè lo tocca in due punti distinti: vedi l'esercizio 42).



- Individuiamo l'insieme soluzione sul grafico in base al verso della disequazione. La disequazione è verificata quando il primo membro è *positivo* o *nullo*, cioè quando la parabola *sta sopra* l'asse x o *lo interseca*.



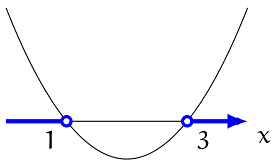
Abbiamo disegnato con una linea più spessa i punti che costituiscono l'insieme soluzione, evidenziando con un pallino *pieno* gli estremi dell'intervallo 1 e 3 per indicare che essi appartengono all'insieme soluzione.

- In conclusione, l'insieme soluzione è:

$$\mathcal{S} = \{\, x \leqslant 1 \lor x \geqslant 3 \,\} = (-\infty, 1] \ \cup\ [3, \infty) \qquad \square$$

Esercizio 45. Risolvi la disequazione $x^2 - 4x + 3 > 0$.

Soluzione. La parabola associata è la stessa dell'esercizio precedente. La disequazione è verificata quando il primo membro è *positivo*, cioè quando la parabola *sta sopra* l'asse x.

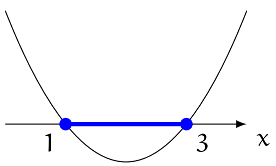


Abbiamo evidenziato con un pallino *vuoto* gli estremi dell'intervallo 1 e 3 per indicare che essi *non* appartengono all'insieme soluzione, che é:

$$\mathcal{S} = \{\, x < 1 \lor x > 3 \,\} = (-\infty, 1) \ \cup\ (3, \infty) \qquad \square$$

Esercizio 46. Risolvi la disequazione $x^2 - 4x + 3 \leqslant 0$.

Soluzione. La parabola associata è la stessa dei due esercizi precedenti. La disequazione è verificata quando il primo membro è *negativo* o *nullo*, cioè quando la parabola *sta sotto* l'asse x o *lo interseca*.

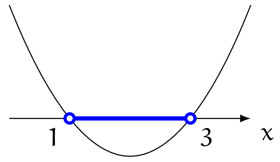


Quindi:

$$\mathcal{S} = \{\, 1 \leqslant x \leqslant 3 \,\} = [1, 3] \qquad \square$$

Esercizio 47. Risolvi la disequazione $x^2 - 4x + 3 < 0$.

Soluzione. La parabola associata è la stessa dei tre esercizi precedenti. La disequazione è verificata quando il primo membro è *negativo*, cioè quando la parabola *sta sotto* l'asse x.



Quindi:

$$\mathcal{S} = \{1 < x < 3\} = (1, 3)$$ □

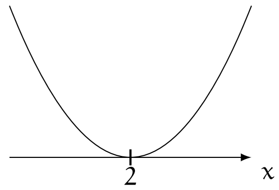
Esercizio 48. Risolvi la disequazione $x^2 - 4x + 4 \geqslant 0$.

Soluzione.

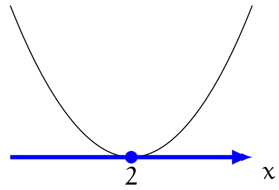
- La disequazione è già in forma normale.
- Risolviamo l'equazione associata:

$$x^2 - 4x + 4 = 0 \quad \Longrightarrow \quad (x-2)^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x - 2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 2$$

- La parabola associata volge la concavità verso l'alto ed è *tangente* all'asse x (cioè lo tocca in un solo punto).



- La disequazione è verificata quando il primo membro è positivo o nullo, cioè quando la parabola sta sopra l'asse x (cosa che avviene per ogni x diverso da 2) o lo interseca (cosa che avviene per $x = 2$).

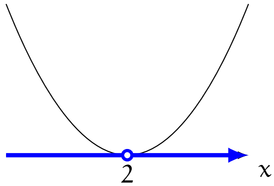


La disequazione è sempre verificata:

$$\mathcal{S} = \mathbb{R}$$ □

Esercizio 49. Risolvi la disequazione $x^2 - 4x + 4 > 0$.

Soluzione. La parabola associata è la stessa dell'esercizio precedente. La disequazione è verificata quando il primo membro è positivo, cioè quando la parabola sta sopra l'asse x (cosa che avviene per ogni x diverso da 2).



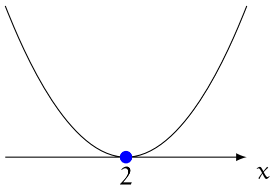
Quindi la disequazione è verificata per ogni x diverso da 2:

$$\mathcal{S} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

□

Esercizio 50. Risolvi la disequazione $x^2 - 4x + 4 \leqslant 0$.

Soluzione. La parabola associata è la stessa dei due esercizi precedenti. La disequazione è verificata quando il primo membro è negativo, cioè quando la parabola sta sotto l'asse x (cosa che non avviene mai) o lo interseca (cosa che avviene per $x = 2$).



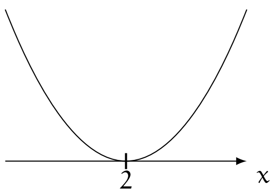
Quindi:

$$\mathcal{S} = \{2\}$$

□

Esercizio 51. Risolvi la disequazione $x^2 - 4x + 4 < 0$.

Soluzione. La parabola associata è la stessa dei tre esercizi precedenti. La disequazione è verificata quando il primo membro è negativo o nullo, cioè quando la parabola sta sotto l'asse x (cosa che non avviene mai).



La disequazione è impossibile:

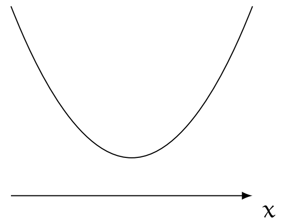
$$\mathcal{S} = \emptyset$$

□

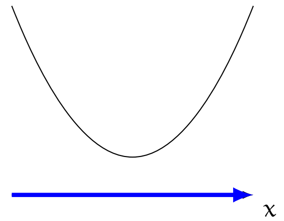
Esercizio 52. Risolvi la disequazione $x^2 + x + 1 \geqslant 0$.

Soluzione.

- La disequazione è già in forma normale.
- L'equazione associata
$$x^2 + x + 1 = 0$$
è impossibile, perché $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0$.
- La parabola associata volge la concavità verso l'alto ed è *esterna* all'asse x (cioè non lo interseca mai).



- La disequazione è verificata quando la parabola sta sopra l'asse x (cosa che avviene sempre) o lo interseca.



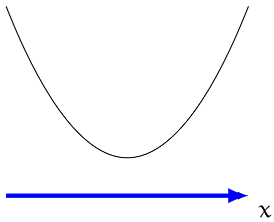
- Quindi la disequazione è sempre verificata:

$$\mathcal{S} = \mathbb{R}$$

□

Esercizio 53. Risolvi la disequazione $x^2 + x + 1 > 0$.

Soluzione. La parabola associata è la stessa dell'esercizio precedente. La disequazione è verificata quando il primo membro è positivo o nullo, cioè quando la parabola sta sopra l'asse x (cosa che avviene sempre).



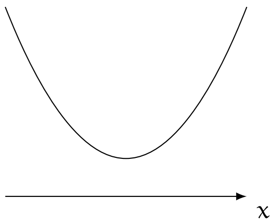
Come nell'esercizio precedente, la disequazione è sempre verificata:

$$\mathcal{S} = \mathbb{R}$$

□

Esercizio 54. Risolvi la disequazione $x^2 + x + 1 \leqslant 0$.

Soluzione. La parabola associata è la stessa dei due esercizi precedenti. La disequazione è verificata quando il primo membro è negativo o nullo, cioè quando la parabola sta sotto l'asse x o lo interseca (cosa che non avviene mai).



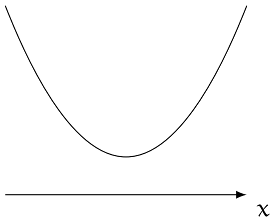
La disequazione è impossibile:

$$\mathcal{S} = \emptyset$$

□

Esercizio 55. Risolvi la disequazione $x^2 + x + 1 \leqslant 0$.

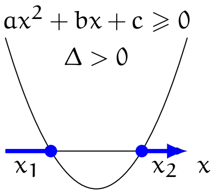
Soluzione. La parabola associata è la stessa dei tre esercizi precedenti. La disequazione è verificata quando il primo membro è negativo, cioè quando la parabola sta sotto l'asse x (cosa che non avviene mai).



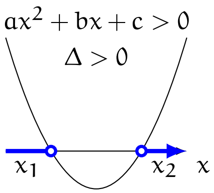
Come nell'esercizio precedente, la disequazione è impossibile:

$$\mathcal{S} = \emptyset$$

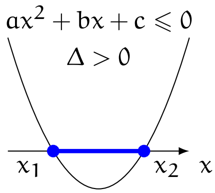
□



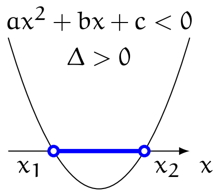
(a) L'equazione associata ha due soluzioni distinte x_1 e x_2, e la disequazione è verificata se $x \leqslant x_1$ oppure $x \geqslant x_2$



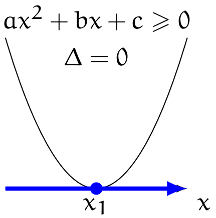
(b) L'equazione associata ha due soluzioni distinte x_1 e x_2, e la disequazione è verificata se $x < x_1$ oppure $x > x_2$



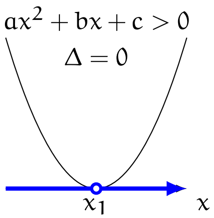
(c) L'equazione associata ha due soluzioni distinte x_1 e x_2, e la disequazione è verificata se $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$



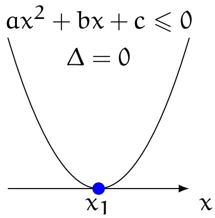
(d) L'equazione associata ha due soluzioni distinte x_1 e x_2, e la disequazione è verificata se $x_1 < x < x_2$



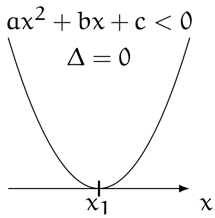
(e) L'equazione associata ha una sola soluzione x_1, e la disequazione è sempre verificata



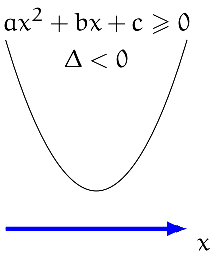
(f) L'equazione associata ha una sola soluzione x_1, e la disequazione è verificata per ogni $x \neq x_1$



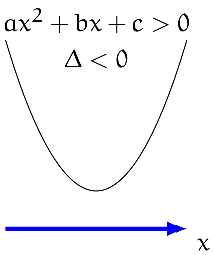
(g) L'equazione associata ha una sola soluzione x_1, e la disequazione è verificata solo se $x = x_1$



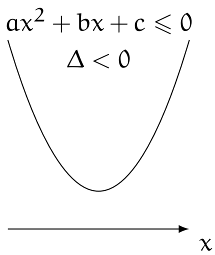
(h) L'equazione associata ha una sola soluzione x_1, e la disequazione non è mai verificata



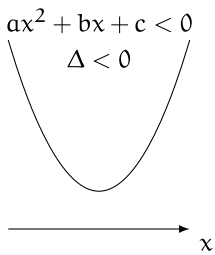
(i) L'equazione associata non ha soluzioni e la disequazione è sempre verificata



(j) L'equazione associata non ha soluzioni e la disequazione è sempre verificata



(k) L'equazione associata non ha soluzioni e la disequazione non è mai verificata



(l) L'equazione associata non ha soluzioni e la disequazione non è mai verificata

Figura 1: Tutti i casi possibili di una disequazione di secondo grado con $a > 0$

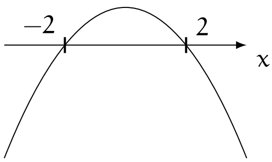
La figura 1 rappresenta tutti i casi possibili di una disequazione di secondo grado con $a > 0$.

Esercizio 56. Risolvi la disequazione $4 - x^2 \geqslant 0$.

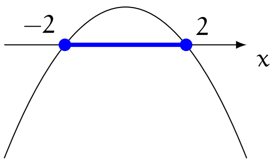
Soluzione. La disequazione è già in forma normale. Risolviamo l'equazione associata:

$$4 - x^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x^2 = 4 \quad \Longrightarrow \quad x = \pm 2$$

La parabola associata volge la concavità verso il basso ed è secante l'asse x.



La disequazione è verificata quando la parabola sta sopra l'asse x o lo interseca.



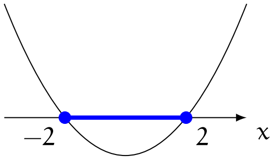
Quindi:

$$\mathcal{S} = \{-2 \leqslant x \leqslant 2\} = [-2, 2] \qquad \square$$

In alternativa, per risolvere la disequazione dell'esercizio precedente si possono moltiplicare per -1 entrambi i membri, cambiando il verso della disequazione, che diventa:

$$x^2 - 4 \leqslant 0$$

La parabola associata volge la concavità verso l'alto e la disequazione è verificata quando la parabola sta sotto l'asse x o lo interseca.



L'insieme soluzione coincide con quello trovato in precedenza.

2.6 DISEQUAZIONI DI GRADO SUPERIORE AL SECONDO

Definizione 11. Una disequazione di grado superiore al secondo è detta *in forma normale* se si presenta in una delle seguenti forme:

$$P(x) \geqslant 0 \qquad P(x) > 0 \qquad P(x) \leqslant 0 \qquad P(x) < 0$$

dove $P(x)$ è un polinomio nella variabile x.

In base al grado di $P(x)$ la disequazione sarà di terzo, quarto, quinto grado, e così via.

Per risolvere una disequazione di grado superiore al secondo si procede come segue:

- si porta la disequazione in forma normale
- si scompone in fattori il polinomio al primo membro
- si *studia* il segno di ciascun fattore, ponendolo maggiore o uguale a zero
- si costruisce la tabella dei segni, segnando con un pallino pieno gli zeri di ciascun fattore e del prodotto
- si determinano gli intervalli in cui il polinomio assume il segno richiesto

Esercizio 57. Risolvi la disequazione $x^3 - 9x < 0$.

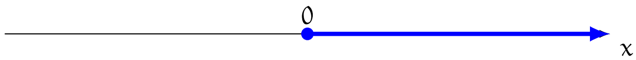
Soluzione.

- La disequazione è già in forma normale.
- Scomponiamo in fattori il polinomio al primo membro:

$$x(x^2 - 9) < 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x(x-3)(x+3) < 0$$

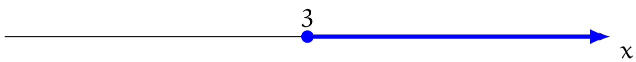
- Studiamo il segno di ciascun fattore.
  - Primo fattore:

$$x \geqslant 0$$



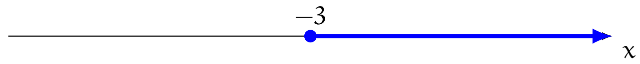
  - Secondo fattore:

$$x - 3 \geqslant 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x \geqslant 3$$

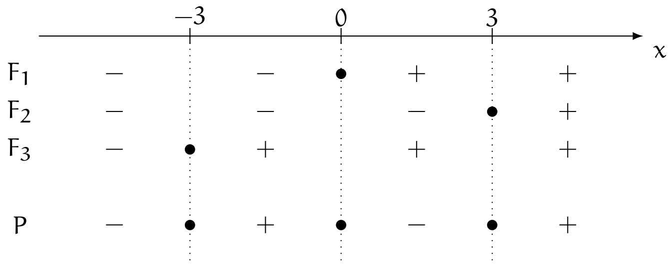


- Terzo fattore:

$$x + 3 \geqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad x \geqslant -3$$

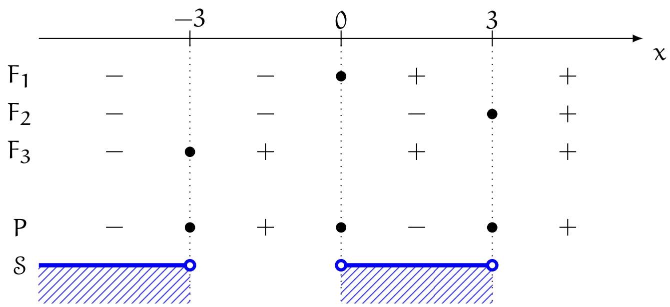


- Costruiamo la tabella dei segni.



In cima alla tabella precedente c'è la retta reale con i numeri in gioco (-3, 0 e 3) *in ordine crescente*. Le righe della tabella indicano gli intervalli dove i fattori F_1, F_2 e F_3 e il prodotto P sono positivi ($+$) o negativi ($-$). Abbiamo inoltre segnato con un *pallino pieno* gli zeri di ciascun fattore e del prodotto.

- La disequazione è verificata quando il polinomio al primo membro, cioè il prodotto P, è negativo ($-$). Quindi:



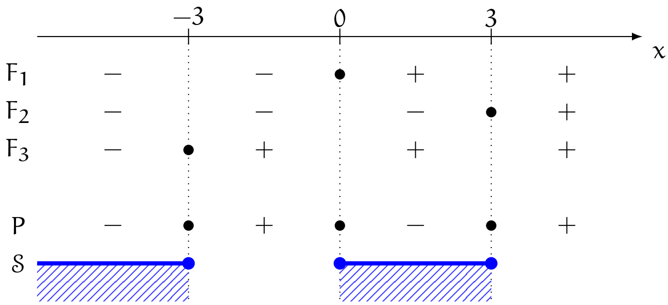
Abbiamo disegnato l'insieme soluzione con una linea spessa. Per indicare che -3, 0 e 3 *non* sono soluzioni li abbiamo evidenziati con un *pallino vuoto*.

- L'insieme soluzione è dunque:

$$\mathcal{S} = \{\, x < -3 \vee 0 < x < 3 \,\} = (-\infty, -3) \cup (0, 3)$$ □

Esercizio 58. Risolvi la disequazione $x^3 - 9x \leqslant 0$.

Soluzione. La tabella dei segni è la stessa dell'esercizio precedente. La disequazione è verificata quando il prodotto è negativo ($-$) o nullo (pallino pieno).

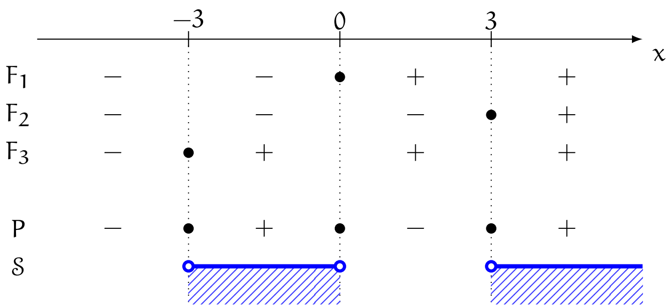


L'insieme soluzione è dunque:

$$\mathcal{S} = \{\, x \leqslant -3 \vee 0 \leqslant x \leqslant 3 \,\} = (-\infty, -3] \;\cup\; [0, 3] \qquad \square$$

Esercizio 59. Risolvi la disequazione $x^3 - 9x > 0$.

Soluzione. La tabella dei segni è la stessa dei due esercizi precedenti. La disequazione è verificata quando il prodotto è positivo (+).

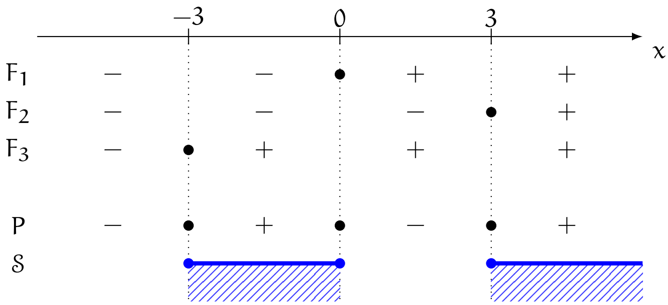


L'insieme soluzione è dunque:

$$\mathcal{S} = \{\, -3 < x < 0 \vee x > 3 \,\} = (-3, 0) \;\cup\; (3, +\infty) \qquad \square$$

Esercizio 60. Risolvi la disequazione $x^3 - 9x \geqslant 0$.

Soluzione. La tabella dei segni è la stessa dei tre esercizi precedenti. La disequazione è verificata quando il prodotto è positivo (+) o nullo (pallino pieno).



L'insieme soluzione è dunque:

$$\mathcal{S} = \{-3 \leqslant x \leqslant 0 \vee x \geqslant 3\} = [-3, 0] \cup [3, +\infty) \qquad \square$$

Esercizio 61. Risolvi la disequazione $x^4 - 16 \leqslant 0$.

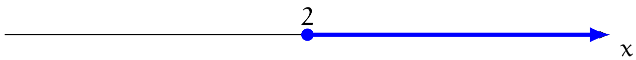
Soluzione.

- La disequazione è già in forma normale.
- Scomponiamo in fattori il polinomio al primo membro:

$$(x^2 - 4)(x^2 + 4) \leqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad (x-2)(x+2)(x^2+4) \leqslant 0$$

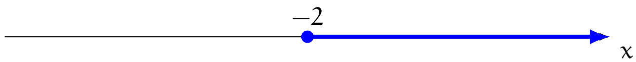
- Studiamo il segno di ciascun fattore.
  - Primo fattore:

$$x - 2 \geqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad x \geqslant 2$$



  - Secondo fattore:

$$x + 2 \geqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad x \geqslant -2$$



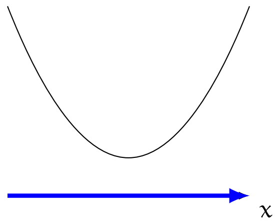
  - Terzo fattore:

$$x^2 + 4 \geqslant 0$$

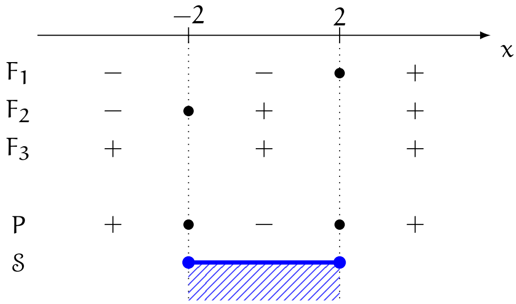
    L'equazione associata

$$x^2 + 4 = 0$$

    è impossibile. La parabola associata volge la concavità verso l'alto e sta sempre sopra l'asse x, per cui il terzo fattore è positivo per qualunque valore reale di x.



- Costruiamo la tabella dei segni.



- La disequazione è verificata quando il prodotto è negativo (−) o nullo (pallino pieno). Quindi l'insieme soluzione è:

$$\mathcal{S} = \{-2 \leqslant x \leqslant 2\} = [-2, 2] \qquad \square$$

Nella disequazione precedente, il fattore $x^2 + 4$, in quanto sempre positivo, avrebbe potuto essere trascurato perché non influenza il segno del polinomio, oppure semplificato applicando il secondo principio delle disequazioni.

Esercizio 62. Risolvi la disequazione $x^4 + 16 < 0$.

Soluzione. Basta un semplice ragionamento per capire che l'equazione è impossibile. Infatti x^4 è un numero maggiore o uguale a zero, e aggiungendo 16 a un numero maggiore o uguale a zero si ottiene un numero maggiore o uguale a 16, per cui non si ottiene mai un numero negativo. In conclusione:

$$\mathcal{S} = \emptyset \qquad \square$$

Se nella disequazione precedente ci fosse stato $>$ al posto di $<$, la disequazione sarebbe stata sempre verificata. Infatti ripetendo il ragionamento precedente si conclude che il primo membro è sempre positivo. In definitiva: $\mathcal{S} = \mathbb{R}$.

Esercizio 63. Risolvi la disequazione $x^4 - 5x^2 + 4 < 0$.

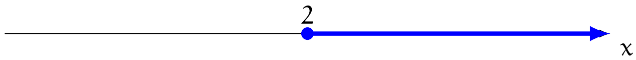
Soluzione.

- La disequazione è già in forma normale.
- Per scomporre in fattori il polinomio al primo membro poniamo $x^2 = t$. Il polinomio diventa $t^2 - 5t + 4$, che è un trinomio speciale e si scompone come $(t-4)(t-1)$. Ritorniamo all'incognita x ponendo $t = x^2$:

$$(x^2-4)(x^2-1) < 0 \quad \Longrightarrow \quad (x-2)(x+2)(x-1)(x+1) < 0$$

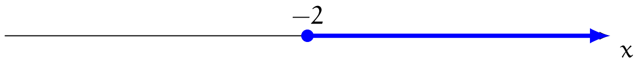
- Studiamo il segno di ciascun fattore.
  - Primo fattore:

$$x - 2 \geqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad x \geqslant 2$$



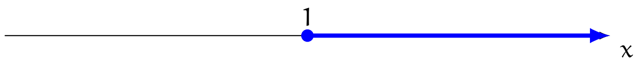
  - Secondo fattore:

$$x + 2 \geqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad x \geqslant -2$$



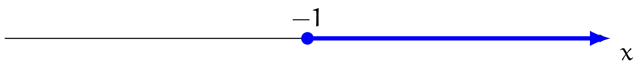
  - Terzo fattore:

$$x - 1 \geqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad x \geqslant 1$$

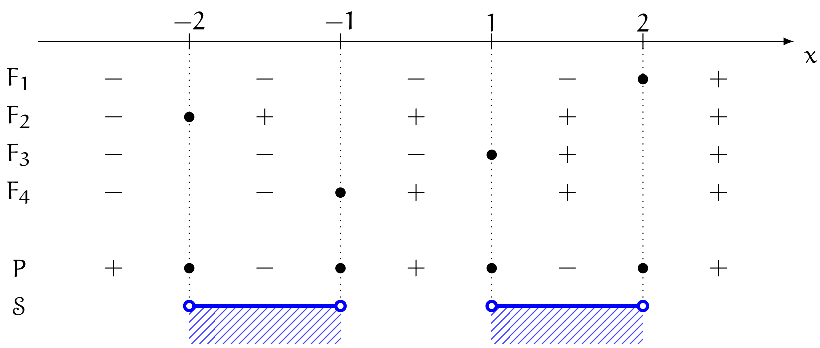


  - Quarto fattore:

$$x + 1 \geqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad x \geqslant -1$$



- Costruiamo la tabella dei segni.



- La disequazione è verificata quando il prodotto è negativo (−). Quindi:

$$\mathcal{S} = \{-2 < x < -1 \vee 1 < x < 2\} = (-2, 1) \cup (1, 2) \qquad \square$$

Esercizio 64. Risolvi la disequazione $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \leqslant 0$.

Soluzione.

- La disequazione è già in forma normale.
- Scomponiamo il polinomio al primo membro $P(x)$ con la regola di Ruffini.

$$P(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 11 \cdot 1 - 6 = 1 - 6 + 11 - 6 = 0$$

quindi $P(x)$ si scompone come $(x-1)Q(x)$, con $Q(x)$ polinomio di secondo grado.

	1	−6	11	−6
1		1	−5	6
	1	−5	6	0

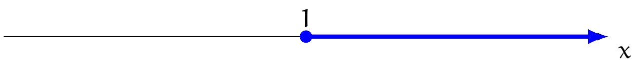
Quindi:

$$(x-1)(x^2-5x+6) = (x-1)(x-2)(x-3) \quad \Longrightarrow \quad (x-1)(x-2)(x-3) \leqslant 0$$

Studiamo il segno di ciascun fattore.

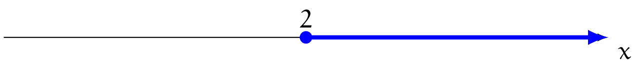
– Primo fattore:

$$x - 1 \geqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad x \geqslant 1$$



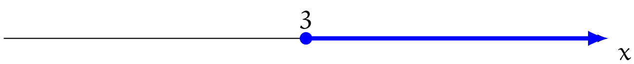
– Secondo fattore:

$$x - 2 \geqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad x \geqslant 2$$

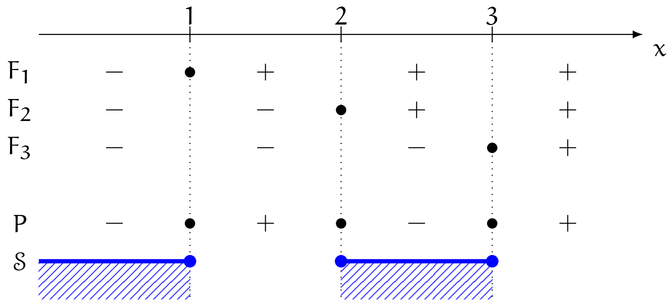


– Terzo fattore:

$$x - 3 \geqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad x \geqslant 3$$



- Costruiamo la tabella dei segni.



- La disequazione è verificata quando il prodotto è negativo ($-$) o nullo (pallino pieno). Quindi:

$$\mathcal{S} = \{x \leqslant 1 \lor 2 \leqslant x \leqslant 3\} = (-\infty, 1] \cup [2, 3] \qquad \square$$

2.7 DISEQUAZIONI FRATTE

Definizione 12. Una disequazione si dice *fratta* (o *frazionaria*) se, eventualmente dopo aver applicato i principi di equivalenza, è riconducibile a una delle seguenti *forme normali*:

$$\frac{N(x)}{D(x)} \geqslant 0 \qquad \frac{N(x)}{D(x)} > 0 \qquad \frac{N(x)}{D(x)} \leqslant 0 \qquad \frac{N(x)}{D(x)} < 0$$

dove $N(x)$ e $D(x)$ sono polinomi nella variabile x.

Per risolvere una disequazione fratta si procede come segue:

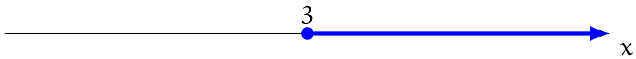
- si porta la disequazione in forma normale
- si *studia* il segno del numeratore e del denominatore della frazione al primo membro, ponendo ciascuno di essi maggiore o uguale a zero
- si costruisce la tabella dei segni, segnando con un pallino pieno gli zeri del numeratore, del denominatore e della frazione, e con un pallino vuoto i punti in cui la frazione non esiste (che corrispondono agli zeri del denominatore)
- si individuano gli intervalli in cui la frazione assume il segno richiesto

Esercizio 65. Risolvi la disequazione $\dfrac{x-3}{x-1} < 0$.

Soluzione.

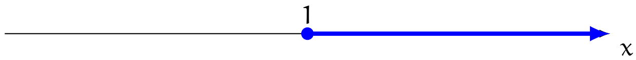
- La disequazione è già in forma normale.
- Studiamo il segno del numeratore e del denominatore.
  - Numeratore:

$$x - 3 \geqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad x \geqslant 3$$

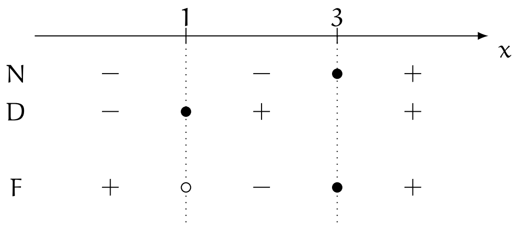


  - Denominatore:

$$x - 1 \geqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad x \geqslant 1$$

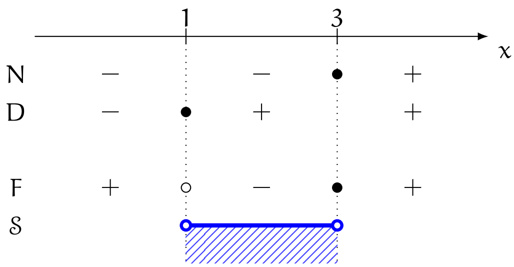


- Costruiamo la tabella dei segni.



In cima alla tabella c'è la retta reale con i numeri in gioco (1 e 3) *in ordine crescente*. Le righe indicano gli intervalli in cui il numeratore N, il denominatore D e la frazione F sono positivi (+) o negativi (−). Abbiamo inoltre segnato con un *pallino pieno* gli zeri del numeratore e del denominatore: gli zeri del numeratore corrispondono a punti in cui la frazione F si annulla (indicati anch'essi con un pallino pieno), mentre gli zeri del denominatore corrispondono a punti in cui la frazione non esiste (indicati con un *pallino vuoto*).

- La disequazione è verificata quando la frazione F è negativa (−). Quindi:



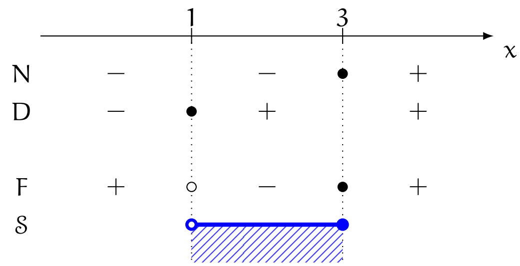
Abbiamo disegnato l'insieme soluzione con una linea spessa. Per indicare che 1 e 3 *non* appartengono all'insieme soluzione li abbiamo evidenziati con un pallino *vuoto*.

- L'insieme soluzione è dunque:

$$\mathcal{S} = \{ 1 < x < 3 \} = (1, 3)$$ □

Esercizio 66. Risolvi la disequazione $\dfrac{x-3}{x-1} \leqslant 0$.

Soluzione. La tabella dei segni è la stessa dell'esercizio precedente. La disequazione è verificata quando la frazione è negativa (−) o nulla (pallino pieno).

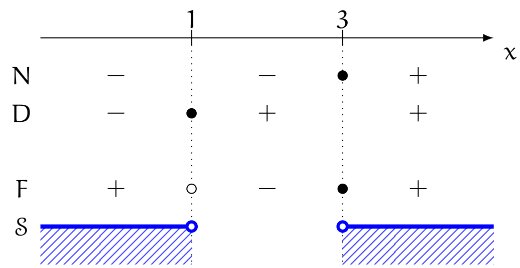


Abbiamo disegnato l'insieme soluzione con una linea spessa. Per indicare che 1 non è soluzione mentre 3 lo è, li abbiamo evidenziati con un pallino vuoto e un pallino pieno, rispettivamente. Quindi:

$$\mathcal{S} = \{ 1 < x \leqslant 3 \} = (1, 3]$$ □

Esercizio 67. Risolvi la disequazione $\dfrac{x-3}{x-1} > 0$.

Soluzione. La tabella dei segni è la stessa dei due esercizi precedenti. La disequazione è verificata quando la frazione è positiva (+).

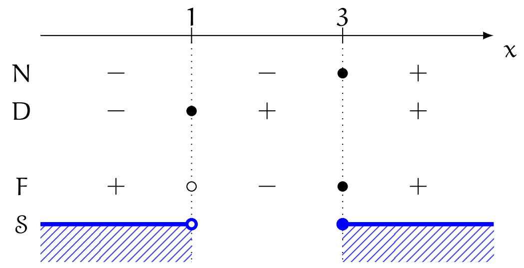


Quindi:

$$\mathcal{S} = \{ x < 1 \vee x > 3 \} = (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$$ □

Esercizio 68. Risolvi la disequazione $\dfrac{x-3}{x-1} \geqslant 0$.

Soluzione. La tabella dei segni è la stessa dei tre esercizi precedenti. la disequazione è verificata quando la frazione è positiva (+) o nulla (pallino pieno).

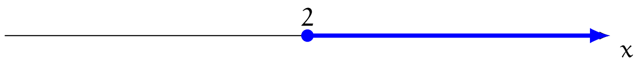


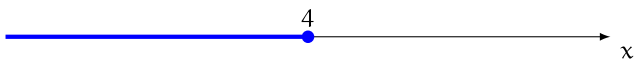
Quindi:

$$\mathcal{S} = \{\, x < 1 \lor x \geqslant 3 \,\} = (-\infty, 1) \cup [3, +\infty)$$ □

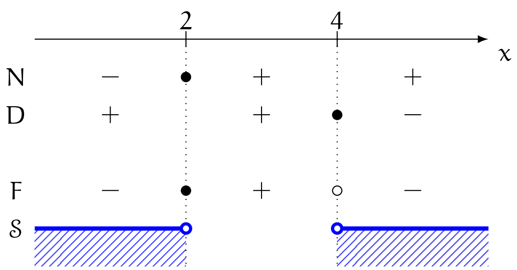
Esercizio 69. Risolvi la disequazione $\dfrac{3x-6}{4-x} < 0$.

Soluzione.

- La disequazione è già in forma normale.
- Studiamo il segno del numeratore e del denominatore.
  - Numeratore:
    $$3x - 6 \geqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad x \geqslant 2$$
    

  - Denominatore:
    $$4 - x \geqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad x \leqslant 4$$
    

- Costruiamo la tabella dei segni.



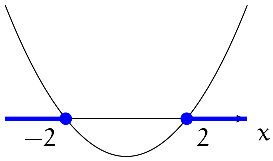
- La disequazione è verificata quando la frazione è negativa (−). Quindi:

$$\mathcal{S} = \{\, x < 2 \lor x > 4 \,\} = (-\infty, 2) \cup (4, +\infty)$$ □

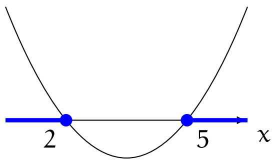
Esercizio 70. Risolvi la disequazione $\dfrac{x^2-4}{x^2-7x+10} \leqslant 0$.

Soluzione.

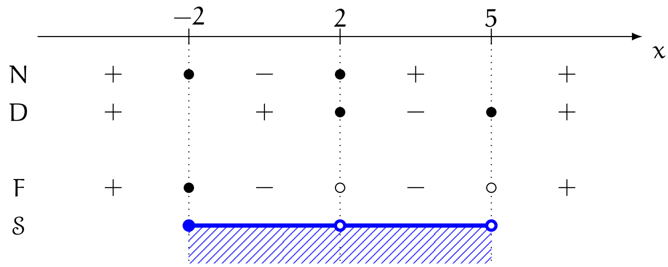
- La disequazione è già in forma normale.
- Studiamo il segno del numeratore e del denominatore.
  - Numeratore:
  $$x^2-4 \geqslant 0$$
  Risolviamo l'equazione associata:
  $$x^2-4=0 \implies x^2=4 \implies x=\pm 2$$
  La parabola associata volge la concavità verso l'alto ed è secante l'asse x. La disequazione è verificata quando la parabola sta sopra l'asse x o lo interseca.



  - Denominatore:
  $$x^2-7x+10 \geqslant 0$$
  Risolviamo l'equazione associata:
  $$x^2-7x+10=0 \implies (x-2)(x-5)=0$$
  da cui
  $$x=2 \quad \vee \quad x=5$$
  La parabola associata volge la concavità verso l'alto ed è secante l'asse x. La disequazione è verificata quando la parabola sta sopra l'asse x o lo interseca.



- Costruiamo la tabella dei segni.



Per $x = 2$ il numeratore e il denominatore sono entrambi nulli (li abbiamo contrassegnati entrambi con un pallino pieno), e dunque la frazione non esiste (pallino vuoto).

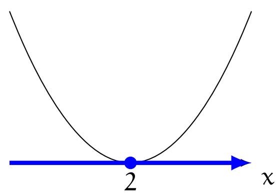
- La disequazione è verificata quando la frazione è negativa (−) o nulla (pallino pieno). Quindi:

$$\mathcal{S} = \{-2 \leqslant x < 5, x \neq 2\} = [-2, 5) \setminus \{2\}$$ □

Esercizio 71. Risolvi la disequazione $\dfrac{x^2 - 4x + 4}{x^2 + x - 6} \geqslant 0$.

Soluzione.

- La disequazione è già in forma normale.
- Studiamo il segno del numeratore e del denominatore.
  - Numeratore:
  $$x^2 - 4x + 4 \geqslant 0$$
  Risolviamo l'equazione associata:
  $$x^2 - 4x + 4 = 0 \quad \Longrightarrow \quad (x-2)^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x - 2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 2$$
  La parabola associata volge la concavità verso l'alto ed è tangente l'asse x. La disequazione è verificata quando la parabola sta sopra l'asse x (cosa che avviene per ogni $x \neq 2$) o lo interseca (cosa che avviene per $x = 2$).



  - Denominatore:
  $$x^2 + x - 6 \geqslant 0$$

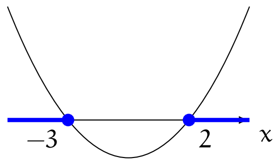
Risolviamo l'equazione associata:

$$x^2 + x - 6 = 0 \quad \Longrightarrow \quad (x+3)(x-2) = 0$$

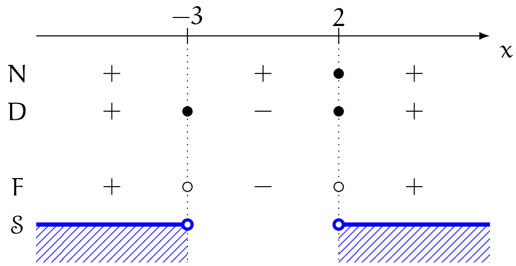
da cui

$$x = -3 \quad \vee \quad x = 2$$

La parabola associata volge la concavità verso l'alto ed è secante l'asse x. La disequazione è verificata quando il primo membro è positivo o nullo, cioè quando la parabola sta sopra l'asse x o lo interseca.



- Costruiamo la tabella dei segni.



Per $x = 2$ il numeratore e il denominatore sono entrambi nulli (li abbiamo contrassegnati entrambi con un pallino pieno), e dunque la frazione non esiste (pallino vuoto).

- La disequazione è verificata quando la frazione è positiva (+) o nulla (pallino pieno). Quindi l'insieme soluzione è:

$$\mathcal{S} = \{\, x < -3 \vee x > 2 \,\} = (-\infty, -3) \ \cup \ (2, +\infty) \qquad \square$$

2.8 SISTEMI DI DISEQUAZIONI

Definizione 13. Un *sistema di disequazioni* è un insieme di due o più disequazioni. *Risolvere* un sistema di disequazioni significa trovare l'insieme dei numeri reali che sono soluzioni comuni alle disequazioni del sistema, cioè che le verificano tutte contemporaneamente.

Per risolvere un sistema di disequazioni in una sola incognita si procede come segue:

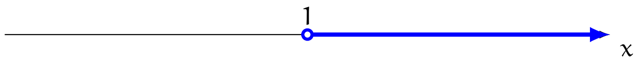
- si risolvono separatamente le disequazioni del sistema, determinando i rispettivi insiemi soluzione
- si rappresentano le soluzioni delle disequazioni nella tabella del sistema
- si trovano gli intervalli in cui le disequazioni sono tutte verificate contemporaneamente

Esercizio 72. Risolvi il sistema di disequazioni $\begin{cases} x-1>0 \\ 3-x \geqslant 0 \end{cases}$

Soluzione.

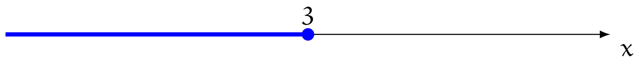
- Risolviamo separatamente le due disequazioni $\mathcal{D}_1$ e $\mathcal{D}_2$ e determiniamo i rispettivi insiemi soluzione.
  - Prima disequazione:

$$x-1>0 \quad \Longrightarrow \quad x>1 \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{S}_1=\{x>1\}$$

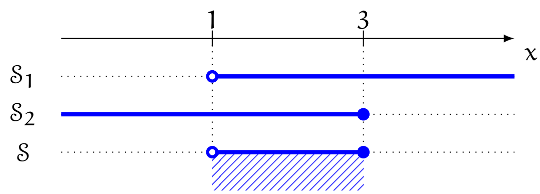


  - Seconda disequazione:

$$3-x \geqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad x \leqslant 3 \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{S}_2=\{x \leqslant 3\}$$



- Rappresentiamo le soluzioni e determiniamo gli elementi comuni.



  In cima alla tabella c'è la retta reale con i numeri in gioco (1 e 3) *in ordine crescente*. Abbiamo rappresentato $\mathcal{S}_1$ con una prima linea spessa e $\mathcal{S}_2$ con una seconda linea spessa. Su una terza linea abbiamo rappresentato l'insieme degli elementi comuni a $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$, che è l'insieme $\mathcal{S}$ delle soluzioni del sistema. Per indicare che 1 non appartiene a $\mathcal{S}$ mentre 3 vi appartiene, li abbiamo evidenziati con un pallino vuoto e un pallino pieno, rispettivamente.

- L'insieme soluzione è dunque:

$$\mathcal{S}=\{1<x \leqslant 3\}=(1,3]$$

□

Esercizio 73. Risolvi il sistema di disequazioni $\begin{cases} 3x - 9 > 0 \\ 2x - 2 < 0 \end{cases}$

Soluzione.

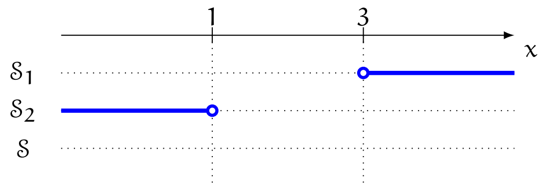
- Risolviamo separatamente le due disequazioni $\mathcal{D}_1$ e $\mathcal{D}_2$ e determiniamo i rispettivi insiemi soluzione.
  - Prima disequazione:

$$3x - 9 > 0 \quad \Longrightarrow \quad 3x > 9 \quad \Longrightarrow \quad x > 3 \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{S}_1 = \{\, x > 3 \,\}$$

  - Seconda disequazione:

$$2x - 2 < 0 \quad \Longrightarrow \quad 2x < 2 \quad \Longrightarrow \quad x < 1 \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{S}_2 = \{\, x < 1 \,\}$$

- Rappresentiamo le soluzioni e determiniamo gli elementi comuni.



- Il grafico mostra che i due insiemi soluzione non hanno elementi in comune, quindi il sistema è impossibile:

$$\mathcal{S} = \emptyset$$

□

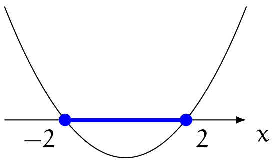
Esercizio 74. Risolvi il sistema di disequazioni $\begin{cases} x^2 - 4 \leqslant 0 \\ x^2 - 1 > 0 \end{cases}$

Soluzione.

- Risolviamo separatamente le due disequazioni $\mathcal{D}_1$ e $\mathcal{D}_2$ e determiniamo i rispettivi insiemi soluzione.
  - Risolviamo l'equazione associata alla prima disequazione:

$$x^2 - 4 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x^2 = 4 \quad \Longrightarrow \quad x = \pm 2$$

    La parabola associata volge la concavità verso l'alto ed è secante l'asse x. La disequazione è verificata quando la parabola sta sotto l'asse x o lo interseca.



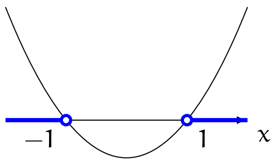
Quindi:

$$\mathcal{S}_1 = \{ -2 \leqslant x \leqslant 2 \}$$

– Risolviamo l'equazione associata alla seconda disequazione:

$$x^2 - 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x^2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad x = \pm 1$$

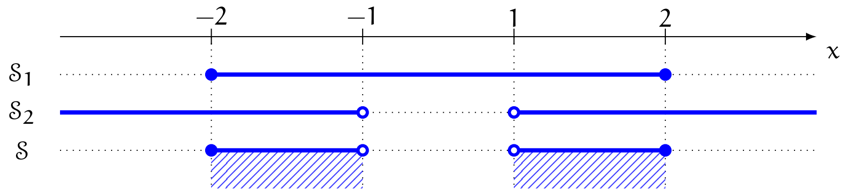
La parabola associata volge la concavità verso l'alto ed è secante l'asse x. La disequazione è verificata quando la parabola sta sopra l'asse x.



Quindi:

$$\mathcal{S}_2 = \{ x < -1 \vee x > 1 \}$$

- Rappresentiamo le soluzioni e determiniamo gli elementi comuni.



- In conclusione

$$\mathcal{S} = \{ -2 \leqslant x < -1 \vee 1 < x \leqslant 2 \} = [-2, -1) \cup (1, 2] \qquad \square$$

Esercizio 75. Risolvi il sistema di disequazioni $\begin{cases} 5x - 5 > 0 \\ 5x - 10 > 0 \\ -x + 3 \geqslant 0 \end{cases}$

Soluzione.

- Risolviamo separatamente le tre disequazioni $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ e $\mathcal{D}_3$ e determiniamo i rispettivi insiemi soluzione.
  – Prima disequazione:

$$5x - 5 > 0 \quad \Longrightarrow \quad 5x > 5 \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{S}_1 = \{ x > 1 \}$$

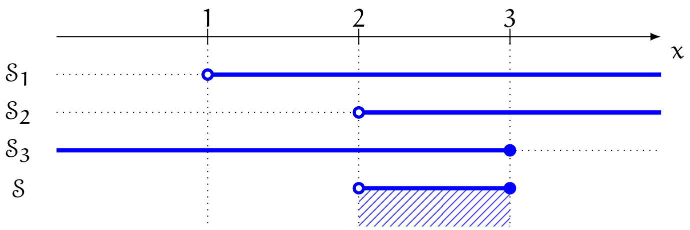
- Seconda disequazione:

$$5x - 10 > 0 \quad\Longrightarrow\quad 5x > 10 \quad\Longrightarrow\quad x > 2 \quad\Longrightarrow\quad \mathcal{S}_2 = \{\, x > 2 \,\}$$

- Terza disequazione:

$$-x + 3 \geqslant 0 \quad\Longrightarrow\quad -x \geqslant -3 \quad\Longrightarrow\quad x \leqslant 3 \quad\Longrightarrow\quad \mathcal{S}_3 = \{\, x \leqslant 3 \,\}$$

- Rappresentiamo le soluzioni e determiniamo gli elementi comuni.



- In conclusione:

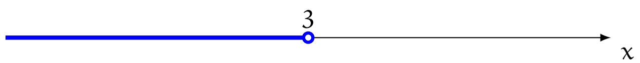
$$\mathcal{S} = \{\, 2 < x \leqslant 3 \,\} = (2, 3] \qquad \square$$

Esercizio 76. Risolvi il sistema di disequazioni $\begin{cases} x - 3 < 0 \\ 6x - x^2 \geqslant 0 \\ x + 3 \geqslant 0 \end{cases}$

Soluzione.

- Risolviamo separatamente le tre disequazioni $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ e $\mathcal{D}_3$ e determiniamo i rispettivi insiemi soluzione.
  - Prima disequazione:

$$x - 3 < 0 \quad\Longrightarrow\quad x < 3 \quad\Longrightarrow\quad \mathcal{S}_1 = \{\, x < 3 \,\}$$



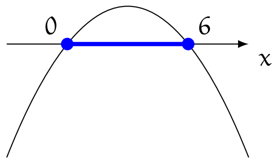
  - Risolviamo l'equazione associata alla seconda disequazione:

$$6x - x^2 = 0 \quad\Longrightarrow\quad x(6 - x) = 0$$

  da cui

$$x = 0 \quad \vee \quad x = 6$$

  La parabola associata volge la concavità verso il basso ed è secante l'asse x. La disequazione è verificata quando la parabola sta sopra l'asse x o lo interseca.

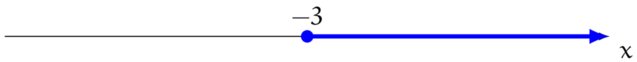


Quindi:

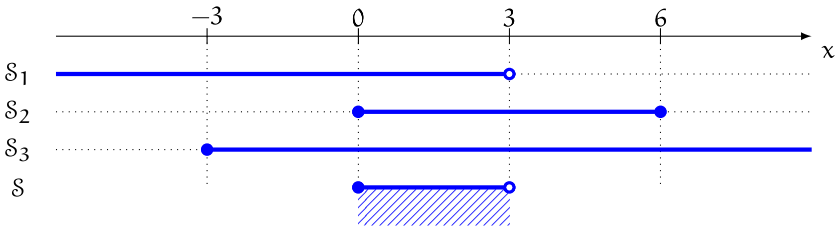
$$\mathcal{S}_2 = \{0 \leqslant x \leqslant 6\}$$

– Terza disequazione:

$$x + 3 \geqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad x \geqslant -3 \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{S}_3 = \{x \geqslant -3\}$$



- Rappresentiamo le soluzioni e determiniamo gli elementi comuni.



- In conclusione:

$$\mathcal{S} = \{0 \leqslant x < 3\} = [0, 3)$$

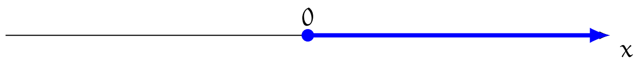
□

Esercizio 77. Risolvi il sistema di disequazioni $\begin{cases} \dfrac{x}{x-3} \leqslant 0 \\ x^2 - 3x + 2 > 0 \end{cases}$

Soluzione.

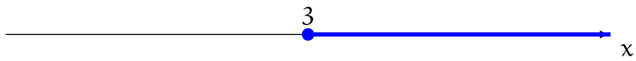
- Risolviamo separatamente le due disequazioni $\mathcal{D}_1$ e $\mathcal{D}_2$ e determiniamo i rispettivi insiemi soluzione.
  – La prima disequazione è fratta. Studiamo il segno del numeratore e del denominatore.
    * Numeratore:

$$x \geqslant 0$$

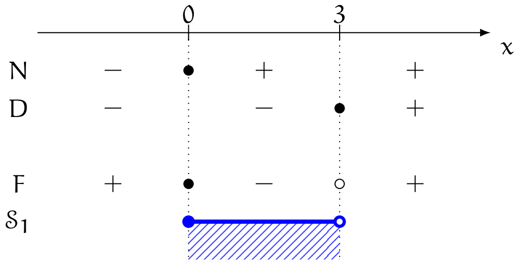


    * Denominatore:

$$x - 3 \geqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad x \geqslant 3$$



Costruiamo la tabella dei segni.



Quindi:

$$\mathcal{S}_1 = \{ 0 \leqslant x < 3 \}$$

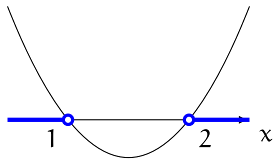
– Risolviamo l'equazione associata alla seconda disequazione:

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad (x-1)(x-2) = 0$$

da cui

$$x = 1 \quad \vee \quad x = 2$$

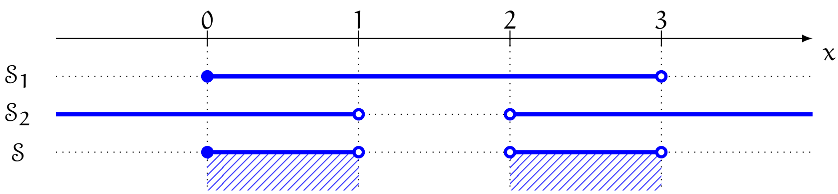
La parabola associata volge la concavità verso l'alto ed è secante l'asse x. La disequazione è verificata quando la parabola sta sopra l'asse x.



Quindi:

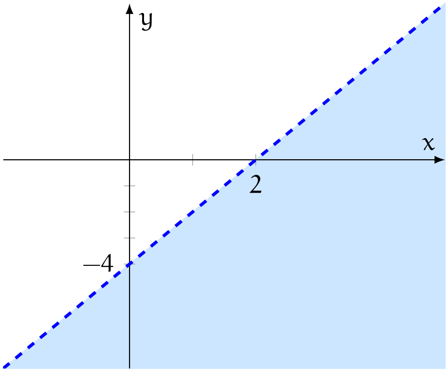
$$\mathcal{S}_2 = \{ x < 1 \vee x > 2 \}$$

- Rappresentiamo le soluzioni e determiniamo gli elementi comuni.

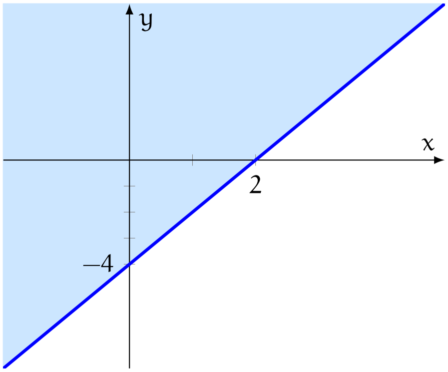


- In conclusione l'insieme soluzione è:

$$\mathcal{S} = \{ 0 \leqslant x < 1 \vee 2 < x < 3 \} = [0, 1) \cup (2, 3) \qquad \square$$



(a) $y < 2x - 4$



(b) $y \geqslant 2x - 4$

Figura 2: Due semipiani

2.9 DISEQUAZIONI IN DUE INCOGNITE

Definizione 14. Le *soluzioni* di una disequazione in due incognite sono le coppie di numeri reali che la verificano. *Risolvere una disequazione* significa trovarne l'insieme soluzione.

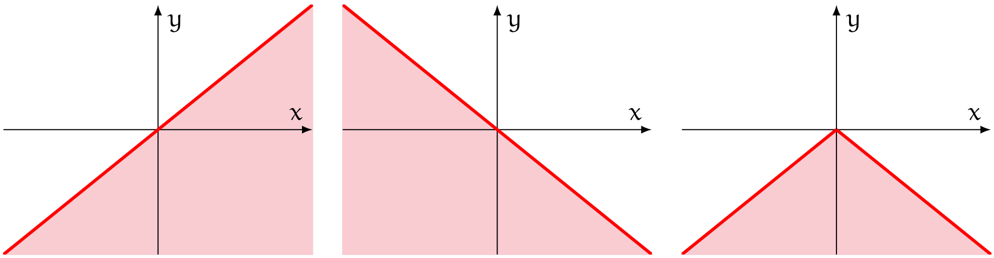
Per esempio, data la disequazione $x + y < 4$, la coppia $(1, 2)$ è soluzione, perché $1 + 2 < 4$, mentre $(2, 3)$ non lo è, perché $2 + 3$ non è < 4.

Nel piano cartesiano, le soluzioni una disequazione *lineare* in due incognite rappresentano un *semipiano*. La tabella 1 mostra i casi possibili.

Se nella disequazione compaiono i simboli "minore" oppure "maggiore", il semipiano è privo dei punti della retta di frontiera. Se invece compaiono i simboli "minore o uguale" oppure "maggiore o uguale", anche i punti della retta di frontiera fanno parte del semipiano.

Tabella 1: Una disequazione lineare in due incognite rappresenta un semipiano

Disequazione	**Semipiano**
$y > mx + q$	superiore alla retta $y = mx + q$
$y < mx + q$	inferiore alla retta $y = mx + q$
$x > k$	a destra della retta $x = k$
$x < k$	a sinistra della retta $x = k$
$y > h$	superiore alla retta $y = h$
$y < h$	inferiore alla retta $y = h$



(a) $y \leqslant x$ (b) $y \leqslant -x$ (c) Soluzione

Figura 3: L'intersezione dei due semipiani è un angolo

Esercizio 78. Rappresenta graficamente il semipiano $y < 2x - 4$.

Soluzione. Il semipiano è quello inferiore alla retta $y = 2x - 4$ (retta esclusa). Vedi la figura 2a. □

Esercizio 79. Rappresenta graficamente il semipiano $y \geqslant 2x - 4$.

Soluzione. Il semipiano è quello superiore alla retta $y = 2x - 4$ (retta compresa). Vedi la figura 2b. □

Definizione 15. Un *sistema di disequazioni in due incognite* è un insieme di due o più disequazioni in due incognite. *Risolvere* un sistema di disequazioni significa trovare le coppie di numeri reali che sono soluzioni comuni alle disequazioni del sistema, cioè che le verificano tutte contemporaneamente.

Nel piano cartesiano, le soluzioni di un sistema di disequazioni *lineari* in due incognite sono rappresentate dall'*intersezione dei corrispondenti semipiani*. Questa intersezione può essere un angolo, una striscia, un poligono, eccetera.

Esercizio 80. Rappresenta graficamente le soluzioni del sistema $\begin{cases} y \leqslant x \\ y \leqslant -x \end{cases}$

Soluzione. Le figure 3a e 3a rappresentano i due semipiani, mentre la figura 3c ne rappresenta l'intersezione: un angolo retto, con vertice nell'origine. □

Esercizio 81. Rappresenta graficamente le soluzioni del sistema $\begin{cases} y \geqslant 1 \\ y \leqslant 4 \end{cases}$

Soluzione. Le figure 4a e 4b rappresentano i due semipiani, mentre la figura 4c ne rappresenta l'intersezione: una striscia. □

Esercizio 82. Risolvi graficamente il sistema $\begin{cases} x \geqslant 1 \\ y \geqslant 1 \\ y \leqslant 8 - x \end{cases}$

Soluzione. Le figure 5a, 5b e 5c rappresentano i tre semipiani, mentre la figura 5d ne rappresenta l'intersezione: un triangolo rettangolo isoscele, di vertici $(1, 1)$, $(7, 1)$ e $(1, 7)$. □

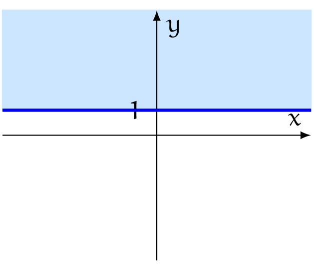
Esercizio 83. Risolvi graficamente il sistema $\begin{cases} y \leqslant 8 - x \\ y \geqslant x \\ y \leqslant 9x + 8 \end{cases}$

Soluzione. Troviamo le intersezioni tra le rette di frontiera dei tre semipiani, risolvendo i seguenti sistemi di equazioni.

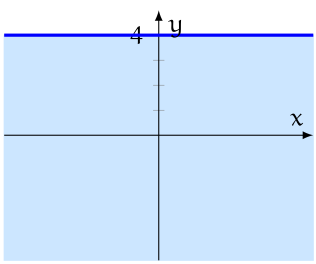
- $\begin{cases} y = 8 - x \\ y = x \end{cases} \implies \begin{cases} x = 8 - x \\ y = x \end{cases} \implies \begin{cases} x = 4 \\ y = 4 \end{cases}$
- $\begin{cases} y = 8 - x \\ y = 9x + 8 \end{cases} \implies \begin{cases} y = 8 - x \\ 8 - x = 9x + 8 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 0 \\ y = 8 \end{cases}$
- $\begin{cases} y = x \\ y = 9x + 8 \end{cases} \implies \begin{cases} y = x \\ x = 9x + 8 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$

Quindi i punti di intersezione sono $(4, 4)$, $(0, 8)$ e $(-1, -1)$.

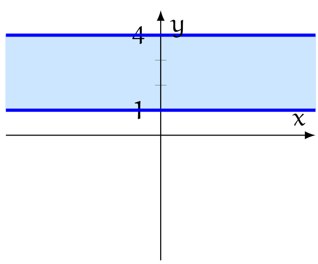
Le figure 6a, 6b e 6c rappresentano i tre semipiani, mentre la figura 6d ne rappresenta l'intersezione: un triangolo di vertici $(4, 4)$, $(0, 8)$ e $(-1, -1)$. □



(a) $y \geqslant 1$

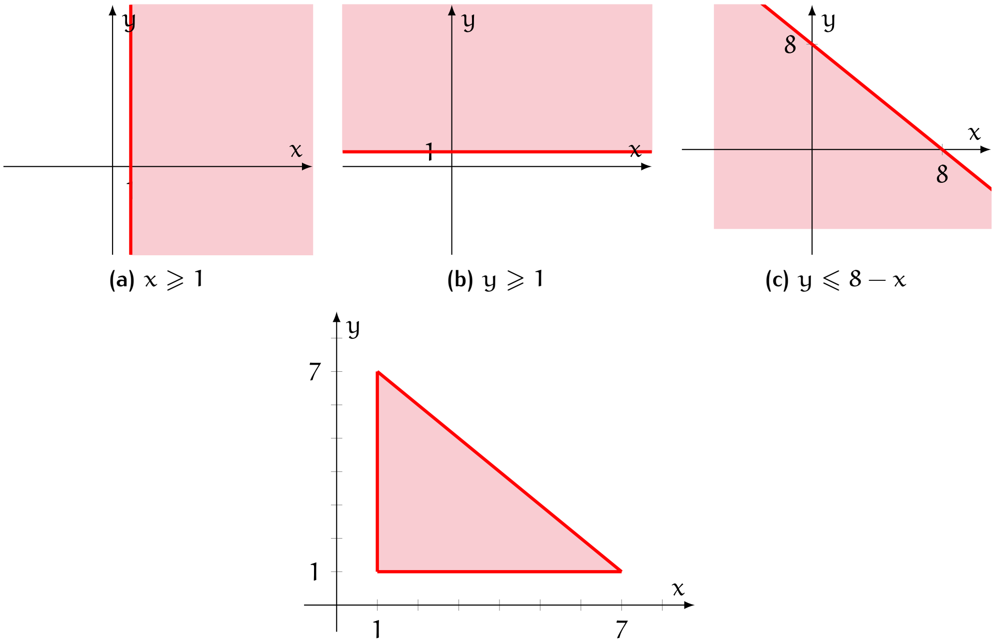


(b) $y \leqslant 4$



(c) Soluzione

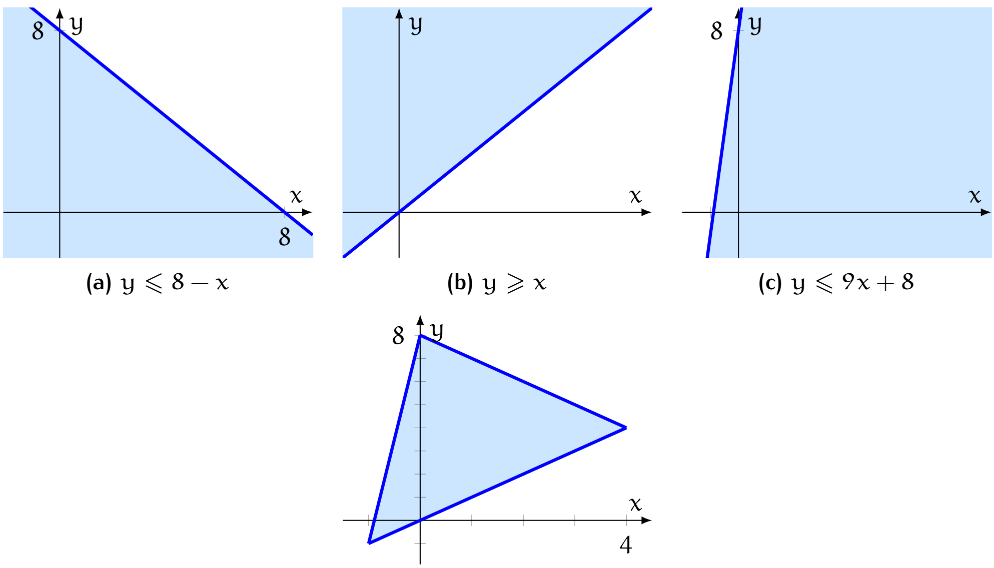
Figura 4: L'intersezione dei due semipiani è una striscia



(a) $x \geqslant 1$ **(b)** $y \geqslant 1$ **(c)** $y \leqslant 8 - x$

(d) Soluzione

Figura 5: L'intersezione dei tre semipiani è un triangolo rettangolo



(a) $y \leqslant 8 - x$ **(b)** $y \geqslant x$ **(c)** $y \leqslant 9x + 8$

(d) Soluzione

Figura 6: L'intersezione dei tre semipiani è un triangolo

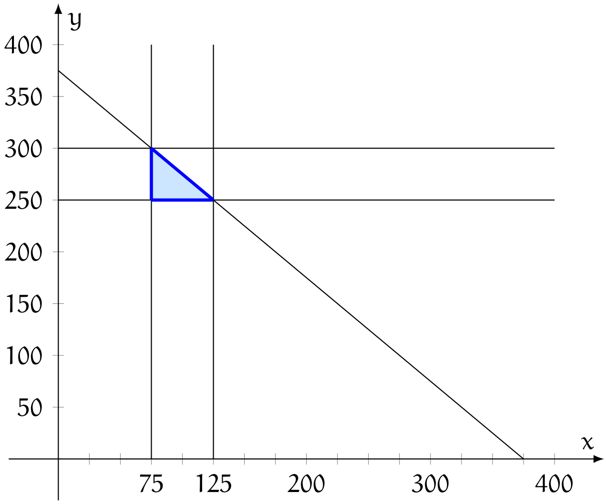


Figura 7: La soluzione è un triangolo

I sistemi di disequazioni, come i sistemi di equazioni, si possono usare per risolvere problemi. Vediamone un esempio.

Esercizio 84. Si può fare una dieta che preveda un consumo giornaliero di proteine compreso tra 75 g e 125 g, e di carboidrati compreso tra 250 g e 300 g, in modo che la quantità complessiva di proteine e carboidrati non superi i 375 g?

Soluzione. Indichiamo con x e y rispettivamente le quantità giornaliere di proteine e carboidrati, espresse in grammi. Allora il problema si formalizza nel modo seguente:

$$\begin{cases} 75 \leqslant x \leqslant 125 \\ 250 \leqslant y \leqslant 300 \\ x + y \leqslant 375 \end{cases}$$

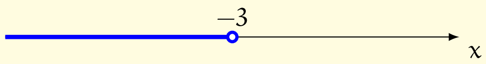
La figura 7 rappresenta le soluzioni del sistema: nella dieta sono ammessi i consumi di proteine e carboidrati interni al triangolo soluzione. □

2.10 ESERCIZI

Chi non risolve esercizi non impara la matematica.

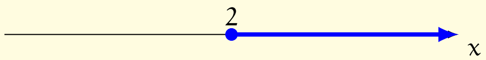
1 Determina la scrittura corretta per ciascuno seguenti grafici.

a.



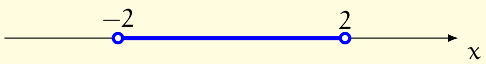
A $x < -3$ B $x > -3$ C $x \leqslant -3$ D $x \geqslant -3$

b.



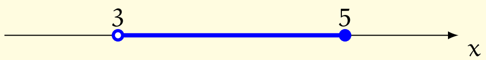
A $x < 2$ B $x > 2$ C $x \geqslant 2$ D $x \leqslant 2$

c.



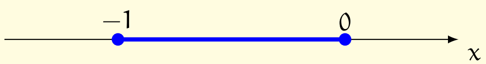
A $x < +2$ B $x > -2$ C $-2 \leqslant x \leqslant 2$ D $-2 < x < 2$

d.



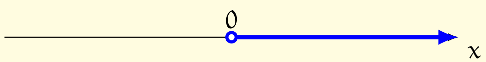
A $x \leqslant 5 \vee x > 3$ B $3 > x \geqslant 5$ C $3 \leqslant x < 5$ D $3 < x \leqslant 5$

e.



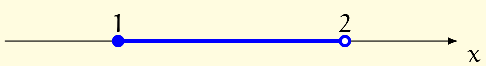
A $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$ B $-1 \geqslant x \geqslant 0$ C $-1 \leqslant x \leqslant 0$ D $0 < x < -1$

f.



A $x > 0$ B $x > -\infty$ C $x \leqslant 0$ D $0 < x \leqslant 0$

g.



$\boxed{A}$ $x \geqslant 1 \lor x < 2$ $\boxed{B}$ $1 \leqslant x < 2$ $\boxed{C}$ $x \leqslant 1 \land x > 2$ $\boxed{D}$ $2 \geqslant 1$

[Due risposte A, una B, due C e due D]

Risolvi le seguenti disequazioni lineari.

2 $x-2>0$ $[x>2]$

3 $x+5>0$ $[x>-5]$

4 $x-4>0$ $[x>4]$

5 $x-5\geqslant 0$ $[x\geqslant 5]$

6 $x+3\leqslant 0$ $[x\leqslant -3]$

7 $-1\leqslant x$ $[x\geqslant -1]$

8 $3>x$ $[x<3]$

9 $3-x>x$ $[x<3/2]$

10 $2x>3$ $[x>3/2]$

11 $3x\leqslant 4$ $[x\leqslant 4/3]$

12 $5x\geqslant -4$ $[x\geqslant -4/5]$

13 $-x+3>0$ $[x<3]$

14 $-x-3\leqslant 0$ $[x\geqslant -3]$

15 $3+2x\geqslant 3x+2$ $[x\leqslant 1]$

16 $5x-4\geqslant 6x-4$ $[x\leqslant 0]$

17 $-3x+2\geqslant -x-8$ $[x\leqslant 5]$

18 $4x+4\geqslant 2(2x+8)$ [impossibile]

19 $4x+4\geqslant 2(2x+1)$ $[\forall x\in\mathbb{R}]$

20 $4x+4\geqslant 2(2x+2)$ $[\forall x\in\mathbb{R}]$

21 $4x+4<2(2x+3)$ $[\forall x\in\mathbb{R}]$

22 $4x+4>2(2x+2)$ [impossibile]

23 $4x+4<2(2x+2)$ [impossibile]

24 $-3x-8\geqslant 2$ $\left[x\leqslant -\frac{10}{3}\right]$

25 $-3x>0$ $[x<0]$

26 $-3x\leqslant 0$ $[x\geqslant 0]$

27 $-3x+5\geqslant 0$ $\left[x\leqslant \frac{5}{3}\right]$

28 $-3x-8\geqslant 0$ $\left[x\leqslant -\frac{8}{3}\right]$

29 $4x+4\geqslant 3\left(x+\frac{4}{3}\right)$ $[x\geqslant 0]$

30 $-\frac{4}{3}x\geqslant 1$ $\left[x\leqslant -\frac{3}{4}\right]$

31 $-\frac{4}{3}x\geqslant 0$ $[x\leqslant 0]$

32 $-\frac{4}{3}x\geqslant \frac{2}{3}$ $\left[x\leqslant -\frac{1}{2}\right]$

33 $-\frac{2}{3}x\leqslant \frac{1}{9}$ $\left[x\geqslant -\frac{1}{6}\right]$

34 $-\frac{2}{3}x\leqslant 9$ $\left[x\geqslant -\frac{27}{2}\right]$

35 $\frac{x+5}{2}>-\frac{1}{5}$ $\left[x>-\frac{27}{5}\right]$

36 $x+\frac{1}{2}<\frac{x+3}{3}-1$ $\left[x<-\frac{3}{4}\right]$

37 $\frac{x+5}{3}+3+2\frac{x-1}{3}\leqslant x+4$ $[\forall x\in\mathbb{R}]$

38 $(x+3)^2\geqslant (x-2)(x+2)$ $\left[x\geqslant -\frac{13}{6}\right]$

39 $\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}<5\left(\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}\right)$ $\left[x>\frac{3}{2}\right]$

40 $(x+1)^2\geqslant (x-1)^2$ $[x\geqslant 0]$

41 $\frac{3}{2}(x+1)-\frac{1}{3}(1-x)<x+2$ $[x<1]$

42 $\frac{3x-1}{5}-5<2x+\frac{2x+3}{3}$ $[x>-3]$

43 $3(x-1)-2<5x+1$ $[x>-3]$

44 $9(20-5x)+27>8(5x-6)$ $[x<3]$

45 $\frac{1}{3}x-\frac{x-4}{2}>\frac{5x-6}{6}+1$ $[x<2]$

46 $\frac{x}{2}-\frac{2}{5}>\frac{3x}{10}+\frac{1}{6}$ $\left[x>\frac{17}{6}\right]$

47 $\frac{3x}{8}-\frac{1}{4}<\frac{x}{3}+\frac{1}{12}$ $[x<8]$

48 $\frac{3x-1}{4}+\frac{1}{6}\leqslant\frac{x-1}{3}$ $\left[x\leqslant -\frac{3}{5}\right]$

49 $\frac{x+1}{15}-\frac{x-2}{10}\geqslant\frac{3}{5}$ $[x\leqslant -10]$

50 $1-(2x-4)^2 > -x(4x+1)+2$ $[x>1]$

51 $3-x(x+1)-\left[x-2(1-3x)\right] < (3-x)(3+x)$ $\left[x>-\frac{1}{2}\right]$

52 $(3x+1)(2x-3) \leqslant 6x(x-1)-x$ $[\forall x \in \mathbb{R}]$

53 $(2x+1)^2 < 6+(2x-1)^2-3(1-2x)$ $\left[x<\frac{3}{2}\right]$

54 $(3x+1)^2-4x(x-2) \leqslant 5x(x+6)-16x$ [impossibile]

55 $\frac{3x+1}{4}-\frac{x+5}{3} \leqslant 1-\frac{x+2}{6}$ $\left[x\leqslant\frac{25}{7}\right]$

56 $\frac{1-x}{4}-\frac{2x-1}{2} \geqslant \frac{3x-1}{4}-5\left(x+\frac{1}{3}\right)$ $\left[x\geqslant-\frac{8}{9}\right]$

57 $4\left[\frac{x-2}{3}-2\left(\frac{x-1}{6}-\frac{1-x}{9}\right)\right] < x-8$ $[x>4]$

58 $7x-\frac{4+x}{8} < \frac{2x+1}{4}+\frac{2x+1}{8}$ $\left[x<\frac{1}{7}\right]$

59 $\frac{x-3}{4}+\frac{x-4}{3} > \frac{2x-5}{2}+\frac{4-3x}{6}$ $[x>3]$

60 $\frac{10x-3}{8} > \frac{x}{2}+\frac{3x+10}{8}-\frac{1+3x}{8}$ $[x>2]$

61 $\frac{5x+1}{10}+\frac{2x-5}{3} > \frac{2x-3}{2}-\frac{1-x}{5}$ $[x<4]$

Risolvi le seguenti disequazioni di secondo grado.

62 $3x^2-2x>0$ $\left[x<0 \vee x>\frac{2}{3}\right]$

63 $5x^2+x\leqslant 0$ $\left[-\frac{1}{5}\leqslant x\leqslant 0\right]$

64 $x-3x^2>0$ $\left[0<x<\frac{1}{3}\right]$

65 $x^2-4\geqslant 0$ $[x\leqslant -2 \vee x\geqslant 2]$

66 $2x^2-18\leqslant 0$ $[-3\leqslant x\leqslant 3]$

67 $x^2+4>0$ $[\forall x \in \mathbb{R}]$

68 $x^2+9\leqslant 0$ [impossibile]

69 $1-x^2<0$ $[x<-1 \vee x>1]$

70 $x^2-3x-4>0$ $[x<-1 \vee x>4]$

71 $x^2-3x-4<0$ $[-1<x<4]$

72 $x^2-2x+1>0$ $[x\neq 1]$

73 $4x^2-4x+1\geqslant 0$ $[\forall x \in \mathbb{R}]$

74 $x^2+2x+1<0$ [impossibile]

75 $4x^2+4x+1\leqslant 0$ $\left[-\frac{1}{2}\right]$

76 $2x^2-3x+4>0$ $[\forall x \in \mathbb{R}]$

77 $x^2-x+1<0$ [impossibile]

78 $(x+2)(3-x)\leqslant 0$ $[x\leqslant -2 \vee x\geqslant 3]$

79 $x(x-2)>0$ $[x<0 \vee x>2]$

80 $x^2-16\leqslant 0$ $[-4\leqslant x\leqslant 4]$

81 $4x^2-2x<0$ $\left[0<x<\frac{1}{2}\right]$

82 $x^2+17x+16\leqslant 0$ $[-16\leqslant x\leqslant -1]$

83 $x^2+6x+9\geqslant 0$ $[\forall x \in \mathbb{R}]$

84 $x^2-5x+6<0$ $[2<x<3]$

85 $x^2+3x-4\leqslant 0$ $[-4\leqslant x\leqslant 1]$

86 $x^2+4>3$ $[\forall x \in \mathbb{R}]$

87 $x^2+3<-1$ [impossibile]

88 $(3x+4)^2<(x+12)^2$ $[-4<x<4]$

89 $3x^2+15x>0$ $[x<-5 \;\vee x>0]$

90 $16x^2+24x+9<0$ [impossibile]

91 $3x^2-6x+3<0$ [impossibile]

92 $x^2+7x+6>0$ $[x<-6 \vee x>-1]$

93 $x^2-4x+3<0$ $[1<x<3]$

94 $2x^2+3x-2\geqslant 0$ $\left[x\leqslant -2 \vee x\geqslant \frac{1}{2}\right]$

95 $2x^2+5x+6\geqslant 0$ $[\forall x\in\mathbb{R}]$

96 $3x^2+2x-1<0$ $\left[-1<x<\frac{1}{3}\right]$

97 $4x^2+12x+9>0$ $\left[x\neq -\frac{3}{2}\right]$

98 $5x^2-6x+2<0$ [impossibile]

99 $x^2+10x+25\geqslant 0$ $[\forall x\in\mathbb{R}]$

100 $x^2-6x+9\leqslant 0$ $[x=3]$

101 $2x^2+5>0$ $[\forall x\in\mathbb{R}]$

102 $3x^2+12<0$ [impossibile]

103 $x^2-x-2>0$ $[x<-1 \vee x>2]$

104 $x^2+6x+5<0$ $[-5<x<-1]$

105 $-x^2+4x-3>0$ $[1<x<3]$

106 $x^2-7x\geqslant 0$ $[x\leqslant 0 \vee x\geqslant 7]$

107 $x^2-49\leqslant 0$ $[-7\leqslant x\leqslant 7]$

108 $2x^2+x-1>0$ $\left[x<-1 \vee x>\frac{1}{2}\right]$

109 $x^2+2x+1>0$ $[x\neq -1]$

110 $x^2+2x+1\geqslant 0$ $[\forall x\in\mathbb{R}]$

111 $x^2-x+4>0$ $[\forall x\in\mathbb{R}]$

112 $-x^2+2x-5>0$ [impossibile]

113 $-9x^2+12x-4\geqslant 0$ $\left[x=\frac{2}{3}\right]$

114 $x^2-4x+4>0$ $[x\neq 2]$

115 $x^2+4x+4\leqslant 0$ $[x=-2]$

116 $4x^2-4x+1<0$ [impossibile]

117 $x^2+x+3>0$ $[\forall x\in\mathbb{R}]$

118 $3x^2+5x-2<0$ $\left[-2<x<\frac{1}{3}\right]$

119 $x^2-8x+16>0$ $[x\neq 4]$

120 $x^2+5x+7\leqslant 0$ [impossibile]

121 $4x^2-12x+9\geqslant 0$ $[\forall x\in\mathbb{R}]$

122 $4x^2-9>0$ $\left[x<-\frac{3}{2} \vee x>\frac{3}{2}\right]$

123 $2x^2+7>0$ $[\forall x\in\mathbb{R}]$

124 $5x-x^2>0$ $[0<x<5]$

125 $x^2-16\geqslant 0$ $[x\leqslant -4 \vee x\geqslant 4]$

126 $-x^2+8x-12>0$ $[2<x<6]$

127 $-x^2>0$ [impossibile]

128 $6x^2-5x+1\geqslant 0$ $\left[x\leqslant \frac{1}{3} \vee x\geqslant \frac{1}{2}\right]$

129 $9x^2+8x-1<0$ $\left[-1<x<\frac{1}{9}\right]$

130 $7x-2x^2<0$ $\left[x<0 \vee x>\frac{7}{2}\right]$

131 $x^2-10x+25<0$ [impossibile]

132 $4-x^2\leqslant 0$ $[x\leqslant -2 \vee x\geqslant 2]$

133 $2x^2+16x+32>0$ $[x\neq -4]$

134 $x^2+10x+25\leqslant 0$ $[x=-5]$

135 $-x^2+8x-7\leqslant 0$ $[x\leqslant 1 \vee x\geqslant 7]$

136 $5x-15x^2>0$ $\left[0<x<\frac{1}{3}\right]$

137 $x-7x^2-2<0$ $[\forall x\in\mathbb{R}]$

138 $x^2-8x+15<0$ $[3<x<5]$

139 $x^2+13x+36\leqslant 0$ $[-9\leqslant x\leqslant -4]$

140 $(3x+2)(2-3x)<0$ $\left[x<-\frac{2}{3} \vee x>\frac{2}{3}\right]$

141 $(2x-3)^2-3(1-4x)-7>0$ $\left[x\leqslant -\frac{1}{2} \vee x\geqslant \frac{1}{2}\right]$

142 $\frac{(2-x)(2+x)}{3}-\frac{1-3x}{5}>\frac{6}{5}-x-\frac{1+x^2}{15}$ $[0<x<6]$

Risolvi le seguenti disequazioni di grado superiore al secondo.

143 $x^4 - 81 \geqslant 0$ $[x \leqslant -3 \vee x \geqslant 3]$

144 $x^3 > x^2$ $[x > 1]$

145 $x^3 - 2x^4 < 0$ $\left[x < 0 \vee x > \frac{1}{2}\right]$

146 $81x^4 - 1 \geqslant 0$ $\left[x \leqslant -\frac{1}{3} \vee x \geqslant \frac{1}{3}\right]$

147 $81x^4 + 1 > 0$ $[\forall x \in \mathbb{R}]$

148 $81x^4 - 16 \leqslant 0$ $\left[-\frac{2}{3} \leqslant x \leqslant \frac{2}{3}\right]$

149 $x^3 + 4x^2 + 4x \geqslant 0$ $[x = -2 \vee x \geqslant 0]$

150 $x^3 - 4x^2 + x - 4 \leqslant 0$ $[x \leqslant 4]$

151 $x^3 + 2x^2 - 4x - 8 \leqslant 0$ $[x \leqslant 2]$

152 $x^4 - 1 < 0$ $[-1 < x < 1]$

153 $4x^3 + 4x^2 - 4x - 4 > 0$ $[x > 1]$

154 $x^3 - 6x^2 + 9x \leqslant 0$ $[x \leqslant 0 \vee x = 3]$

155 $x^3 + x^2 + x < 0$ $[x < 0]$

156 $16 - x^4 \leqslant 0$ $[x \leqslant -2 \vee x \geqslant 2]$

157 $x^4 + x^2 + 10 > 0$ $[\forall x \in \mathbb{R}]$

158 $x^4 + x^2 + 100 < 0$ [impossibile]

159 $x^3 - 8 \geqslant 0$ $[x \geqslant 2]$

160 $3x^3 - 3 - 7x^2 + 7x < 0$ $[x < 1]$

161 $16x^4 - 81 < 0$ $\left[-\frac{3}{2} < x < \frac{3}{2}\right]$

162 $x^3 - 4x^2 + 3x > 0$ $[0 < x < 1 \vee x > 3]$

163 $x^3 - 3x^2 + 2x \geqslant 0$ $[0 \leqslant x \leqslant 1 \vee x \geqslant 2]$

164 $x^3 - 9x^2 + 8x > 0$ $[0 < x < 1 \vee x > 8]$

165 $x^3 - 8x^2 + 12x \leqslant 0$ $[x \leqslant 0 \vee 2 \leqslant x \leqslant 6]$

166 $x^4 - 3x^3 - 29x^2 + 75x + 100 > 0$ $[x < -5 \vee -1 < x < 4 \vee x > 5]$

Risolvi le seguenti disequazioni fratte.

167 $\frac{2x+1}{x} < 0$ $\left[-\frac{1}{2} < x < 0\right]$

168 $\frac{3}{4-2x} < 0$ $[x > 2]$

169 $\frac{x-4}{2-x} < 0$ $[x < 2 \vee x > 4]$

170 $\frac{x^2-5x+4}{2-x} < 0$ $[1 < x < 2 \vee x > 4]$

171 $\frac{3x-1}{x-3} \geqslant 0$ $\left[x \leqslant \frac{1}{3} \vee x > 3\right]$

172 $\frac{4x^2-1}{x-1} \leqslant 0$ $\left[x \leqslant -\frac{1}{2} \vee \frac{1}{2} \leqslant x < 1\right]$

173 $\frac{x^2-4x+4}{x^2+x-6} \geqslant 0$ $[x < -3 \vee x > 2]$

174 $\frac{x-2}{3x-9} > 0$ $[x < 2 \vee x > 3]$

175 $\frac{x+2}{x-1} < 2$ $[x < 1 \vee x > 4]$

176 $\frac{4-3x}{6-5x} \geqslant -3$ $\left[x < \frac{6}{5} \vee x \geqslant \frac{11}{9}\right]$

177 $\frac{x+8}{x-2} \geqslant 0$ $[x \leqslant -8 \vee x > 2]$

178 $\frac{3x+4}{x^2+1} \geqslant 2$ $\left[-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 2\right]$

179 $\frac{3}{2-x} \leqslant \frac{1}{x-4}$ $\left[2 < x \leqslant \frac{7}{2} \vee x > 4\right]$

180 $\frac{2}{4x-16} < \frac{2-6x}{x^2-8x+16}$ $\left[x < \frac{8}{13}\right]$

181 $\frac{2}{x-2} \leqslant \frac{2x-2}{(x-2)(x+3)}$ $[-3 < x < 2]$

182 $\frac{4-3x}{x-2} < \frac{3x+1}{x-2}$ $\left[x < \frac{1}{2} \vee x > 2\right]$

183 $\frac{5x-4}{3x-12} \geqslant \frac{x-4}{4-x}$ $[x \leqslant 2 \vee x > 4]$

184 $\frac{2-x}{5x-15} \leqslant \frac{5x-1}{2x-6}$ $\left[x \leqslant \frac{1}{3} \vee x > 3\right]$

185 $\frac{x}{1-x^2} > \frac{1}{2x+2} - \frac{2}{4x-4}$ $[x < -1]$

186 $\frac{2x^2}{2x^2-x} > 1$ $\left[x > \frac{1}{2}\right]$

187 $\frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+12} \leqslant 1$ $[x < 4, x \neq 3]$

188 $\dfrac{x}{3x-1} \geqslant 0$ $\left[x \leqslant 0 \lor x > \dfrac{1}{3}\right]$

189 $\dfrac{x}{x-1} > 2$ $[1 < x < 2]$

190 $\dfrac{-2x+1}{3x-x^2} < 0$ $\left[0 < x < \dfrac{1}{2} \lor x > 3\right]$

191 $\dfrac{5x+20}{5x+5} > 2 - \dfrac{2x-8}{2x-2}$ $[-1 < x < 1]$

192 $\dfrac{3x-2}{x+5} > 0$ $\left[x < -5 \lor x > \dfrac{2}{3}\right]$

193 $\dfrac{x-2}{x-5} < 0$ $[2 < x < 5]$

194 $\dfrac{4}{x-3} > 0$ $[x > 3]$

195 $\dfrac{x-1}{x+1} > 0$ $[x < -1 \lor x > 1]$

196 $\dfrac{4-2x}{x+3} > 0$ $[-3 < x < 2]$

197 $\dfrac{x+1}{1-x} \leqslant 0$ $[x \leqslant -1 \lor x > 1]$

198 $\dfrac{4+2x}{x-1} < 0$ $[-2 < x < 1]$

199 $\dfrac{5-x}{3-x} \geqslant 0$ $[x < 3 \lor x \geqslant 5]$

200 $\dfrac{3x-5}{3-2x} \leqslant 0$ $\left[x < \dfrac{3}{2} \lor x \geqslant \dfrac{5}{3}\right]$

201 $\dfrac{x-8}{x-4} > 0$ $[x < 4 \lor x > 8]$

202 $\dfrac{2x-5}{3x} < 0$ $\left[0 < x < \dfrac{5}{2}\right]$

203 $\dfrac{x}{3-x} \geqslant 0$ $[0 \leqslant x < 3]$

204 $\dfrac{x-5}{1-x} + 1 \leqslant 0$ $[x < 1]$

205 $\dfrac{1}{x-1} < 3$ $\left[x < 1 \lor x > \dfrac{4}{3}\right]$

206 $\dfrac{2x+1}{x-4} > 3$ $[4 < x < 13]$

207 $\dfrac{5x-6}{x+1} > 2$ $\left[x < -1 \lor x > \dfrac{8}{3}\right]$

208 $\dfrac{2x-3}{x-5} > 2$ $[x > 5]$

209 $\dfrac{3}{4} > \dfrac{1+x}{2-x}$ $\left[x < \dfrac{2}{7} \lor x > 2\right]$

210 $6 \geqslant \dfrac{1}{4x-3}$ $\left[x < \dfrac{3}{4} \lor x \geqslant \dfrac{19}{24}\right]$

211 $\dfrac{13}{x} > 26$ $\left[0 < x < \dfrac{1}{2}\right]$

212 $\dfrac{1}{x+3} > \dfrac{1}{x-3}$ $[-3 < x < 3]$

213 $\dfrac{x-4}{3} - \dfrac{3}{x-4} > \dfrac{1}{3}x$ $\left[\dfrac{7}{4} < x < 4\right]$

214 $\dfrac{x^2-2x+1}{x-2} < 0$ $[x < 2 \land x \neq 1]$

215 $\dfrac{x^2-3x}{x^2+2} > 0$ $[x < 0 \lor x > 3]$

216 $\dfrac{x^2-3x+5}{x^2-1} \leqslant 0$ $[-1 < x < 1]$

217 $\dfrac{5x^2-4x}{x^2-6x+9} \leqslant 0$ $\left[0 \leqslant x \leqslant \dfrac{4}{5}\right]$

218 $\dfrac{x-2}{x} > \dfrac{3}{x-1}$ $[-1 < x < 1 \lor x > 4]$

219 $\dfrac{x}{2} > 1 - \dfrac{1}{2x}$ $[x > 0 \land x \neq 1]$

220 $x \geqslant \dfrac{1}{4x-3}$ $\left[-\dfrac{1}{4} \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{4}\right]$

221 $\dfrac{x^2+5x+4}{x^2-5x-6} < 0$ $[-4 < x < 6]$

222 $\dfrac{2x-8}{2x^2-16x+14} > 0$ $[1 < x < 4 \lor x > 7]$

223 $\dfrac{3}{x} - \dfrac{x-1}{2-x} \leqslant \dfrac{x+1}{x-2}$ $[x < 0 \lor 2 < x \leqslant 6]$

224 $\dfrac{x^2-4}{x^2-7x+10} < 0$ $[-2 < x < 5, x \neq 2]$

225 $\dfrac{2}{x-3} - \dfrac{2x-5}{x^2-9} \geqslant 0$ $[x < -3 \lor x > 3]$

226 $\dfrac{3x+12}{(x-4)(6-3x)} \geqslant 0$ $[x \leqslant -4 \lor 2 < x < 4]$

227 $\dfrac{2}{x+2}-\dfrac{1}{x+1}\geqslant\dfrac{3}{2x+2}$ $[x\leqslant -6 \vee -2<x<-1]$

228 $\dfrac{3}{2x-1}\leqslant\dfrac{2x^2}{2x^2-x}-\dfrac{x+1}{x}$ $\left[x<0 \vee \dfrac{1}{4}\leqslant x<\dfrac{1}{2}\right]$

229 $\dfrac{2x}{2x-1}+\dfrac{x+2}{2x+1}>\dfrac{3}{2}$ $\left[-\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{1}{10} \vee x>\dfrac{1}{2}\right]$

230 $\dfrac{4}{4x^2-1}+\dfrac{1}{2x+1}+\dfrac{x}{1-2x}\leqslant 0$ $\left[x\leqslant -1 \vee -\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{1}{2} \vee x\geqslant\dfrac{3}{2}\right]$

231 $\dfrac{x^2-7x+6}{2x-3x^2}\leqslant 0$ $\left[x<0 \vee \dfrac{2}{3}<x\leqslant 1 \vee x\geqslant 6\right]$

232 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2}>\dfrac{1}{x-1}$ $[x<-1 \vee 0<x<1 \vee x>2]$

233 $\dfrac{3-x}{x-2}\geqslant\dfrac{x-1}{x+3}+\dfrac{2}{x^2+x-6}$ $\left[-3<x\leqslant -1 \vee 2<x\leqslant\dfrac{5}{2}\right]$

234 $\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{4-x}{x+2}\geqslant\dfrac{2x+1}{x^2+3x+2}$ $\left[x<-2 \vee x\geqslant\dfrac{5}{2}\right]$

235 $\dfrac{x+1}{x}-\dfrac{2}{x}>\dfrac{x+1}{x-1}$ $\left[x<0 \vee \dfrac{1}{3}<x<1\right]$

236 $\dfrac{5}{2x+6}\geqslant\dfrac{5x+4}{x^2+6x+9}$ $\left[x\leqslant\dfrac{7}{5}, x\neq -3\right]$

237 $\dfrac{1}{x}\leqslant\dfrac{x}{x^2-2x+1}$ $\left[x<0 \vee x\geqslant\dfrac{1}{2}, x\neq 1\right]$

238 $\dfrac{5}{4-x^2}+\dfrac{x}{x+2}\leqslant 1$ $\left[-2<x\leqslant -\dfrac{1}{2} \vee x>2\right]$

239 $\dfrac{4}{x+4}+\dfrac{2}{x-3}\leqslant 0$ $\left[x<-4 \vee \dfrac{2}{3}\leqslant x<3\right]$

240 $\dfrac{7}{x+3}-\dfrac{6}{x+9}\geqslant 0$ $[-45\leqslant x<-9 \vee x>-3]$

241 $\dfrac{x-3}{x^2-4x+4}-1<\dfrac{3x-3}{6-3x}$ $\left[x<\dfrac{5}{2}, x\neq 2\right]$

242 $\dfrac{(x+3)(2x-1)}{x-2}<0$ $\left[x<-3 \vee \dfrac{1}{2}<x<2\right]$

243 $\dfrac{7}{x-2}<\dfrac{8}{x-5}$ $[-19<x<2 \vee x>5]$

244 $\dfrac{5x^2-3x-2}{9x^2+15x-6}>0$ $\left[x<-2 \vee -\dfrac{2}{5}<x<\dfrac{1}{3} \vee x>1\right]$

245 $\dfrac{5x^2-4x}{x^2-6x+9}>0$ $\left[x<0 \vee \dfrac{4}{5}<x<3 \vee x>3\right]$

246 $\dfrac{x^2-9}{x^2+8x+16}\geqslant 0$ $[x\leqslant -3 \vee x\geqslant 3 \wedge x\neq -4]$

247 $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-3x-10}>0$ $[x<-2 \vee 2<x<3 \vee x>5]$

248 $1-\dfrac{3}{2x}+\dfrac{3}{4}\left(\dfrac{1}{x}-1\right)>\dfrac{2+3x}{x}$ $\quad[-1<x<0]$

249 $\dfrac{x^2+10x-56}{x^2-2x-48}>0$ $\quad[x<-14 \vee -6<x<4 \vee x>8]$

250 $\dfrac{2x^2+x-1}{x^2-2x}\geqslant 0$ $\quad\left[x\leqslant -1 \vee 0<x\leqslant \dfrac{1}{2} \vee x>2\right]$

251 $\dfrac{x}{6}-\dfrac{1}{x-6}<\dfrac{x-1}{6}-\dfrac{x-1}{6-x}$ $\quad\left[x<-\dfrac{6}{5} \vee x>6\right]$

252 $1-\dfrac{6}{1-4x^2}>\dfrac{2}{2x-1}-\dfrac{3}{2x+1}$ $\quad\left[x<-\dfrac{1}{2} \vee -\dfrac{1}{2}<x<0 \vee x>\dfrac{1}{2}\right]$

253 $\dfrac{x}{x+2}<5-\dfrac{x}{3-x}$ $\quad\left[x<-\sqrt{6} \vee -2<x<\sqrt{6} \vee x>3\right]$

254 $\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x}>\dfrac{2}{15}$ $\quad[-3<x<0 \vee 2<x<5]$

255 $\dfrac{11}{2x+3}<\dfrac{5}{2-x}$ $\quad\left[x<-\dfrac{3}{2} \vee \dfrac{1}{3}<x<2\right]$

256 $\dfrac{x^2-7x+6}{x^2-x-6}>0$ $\quad[x<-2 \vee 1<x<3 \vee x>6]$

257 $\dfrac{3x^2-5x+2}{3x^2+4x-4}\leqslant 0$ $\quad\left[-2<x<\dfrac{2}{3} \vee \dfrac{2}{3}<x\leqslant 1\right]$

258 $\dfrac{3x^2-x-2}{6x^2-x-7}<0$ $\quad\left[-1<x<-\dfrac{2}{3} \vee 1<x<\dfrac{7}{6}\right]$

259 $\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\geqslant 0$ $\quad[x\leqslant -1 \vee x\geqslant 1]$

260 $\dfrac{x^3+3x}{x+3}\geqslant 0$ $\quad[x<-3 \vee x\geqslant 0]$

261 $\dfrac{3x^2+2x-8}{6x^2+19x+15}<0$ $\quad\left[-2<x-\dfrac{5}{3} \vee -\dfrac{3}{2}<x<\dfrac{4}{3}\right]$

Risolvi le seguenti disequazioni.

262 $\dfrac{x(x+1)}{4}\geqslant\dfrac{x-5}{12}+\dfrac{10x-5}{6}$ $\quad[x\leqslant 1 \vee x\geqslant 5]$

263 $\dfrac{2(x-1)(2x+1)}{10}+5\leqslant x(x+1)$ $\quad[x\leqslant -4 \vee x\geqslant 2]$

264 $\dfrac{(x+2)^2}{4}-\dfrac{(x-2)(x+2)}{6}>\dfrac{4x+4}{3}$ $\quad[x\neq 2]$

265 $(2x+1)^2-8x<24+(x-2)^2$ $\quad[-3<x<3]$

266 $4x^3+4x^2\leqslant 1+x$ $\quad\left[x\leqslant -1 \vee -\dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{2}\right]$

267 $x^3+3x^2-x-3<0$ $\quad[x<-3 \vee -1<x<1]$

268 $x^3+x^2-9x-9\geqslant 0$ $\quad[-3\leqslant x\leqslant -1 \vee x\geqslant 3]$

269 $2x^3+3x^2-5x<0$ $\quad\left[x<-\dfrac{5}{2} \vee 0<x<1\right]$

270 $6x^3 - x^2 - 2x \geqslant 0$ $\left[-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 0 \vee x \geqslant \frac{2}{3}\right]$

271 $x^3 - 2x^2 - 15x \geqslant 0$ $[-3 \leqslant x \leqslant 0 \vee x \geqslant 5]$

272 $x^3 - 2x^2 - x + 2 \geqslant 0$ $[-1 \leqslant x \leqslant 1 \vee x \geqslant 2]$

273 $x^4 + 4x^3 + 3x^2 > 0$ $[x < -3 \vee x > -1, x \neq 0]$

274 $x^4 - 10x^2 + 9 \leqslant 0$ $[-3 \leqslant x \leqslant -1 \vee 1 \leqslant x \leqslant 3]$

275 $x^3 + 3x^2 + 2x < 0$ $[x < -2 \vee -1 < x < 0]$

276 $x^3 - 6x^2 + 10 > -3x$ $[-1 < x < 2 \vee x > 5]$

277 $x^3 - 2x^2 - x + 2 \leqslant 0$ $[x \leqslant -1 \vee 1 \leqslant x \leqslant 2]$

Risolvi i seguenti sistemi di disequazioni.

278 $\begin{cases} x^2 \leqslant 0 \\ 2 - 3x \geqslant 0 \end{cases}$ $[0]$

279 $\begin{cases} 3 - x \geqslant x \\ 2x > 3 \end{cases}$ [impossibile]

280 $\begin{cases} 3x \leqslant 4 \\ 5x > -4 \end{cases}$ $\left[-\frac{4}{5} < x \leqslant \frac{4}{3}\right]$

281 $\begin{cases} 2x < 3 \\ 3x \geqslant 4 \end{cases}$ $\left[\frac{4}{3} \leqslant x < \frac{3}{2}\right]$

282 $\begin{cases} 3x - 5 < 2 \\ x + 7 \geqslant -2x \end{cases}$ $\left[-\frac{7}{3} \leqslant x < \frac{7}{3}\right]$

283 $\begin{cases} 3 - x \geqslant x - 3 \\ -x + 3 \geqslant 0 \end{cases}$ $[x \leqslant 3]$

284 $\begin{cases} -x - 3 \leqslant 3 \\ 3 + 2x \geqslant 3x + 2 \end{cases}$ $[-6 \leqslant x \leqslant 1]$

285 $\begin{cases} 2x - 1 > 2x \\ 3x + 3 \leqslant 3 \end{cases}$ [impossibile]

286 $\begin{cases} 2x + 2 < 2x + 3 \\ 2(x + 3) > 2x + 5 \end{cases}$ $[\forall x \in \mathbb{R}]$

287 $\begin{cases} -3x > 0 \\ -3x + 5 \geqslant 0 \\ -3x \geqslant -2x \end{cases}$ $[x < 0]$

288 $\begin{cases} -\frac{4}{3}x \geqslant \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3}x \leqslant \frac{1}{9} \end{cases}$ [impossibile]

289 $\begin{cases} 3 + 2x > 3x + 2 \\ 5x - 4 \leqslant 6x - 4 \\ -3x + 2 \geqslant -x - 8 \end{cases}$ $[0 \leqslant x < 1]$

290 $\begin{cases} 4x + 4 \geqslant 3\left(x + \frac{4}{3}\right) \\ 4x + 4 \geqslant 2(2x + 2) \end{cases}$ $[x \geqslant 0]$

291 $\begin{cases} 3(x - 1) < 2(x + 1) \\ x - \frac{1}{2} + \frac{x + 1}{2} > 0 \end{cases}$ $[0 < x < 5]$

292 $\begin{cases} \frac{2x + 3}{3} > x - 1 \\ \frac{x - 4}{5} < \frac{2x + 1}{3} \end{cases}$ $\left[-\frac{17}{7} < x < 6\right]$

293 $\begin{cases} 2\left(x - \frac{1}{3}\right) + x > 3x - 2 \\ \frac{x}{3} - \frac{1}{2} \geqslant \frac{x}{4} - \frac{x}{6} \end{cases}$ $[x \geqslant 2]$

294 $\begin{cases} \frac{3}{2}x + \frac{1}{4} < 5\left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}\right) \\ x^2 - 2x + 1 \geqslant 0 \end{cases}$ $\left[x > \frac{3}{2}\right]$

295 $\begin{cases} x^2 - 9 \geqslant 0 \\ x^2 - 7x + 10 < 0 \end{cases}$ $[3 \leqslant x < 5]$

296 $\begin{cases} 16x^4 - 1 < 0 \\ 16x^3 + 8x^2 \geqslant 0 \end{cases}$ $\left[-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}\right]$

297 $\begin{cases} x^2 - 4 > 0 \\ x^2 + 4 > 0 \\ 2x - 4 \geqslant 0 \end{cases}$ $[x > 2]$

298 $\begin{cases} (x + 1)^2 - 5 < x^2 + 4 \\ 3x + \frac{1}{2} > 0 \\ 4x + 5 \geqslant 7 \end{cases}$ $\left[\frac{1}{2} \leqslant x < 4\right]$

299 $\begin{cases} -\dfrac{1}{2}x - 3 \geqslant 0 \\ x + 2 < 0 \\ -7x - 3 \leqslant 0 \end{cases}$ [impossibile]

300 $\begin{cases} \dfrac{6x-15}{2-8x} \leqslant 0 \\ \dfrac{2-x}{2x+8} > 0 \end{cases}$ $\left[-4 < x < \dfrac{1}{4}\right]$

301 $\begin{cases} \dfrac{x+3}{x-3} - \dfrac{x+1}{2x-6} > \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{x+1}{x^2-6x+9} \geqslant 0 \\ -6x^2 \leqslant 0 \end{cases}$ $[x > 3]$

302 $\begin{cases} 2x - 5 > 3x + 2 \\ 3x - 4 < x + 5 \end{cases}$ $[x < -7]$

303 $\begin{cases} 2x \leqslant 2x - 2 \\ x - 1 > -7 \end{cases}$ [impossibile]

304 $\begin{cases} x - 3 \geqslant 0 \\ (x-2)(x+3) \leqslant (x+2)^2 \end{cases}$ $[x \geqslant 3]$

305 $\begin{cases} \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{2}{x-1} \geqslant 1 \\ \dfrac{2}{1-x} \leqslant 0 \end{cases}$ $[1 < x \leqslant 2]$

306 $\begin{cases} \dfrac{x-2}{x} - \dfrac{2}{x} \leqslant 1 \\ \dfrac{x^2-3x}{x-1} > 0 \end{cases}$ $[0 < x < 1 \lor x > 3]$

307 $\begin{cases} \dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{4}(x-1) \geqslant 0 \\ (x-2)x \leqslant (x+1)^2 \\ \dfrac{x+1}{2} - \dfrac{x-3}{6} \leqslant 1 \end{cases}$ $\left[-\dfrac{1}{4} \leqslant x \leqslant 0\right]$

308 $\begin{cases} x^2 + x - 2 \leqslant 0 \\ x^2 + 3x > 0 \\ \dfrac{1-x}{x+3} \geqslant 0 \end{cases}$ $[0 < x \leqslant 1]$

309 $\begin{cases} 3x - 2 \leqslant 0 \\ x + 5 > 0 \end{cases}$ $\left[-5 < x \leqslant \dfrac{2}{3}\right]$

310 $\begin{cases} 2(x+1) < 7 - x \\ 3(x+4) > 2 + 3(2x-1) \end{cases}$ $\left[x < \dfrac{5}{3}\right]$

311 $\begin{cases} 2x - 5 > 0 \\ 2 - x > 0 \end{cases}$ [impossibile]

312 $\begin{cases} \dfrac{x-1}{3} + \dfrac{x-2}{2} < 2 \\ x - \dfrac{3-x}{2} \geqslant 1 \end{cases}$ $\left[\dfrac{5}{3} \leqslant x < 4\right]$

313 $\begin{cases} 3x^2 - 5x - 2 > 0 \\ x^2 - 4x + 3 < 0 \end{cases}$ $[2 < x < 3]$

314 $\begin{cases} 4x - 12 > 0 \\ x^2 - 4 > 0 \\ x^2 - 6x + 5 < 0 \end{cases}$ $[3 < x < 5]$

315 $\begin{cases} x^2 - 6x + 5 > 0 \\ x^2 - 6x + 8 < 0 \end{cases}$ [impossibile]

316 $\begin{cases} 7 + x > 12 - x \\ 6 - 2x > 4 \end{cases}$ [impossibile]

317 $\begin{cases} 25 - x > 9 \\ 2(x-1) < 5 \end{cases}$ $\left[x < \dfrac{7}{2}\right]$

318 $\begin{cases} \dfrac{3}{2}x + 1 < 0 \\ x + \dfrac{1}{3} > 0 \end{cases}$ [impossibile]

319 $\begin{cases} \dfrac{1}{2}x + 3 > 0 \\ 2x - \dfrac{1}{3} < 0 \end{cases}$ $\left[-6 < x < \dfrac{1}{6}\right]$

320 $\begin{cases} x - \dfrac{1}{3} < 2 \\ 2(x-1) - x > 6(x-1) \end{cases}$ $\left[x < \dfrac{4}{5}\right]$

321 $\begin{cases} \dfrac{1}{2}x - \dfrac{5}{3} \leqslant 0 \\ x - \dfrac{1}{5} < 0 \end{cases}$ $\left[x < \dfrac{1}{5}\right]$

322 $\begin{cases} 7(x-7) > 0 \\ 2(15-x) < 3x \end{cases}$ $[x > 7]$

323 $\begin{cases} \dfrac{1}{3}(x-1) + \dfrac{1}{2}(x-2) < 2 \\ 2(x-1) > \dfrac{1}{2}(3-x) \end{cases}$ $\left[\dfrac{7}{5} < x < 4\right]$

324 $\begin{cases} \dfrac{1}{2}x - 1 \leqslant \dfrac{x+2}{3} \\ x + 5 > \dfrac{x-1}{4} \end{cases}$ $[-7 < x \leqslant 10]$

325 $\begin{cases} 2x - \dfrac{2}{3} \leqslant \dfrac{x-9}{3} \\ \dfrac{2x-1}{2} < \dfrac{1}{2}x + 3 \end{cases}$ $\left[x \leqslant -\dfrac{7}{5}\right]$

326 $\begin{cases} x^2+3x-4 \geqslant 0 \\ x^2-5x+6 \geqslant 0 \end{cases}$ $[x \leqslant -4 \vee 1 \leqslant x \leqslant 2 \vee x \geqslant 3]$

327 $\begin{cases} 2(x+1)+4x > 3(2x-3) \\ \dfrac{(x-3)^2}{4} - \dfrac{(2x-1)^2}{16} < \dfrac{35}{16} \end{cases}$ $[x > 0]$

328 $\begin{cases} x+\dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{3}(x+3)-1 \\ 6x+13 \geqslant 0 \end{cases}$ $\left[-\dfrac{13}{6} \leqslant x < -\dfrac{3}{4}\right]$

329 $\begin{cases} x^2+3x-18 \geqslant 0 \\ 12x^2+12x+3 > 0 \end{cases}$ $[x \leqslant -6 \vee x \geqslant 3]$

330 $\begin{cases} \dfrac{x^2+2x+1}{x^2-x-2} \geqslant 0 \\ x^2-6x+9 > 0 \\ \dfrac{1}{x} \geqslant -1 \end{cases}$ $[x < -1 \vee x > 2, x \neq 3]$

331 $\begin{cases} \dfrac{x-3}{2} + \dfrac{2-x}{4} \leqslant \dfrac{x-1}{8} \\ \dfrac{x-3}{2} < x + \dfrac{2x}{3} \end{cases}$ $\left[-\dfrac{9}{7} < x \leqslant 7\right]$

332 $\begin{cases} 2x^2-5x+2 > 0 \\ x-2 \geqslant \dfrac{1}{3}x-4 \end{cases}$ $\left[-3 \leqslant x < \dfrac{1}{2} \vee x > 2\right]$

333 $\begin{cases} -2x(1-x^2) \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{2}(x-1) > 0 \end{cases}$ $[x \leqslant -1 \vee 0 \leqslant x \leqslant 1]$

334 Vero o falso?

a. La disequazione $(x-1)^2 \geqslant (x+1)^2$ è di primo grado. V F

b. La disequazione $x(x-1) \geqslant 2x$ equivale a $x-1 \geqslant 2$. V F

c. L'insieme soluzione di una disequazione di secondo grado varia a seconda del segno del discriminante dell'equazione associata. V F

d. Se l'equazione associata a una disequazione di secondo grado è impossibile, anche la disequazione è impossibile. V F

e. L'insieme soluzione di una disequazione di secondo grado $ax^2+bx+c > 0$, con $\Delta > 0$, è costituito dagli intervalli esterni alle soluzioni x_1 e x_2 dell'equazione associata, qualsiasi sia il segno del coefficiente a. V F

[2 affermazioni vere e 3 false]

335 Indica la risposta corretta.

a. Se risolvendo una disequazione l'incognita viene eliminata, allora la disequazione:

A può essere impossibile
B è sempre verificata
C non si può risolvere
D è indeterminata

b. Data la disequazione $-2x-1 \geqslant 2$, moltiplicando i due membri per -1 si ottiene:

A $2x-1 \leqslant -2$ B $2x-1 \geqslant -2$ C $2x+1 \geqslant 2$ D $2x+1 \leqslant -2$

c. La disequazione $3x \leqslant -1$ è verificata per:

A $x \leqslant 3$ B $x \leqslant -3$ C $x \leqslant \frac{1}{3}$ D $x \leqslant -\frac{1}{3}$

d. La disequazione $3-x > 1$ è verificata per:

A $x < 2$ B $x < -2$ C $x > -2$ D $x < 4$

e. L'insieme soluzione della disequazione $0 \cdot x \geqslant 1$ è:

A $\mathbb{R}$ B $\emptyset$ C $\{x \geqslant 0\}$ D $\{x \geqslant 1\}$

f. La disequazione $-\frac{4}{3}x \geqslant 1$ è verificata per:

A $x \geqslant \frac{7}{3}$ B $x \leqslant -\frac{3}{4}$ C $x \geqslant \frac{3}{4}$ D $x \geqslant -\frac{1}{3}$

g. La disequazione $-\frac{4}{3}x \geqslant 0$ è verificata per:

A $x \leqslant 0$ B $x \geqslant 0$ C $x \leqslant \frac{3}{4}$ D $x \geqslant \frac{3}{4}$

h. L'insieme soluzione della disequazione $5+x \geqslant 4+x$ è:

A $\mathbb{R}$ B $\emptyset$ C $\{x \geqslant 0\}$ D $\{x \geqslant 1\}$

i. L'insieme soluzione della disequazione $4x+4 > 2(2x+2)$ è:

A $\mathbb{R}$ B $\emptyset$ C $\{x > 0\}$ D $\{x = 0\}$

j. L'insieme soluzione della disequazione $4x+4 \geqslant 3\left(x+\frac{4}{3}\right)$ è:

A $\mathbb{R}$ B $\emptyset$ C $\{x \geqslant 0\}$ D $\left\{x \geqslant \frac{16}{3}\right\}$

[Quattro risposte A, tre B, una C e due D]

336 Indica la risposta corretta.

a. L'insieme soluzione della disequazione $(x-2)^2+x+2 \leqslant (x-1)(x+1)$ è:

A $\left\{x \geqslant \frac{7}{3}\right\}$ B $\{x \geqslant 1\}$ C $\{x \geqslant 2\}$ D $\emptyset$

b. Se a e b sono due numeri positivi tali che $a > b$, allora:

A $-a > -b$ B $-b < a$ C $-a > b$ D $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

c. Date le due disequazioni

$$4 - x < 3 - 2x \qquad x - 4 > 2x - 3$$

allora:

A hanno le stesse soluzioni

B le soluzioni della prima sono opposte a quelle della seconda

C non c'è alcun legame tra le soluzioni delle due disequazioni

D le soluzioni della prima hanno il verso contrario rispetto a quelle della seconda

d. Se a e b sono due numeri negativi tali che $a > b$, allora:

A $-a < -b$ B $-a > -b$ C $-a < b$ D $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

e. Quale tra le seguenti disequazioni rappresenta il problema «trova i numeri tali che il loro doppio sia minore del loro triplo diminuito di 1»?

A $2x < 3x - 1$ B $2x > 3x - 1$ C $3x > 2x - 1$ D $3x < 2x - 1$

f. La disequazione $(x-1)x > 0$ è verificata per:

A $x < 0 \vee x > 1$ B $0 < x < 1$ C $x > 0$ D $x < 1$

g. La disequazione $\frac{x+1}{x-2} \geqslant 0$ è verificata per:

A $-1 < x < 2$ C $-1 < x \leqslant 2$

B $x \leqslant -1 \vee x > 2$ D $-2 < x \leqslant 1$

h. La disequazione $\frac{x+1}{x+2} < 1$ è verificata per:

A $x < 1 \vee x > 2$ C $x > -2$

B $-2 < x < 1$ D $x > 1$

i. Il sistema $\begin{cases} x - 1 > 0 \\ x + 2 < 0 \end{cases}$ è verificato per:

A $-2 < x < 1$

B $1 \leqslant x < 2$

C $-1 < x < 2$

D mai verificato

j. Il sistema $\begin{cases} (x+1)(x+2) \geqslant 0 \\ \dfrac{x-1}{x-2} \leqslant 0 \end{cases}$ è verificato per:

A $x < -2 \vee x > 1$

B $1 \leqslant x < 2$

C $-1 < x < 1$

D $-1 < x < 2$

[Cinque risposte A, tre B, una C e una D]

337 Indica la risposta corretta.

a. Una sola delle disequazioni seguenti (in cui $x \in \mathbb{R}$) è impossibile. Quale?

A $x^2 < x$ B $2x - 4 \leqslant 0$ C $x < x + 1$ D $x > x + 1$

b. Le lettere a e b rappresentano due numeri reali. Si sa che $a < b$. Allora, necessariamente:

A $b - a < 0$ B $a/b < 0$ C $b - a > 0$ D $a - b > 0$

c. Si sa che $2x < 11$. Allora, necessariamente:

A $x < 5$

B $x > -9$

C $x < 11/2$

D nessuna delle precedenti

d. Si sa che $-2x < 11$. Allora, necessariamente:

A $x < 9$

B $x > -9$

C $x < 11/2$

D nessuna delle precedenti

e. Uno solo dei seguenti numeri è una soluzione della disequazione $5(x - 1) < 4x + 3$. Quale?

A 7 B 8 C 9 D 10

f. L'insieme soluzione della disequazione $x^4 > -3$, disegnato sulla retta reale, è:

A un punto
C un intervallo illimitato
B un intervallo limitato
D tutta la retta

g. L'insieme soluzione della disequazione $x + 2x + 3x \leqslant 4x + 5x$ è:

A vuoto
C un intervallo limitato
B formato da un solo elemento
D un intervallo illimitato

h. L'insieme soluzione della disequazione $x + 2x + 3x \geqslant 4x + 5x$ è:

A vuoto
C un intervallo limitato
B formato da un solo elemento
D un intervallo illimitato

i. La disequazione $x - 2(1 - x) < 2x$ è verificata per:

A $x = 2$
B $x < 2$
C $x = 0$
D $x > 0$

j. L'insieme soluzione del sistema $\begin{cases} x - 1 < 5 \\ x - 1 \geqslant 5 \\ x - 3 < 0 \end{cases}$ è

A $\emptyset$
B $\{1\}$
C $\{3\}$
D $\{5\}$

[Due risposte A, una B, due C e cinque D]

338 Indica la risposta corretta.

a. La disequazione $x^3 - x^2 + 4x < 0$ è verificata per:

A $x > 0$
B $x < 0$
C $-\frac{1}{2} \leqslant x < \frac{3}{2}$
D $x > 4$

b. Se $-1 < x < 0$, allora quale delle seguenti affermazioni è *falsa*?

A $\frac{1}{x^2} > 1$
B $x^2 - 1 < 0$
C $\frac{1 - x}{x} < 0$
D $\frac{1}{x} > -1$

c. Il trinomio $2x^2 - 5x - 8$

A non è mai negativo
C non è mai positivo
B è negativo in un intervallo limitato
D nessuna delle risposte precedenti

d. Il trinomio $2x^2 - 5x + 8$

A non è mai negativo

B è negativo in un intervallo limitato

C non è mai positivo

D nessuna delle risposte precedenti

e. $\{3 < x < 7\}$ è l'insieme soluzione della disequazione:

A $x^2 - 10x + 21 < 0$

B $x^2 + 10x + 21 < 0$

C $x^2 - 10x + 21 > 0$

D $x^2 + 10x + 21 > 0$

f. Una disequazione di secondo grado in cui il trinomio ha discriminante positivo:

A ha una sola soluzione

B ha esattamente due soluzioni

C ha infinite soluzioni

D è impossibile o indeterminata

g. Una disequazione di secondo grado in cui il trinomio ha discriminante negativo:

A ha una sola soluzione

B ha esattamente due soluzioni

C ha infinite soluzioni

D è impossibile o indeterminata

h. L'insieme soluzione del sistema $\begin{cases} 4x^2 - 3x - 1 > 0 \\ x^2 - 2x < 0 \end{cases}$, rappresentato sulla retta reale, è:

A vuoto

B un punto

C un intervallo limitato

D un intervallo illimitato

i. L'insieme soluzione della disequazione $x^4 < -3$, rappresentato sulla retta reale, è:

A vuoto

B un punto

C un intervallo limitato

D un intervallo illimitato

j. L'insieme soluzione della disequazione $x^4 \geqslant -3$, rappresentato sulla retta reale, è:

A vuoto

B un punto

C un intervallo limitato

D un intervallo illimitato

[Tre risposte A, due B, due C e tre D]

339 Indica la risposta corretta.

a. L'insieme soluzione della disequazione $(x^2 + 1)(x^2 - 1) < 0$ è:

$\boxed{\text{A}}$ $\{x > 1\}$ $\boxed{\text{B}}$ $\{-1 < x < 1\}$ $\boxed{\text{C}}$ $\{x < -1\}$ $\boxed{\text{D}}$ $\{x < -1 \vee x > 1\}$

b. Si considerino le due disequazioni $x > 1$ e $x^2 > 1$. Allora:

$\boxed{\text{A}}$ sono equivalenti

$\boxed{\text{B}}$ l'elevamento al quadrato ha fatto perdere soluzioni

$\boxed{\text{C}}$ l'elevamento al quadrato ha introdotto soluzioni estranee

$\boxed{\text{D}}$ la seconda disequazione è sempre verificata

c. Si considerino le due disequazioni $x^2 + \frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{x}$ e $x^2 \geqslant 0$. Allora:

$\boxed{\text{A}}$ gli insiemi soluzioni delle due disequazioni sono disgiunti

$\boxed{\text{B}}$ la prima disequazione è verificata per ogni $x \in \mathbb{R}$

$\boxed{\text{C}}$ sono equivalenti

$\boxed{\text{D}}$ ogni soluzione della prima disequazione è anche soluzione della seconda

d. L'insieme soluzione della disequazione $(\sqrt{2} - \sqrt{3})x < 0$ è:

$\boxed{\text{A}}$ $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{B}}$ $\{x \geqslant 0\}$ $\boxed{\text{C}}$ $\{x > 0\}$ $\boxed{\text{D}}$ $\{x < 0\}$

e. Si considerino le due disequazioni $x^3 - x^2 \geqslant 0$ e $x - 1 \geqslant 0$. Allora:

$\boxed{\text{A}}$ sono equivalenti

$\boxed{\text{B}}$ ogni soluzione della prima disequazione è anche soluzione della seconda

$\boxed{\text{C}}$ ogni soluzione della seconda disequazione è anche soluzione della prima

$\boxed{\text{D}}$ gli insiemi soluzione delle due disequazioni sono disgiunti

f. L'insieme soluzione della disequazione $x^2 > 0$ è:

$\boxed{\text{A}}$ $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\boxed{\text{B}}$ $\{x \geqslant 0\}$ $\boxed{\text{C}}$ $\{x > 0\}$ $\boxed{\text{D}}$ $\mathbb{R}$

g. L'insieme soluzione della disequazione $x^2 \geqslant 0$ è:

$\boxed{\text{A}}$ $\{x > 0\}$ $\boxed{\text{B}}$ $\{x \geqslant 0\}$ $\boxed{\text{C}}$ $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\boxed{\text{D}}$ $\mathbb{R}$

[Una risposta A, una B, tre C e due D]

340 Vero o falso?

a. Aggiungendo un numero negativo a entrambi i membri di una disuguaglianza, si ottiene una disuguaglianza di verso opposto. V F

b. Moltiplicando entrambi i membri di una disuguaglianza per uno stesso numero si ottiene sempre una disuguaglianza dello stesso verso. V F

c. Dividendo entrambi i membri di una disuguaglianza per un numero positivo si ottiene una disuguaglianza dello stesso verso. V F

d. La disuguaglianza fra i reciproci di due numeri negativi ha verso contrario rispetto a quello fra i numeri stessi. V F

e. In generale, le disequazioni lineari hanno come soluzione un unico valore. V F

f. In generale, l'insieme soluzione di una disequazione lineare è costituito da un numero finito di valori. V F

g. Due disequazioni si dicono *equivalenti* se hanno le stesse soluzioni. V F

h. Se si moltiplicano entrambi i membri di una disequazione per uno stesso numero diverso da zero, si ottiene una disequazione a essa equivalente. V F

i. Due disequazioni equivalenti hanno lo stesso verso. V F

j. Tutte le disequazioni impossibili sono fra loro equivalenti. V F

[4 affermazioni vere e 6 false]

341 Indica la risposta corretta.

a. Se fra tre numeri reali a, b e c, vale la relazione $0 < a < b < c$, quale delle seguenti affermazioni è sicuramente *falsa*?

A $1/c < 1/a$ B $c - b > 0$ C $a^2 < b^2$ D $a - 2b > 0$

b. Le seguenti disequazioni sono tutte equivalenti, tranne una. Quale?

A $2x > 4$ B $x > 2$ C $x + 2 > 0$ D $-2x < -4$

c. Considera le due disuguaglianze:

$$-5 < -3 \qquad -4 < 7$$

Quale, delle seguenti affermazioni, è *falsa*?

A sono entrambe disuguaglianze vere

B hanno entrambe lo stesso verso

C Sommando 4 a entrambi i membri delle disuguaglianze, i loro versi restano inalterati

D Moltiplicando per -5 entrambi i membri delle disuguaglianze, la prima cambia verso mentre nella seconda il verso resta lo stesso

d. Sono date le due disequazioni:

$$3(x-3) > 7x+5 \qquad 3(x-3) > 7$$

Fra le seguenti, qual è l'unica affermazione *vera*?

$\boxed{\text{A}}$ $x = 0$ è soluzione della prima disequazione

$\boxed{\text{B}}$ $x = 5$ è soluzione della seconda disequazione

$\boxed{\text{C}}$ $x = 4$ non è soluzione né della prima né della seconda disequazione

$\boxed{\text{D}}$ le due disequazioni sono equivalenti perché hanno il primo membro uguale

e. Sono date le due disequazioni:

$$\frac{1}{2}x - 3 < 0 \qquad \frac{1}{2}x - 3 < \frac{1}{3}x - 2$$

Fra le seguenti, qual è l'unica affermazione *falsa*?

$\boxed{\text{A}}$ Sono tutte determinate

$\boxed{\text{B}}$ $x = 0$ è soluzione di entrambe le disequazioni

$\boxed{\text{C}}$ Se un valore di x soddisfa la prima disequazione, allora soddisfa la seconda

$\boxed{\text{D}}$ Se un valore di x soddisfa la seconda disequazione, allora non soddisfa la prima

f. Quale, fra le seguenti disequazioni, ha come insieme soluzione $[2/3, +\infty)$?

$\boxed{\text{A}}$ $2 - 3x > 0$ $\boxed{\text{B}}$ $2 \leqslant 3x$ $\boxed{\text{C}}$ $3 - 2x < 0$ $\boxed{\text{D}}$ $3 \leqslant 2x$

g. Quale, fra le seguenti disequazioni, *non* ha come insieme soluzione $[-1/2, +\infty)$?

$\boxed{\text{A}}$ $-2x < 1$ $\boxed{\text{B}}$ $x > -1/2$ $\boxed{\text{C}}$ $x > -(x+1)$ $\boxed{\text{D}}$ $2x < -1$

h. La disequazione $-1/x \geqslant 0$ è verificata per:

$\boxed{\text{A}}$ $x < 0$ $\boxed{\text{B}}$ $x < -1$ $\boxed{\text{C}}$ $x > 1$ $\boxed{\text{D}}$ $x > 0$

i. La disequazione $(x-1)/x \leqslant 0$ è verificata per:

$\boxed{\text{A}}$ $x \leqslant 1$ $\boxed{\text{C}}$ $x < 0 \vee x \geqslant 1$

$\boxed{\text{B}}$ $x < 0 \vee x \geqslant -1$ $\boxed{\text{D}}$ $0 < x \leqslant 1$

j. Solo una, delle seguenti disequazioni, è equivalente alla disequazione $-6x + 2 \leqslant 2x - 4$. Quale?

A $4x \geqslant -1$ B $4x \geqslant -3$ C $4x \leqslant -1$ D $-4x \leqslant -3$

[Una risposta A, una B, due C e sei D]

342 Vero o falso?

a. Se una disequazione ha come risultato $2 > 0$, allora $x = 0$ è una soluzione della disequazione. V F

b. Una disequazione che non è verificata per alcun valore di x è detta *impossibile*. V F

c. La disequazione $x < x$ è impossibile. V F

d. La disequazione $x \geqslant x$ è indeterminata. V F

e. La disequazione $3x > -3$ ha come soluzione $x < -1$. V F

f. Una disequazione si dice *fratta* se contiene l'incognita sia al numeratore che al denominatore. V F

g. Studiare il segno di una frazione algebrica vuol dire cercare per quali valori dell'incognita la frazione è positiva, negativa o nulla. V F

h. Nelle disequazioni fratte, l'insieme soluzione può anche essere un intervallo limitato. V F

i. In un sistema di due disequazioni è possibile che queste abbiano soluzioni e che il sistema non ne abbia. V F

j. Le soluzioni di un sistema di disequazioni devono soddisfare ogni disequazione che lo compone. V F

k. Se una delle disequazioni di un sistema è indeterminata, allora il sistema è indeterminato. V F

l. Se una delle disequazioni di un sistema è impossibile, allora il sistema è impossibile. V F

[9 affermazioni vere e 3 false]

343 Indica la risposta corretta.

a. È dato il seguente problema: «Un rettangolo, con un lato di 10 cm, ha il perimetro non inferiore a 30 cm. Quali valori può assumere l'altro lato?» Quale, fra le seguenti disequazioni, ne è la traduzione algebrica?

A $2(10+x) = 30$ B $2(10+x) \leqslant 30$ C $2(10+x) < 30$ D $2(10+x) \geqslant 30$

b. Fra le seguenti, qual è la frase che traduce la disequazione $\frac{1}{2}x - 3 \leqslant 3x - \frac{1}{2}$?

A La metà di un numero sommata a 3 non è superiore alla differenza tra il triplo del numero stesso e 1/2. Trova il numero.

B La metà di un numero sommata a 3 è inferiore al triplo del numero stesso meno 1/2. Trova il numero.

C La differenza tra la metà di un numero e 3 non è superiore alla differenza tra il triplo del numero stesso e 1/2. Trova il numero.

D Togliendo 3 alla metà di un numero si ottiene un numero non superiore al triplo della differenza tra il numero stesso e 1/2.

c. Dato il sistema $\begin{cases} 2x-4 \geqslant 0 \\ -x+4 \geqslant 0 \end{cases}$, uno dei seguenti valori *non* appartiene all'insieme delle sue soluzioni. Quale?

A 1 B 2 C 3 D 4

d. Il sistema $\begin{cases} x^2-25 \leqslant 0 \\ x^2+3x > 18 \end{cases}$ è verificato per:

A $x > 3$ B $x \leqslant 5$ C $3 \leqslant x < 5$ D $3 < x \leqslant 5$

e. Quale delle seguenti disequazioni è fratta?

A $\dfrac{3-x}{3+5} \leqslant 0$ B $\dfrac{3-x}{3+x} \geqslant 0$ C $\dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{5} \geqslant 0$ D $\dfrac{4+2x}{-1} \leqslant 0$

f. Quale delle seguenti è una disequazione di secondo grado nell'incognita x?

A $x-(x-2) > 0$ B $\dfrac{x}{x+2} \geqslant 0$ C $x+(x+2) \geqslant 0$ D $x(x+2) \leqslant 0$

g. Quante soluzioni ha la disequazione $x^2-4x+4 \leqslant 0$?

A nessuna B una C due D infinite

h. Il valore -1 appartiene all'insieme soluzione della disequazione:

A $-1-x^2 \geqslant 0$ B $1+x^2 \leqslant 0$ C $1-x^2 \geqslant 0$ D $1-x^2 < 0$

i. La disequazione $1-4x^2 \leqslant 0$ è verificata per:

A $x \leqslant -\dfrac{1}{2} \vee x \geqslant \dfrac{1}{2}$ C $-2 \leqslant x \leqslant 2$

B $-\dfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2}$ D $x \leqslant -2 \vee x \geqslant 2$

j. Il valore 3 appartiene all'insieme soluzione del sistema di disequazioni:

A $\begin{cases} x^2+4 \geqslant 0 \\ x^2+16 \leqslant 0 \end{cases}$ B $\begin{cases} x^2-4 \geqslant 0 \\ x^2-16 \leqslant 0 \end{cases}$ C $\begin{cases} x^2 < 0 \\ x^2-3 > 0 \end{cases}$ D $\begin{cases} x^2-1 \geqslant 0 \\ x^2+3 \leqslant 0 \end{cases}$

[Due risposte A, tre B, due C e tre D]

344 Indica la risposta corretta.

a. Il sistema di disequazioni $\begin{cases} x^2-5x+6 \leqslant 0 \\ x^2-4 \leqslant 0 \end{cases}$ è verificato per:

A $x = 2$

B $-3 \leqslant x \leqslant 2$

C $-3 \leqslant x < 2$

D $x = \pm 2 \vee x = 3$

b. La disequazione fratta $\dfrac{1}{x-3} \geqslant 0$ è verificata per:

A $x \neq 3$ B $x > 3$ C $x > 1$ D $1 \leqslant x < 3$

c. Quante sono le soluzioni della disequazione $\dfrac{3x^2+1}{x^2} \leqslant 0$?

A nessuna B una C due D infinite

d. La disequazione fratta $\dfrac{1}{x} \leqslant 2$ è verificata per:

A $x > 0$ B $x \leqslant \dfrac{1}{2}$ C $0 < x \leqslant \dfrac{1}{2}$ D $x < 0 \vee x \geqslant \dfrac{1}{2}$

e. Quale dei seguenti numeri è soluzione della disequazione $\dfrac{x^2-4}{x^2} > 0$?

A 0 B 1 C 2 D 3

f. Il segno della frazione algebrica $\dfrac{1-x}{1+x^2}$ dipende:

A solo dal segno del numeratore

B dal segno di x^2

C solo dal segno del denominatore

D non si può sapere senza risolverla

g. la frazione algebrica $\dfrac{x-5}{5-x}$ è:

A sempre positiva

B sempre non negativa

C sempre positiva tranne che per $x = 5$, dove non è definita

D sempre negativa tranne che per $x = 5$, dove non è definita

h. Considerata la funzione $f(x) = 2x^2 + 3$, quale delle seguenti proposizioni è corretta?

A $f(x) > 0 \quad \forall x \in R$

B $f(x) > 0 \quad \forall x > 0$

C $f(x) > 0 \quad \forall x > -\dfrac{3}{2}$

D $f(x) > 0 \quad \forall x < -\dfrac{3}{2}$

i. Considerata la funzione $f(x) = 1 - 4x^2$, quale delle seguenti proposizioni è corretta?

A $f(x) \geqslant 0 \quad \forall x \leqslant \frac{1}{4}$

B $f(x) \geqslant 0 \quad \forall x \geqslant \frac{1}{4}$

C $f(x) \geqslant 0 \quad \forall x \leqslant -\frac{1}{2} \vee x \geqslant \frac{1}{2}$

D $f(x) \geqslant 0 \quad \forall x$ tale che $-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$

j. La funzione $f(x) = 5 - x^2$ cambia segno in corrispondenza di x uguale a:

A 0 B ± 5 C $\pm\sqrt{5}$ D $\pm 1/\sqrt{5}$

k. L'insieme soluzione della disequazione $(x-1)(x-2)(x-3) \geqslant 0$ è:

A $\emptyset$

B $\{1, -2, 3\}$

C $\{-1, 2, -3\}$

D nessuno dei precedenti

l. L'insieme soluzione della disequazione $\dfrac{x^2+4}{-2-x^2} \leqslant 0$ è:

A $\emptyset$

B $\left\{-\sqrt{2} \leqslant x \leqslant \sqrt{2}\right\}$

C $\{-2 \leqslant x \leqslant 2\}$

D $\mathbb{R}$

[Quattro risposte A, una B, una C e sei D]

345 Indica la risposta corretta.

a. Se $a > b$ e $c < b$, allora:

A $a > b + c$ B $a > c$ C $a = c$ D $a < c$

b. Se x e y sono numeri reali positivi tali che $x < y$ allora:

A $1 < x/y$ B $x < y^2$ C $x^2 < xy$ D $1 > y/x$

c. La relazione $16 < x^2 < 36$ è verificata per:

A $-6 < x < -4 \vee 4 < x < 6$

B $-6 < x < 4$

C $-6 < x < -4$

D $4 < x < 6$

d. Quanti sono i numeri *interi positivi* che soddisfano la condizione «il loro triplo diminuito della loro metà è minore di 2»?

A nessuno B uno C due D infiniti

e. Quanti sono i numeri *reali positivi* che soddisfano la condizione «il loro triplo diminuito della loro metà è minore di 2»?

A nessuno B uno C due D infiniti

f. La disequazione $-x^2 - a > 0$, con $a \in \mathbb{R}$:

A è impossibile per ogni a
B è indeterminata per ogni a
C è indeterminata per ogni $a > 0$
D se $a > 0$ è impossibile

g. La disequazione $x^2 + y^2 \geqslant 2xy$ è verificata:

A sempre
B solo se $x = y = 0$
C solo se $x > 0$ e $y > 0$
D solo se x e y sono concordi

[Tre risposte A, una B, una C e due D]

346 Indica la risposta corretta.

a. La disequazione $x^2 + 1 > 0$ è verificata per:

A ogni valore di x
B ogni valore di x tranne $x = 1$
C nessun valore di x
D $x < -1 \vee x > 1$

b. La disequazione $x^2 - x + 2 < 0$ è verificata:

A mai
B sempre
C per $-1 < x < 2$
D per $x < -2 \vee x > 1$

c. Il trinomio $x^2 - x - 6$ è positivo per:

A $-2 < x < 3$
B $x < -3 \vee x > 2$
C $x > -2 \wedge x > 3$
D $x < -2 \vee x > 3$

d. Il trinomio $x^2 - 6x + 9$ è:

A sempre positivo
B sempre negativo
C sempre non positivo
D sempre non negativo

e. La disequazione $x^2 - 4x + 4 \leqslant 0$ ha:

A nessuna soluzione
B una sola soluzione
C due soluzioni
D infinite soluzioni

f. Per quale delle seguenti disequazioni il valore 1 appartiene all'insieme soluzione?

A $x^2 - 2x + 1 > 0$

B $x^2 + x \leqslant 1$

C $x^2 - 5x + 6 \leqslant 0$

D $x^2 - 5x + 6 \geqslant 0$

g. La disequazione $-x^2 + 4x - 3 \geqslant 0$ è verificata per:

A $x \leqslant 1 \vee x \geqslant 3$

B $x \leqslant -1 \vee x \geqslant 3$

C $1 \leqslant x \leqslant 3$

D nessun valore di x

[Due risposte A, una B, una C e tre D]

347 Indica la risposta corretta.

a. Per quali valori di x è $x^2 > 36$?

A $x > -6$

B $x < -6 \vee x > 6$

C $-6 < x < 6$

D $x > 6$

b. La disequazione $9(3x^2 + 2) > 16(x - 3)$ è verificata:

A sempre

B solo se $x < 0$

D mai

E solo se $x \geqslant 0$

c. La disequazione $x^2 > x$ è verificata:

A $\forall x \in \mathbb{R}$

B per $x < 0 \vee x > 1$

C mai

D solo se $x > 1$

d. La disequazione $x^2 < -9$ è verificata per:

A qualunque valore di x

B $x < -3 \vee x > 3$

C $-3 < x < 3$

D nessun valore di x

e. Per quali valori di x, con $a \in \mathbb{R}$, la disequazione $(ax)^2 + 3 > 0$ è verificata?

A solo per $x = a$

B solo per $x = 3$

C sempre

D mai

f. La disequazione $\frac{1}{x} < -1$ è verificata per ogni x tale che:

A $x > -1$ B $x < 0$ C $-1 < x < 0$ D $x < -1/2$

g. La frazione $\dfrac{x-1}{1-x}$ è:

A sempre positiva

B sempre negativa

C sempre positiva tranne per $x = 1$

D sempre negativa tranne per $x = 1$

[Una risposta A, due B, due C e due D]

Risolvi i seguenti sistemi di disequazioni lineari in due incognite, indicando anche le coordinate dei vertici.

348 $\begin{cases} y \leqslant x \\ y \geqslant -x \\ x \leqslant 2 \end{cases}$ [triangolo di vertici $(0,0)$, $(2,2)$, $(2,-2)$]

349 $\begin{cases} y \geqslant 1-2x \\ y \leqslant 0 \\ x \leqslant 3 \end{cases}$ $\left[\text{triangolo di vertici } (3,0),\ (3,-5),\ \left(\dfrac{1}{2},0\right)\right]$

350 $\begin{cases} y \geqslant -3x \\ x \leqslant 2 \\ y \leqslant \dfrac{x+2}{2} \end{cases}$ $\left[\text{triangolo di vertici } (2,-6),\ (2,2),\ \left(-\dfrac{2}{7},\dfrac{6}{7}\right)\right]$

351 $\begin{cases} x \geqslant 1 \\ x \leqslant 5 \\ y \geqslant 1 \\ y \leqslant 5 \end{cases}$ [quadrato di vertici $(1,1)$, $(5,1)$, $(5,5)$, $(1,5)$]

352 $\begin{cases} y \geqslant 0 \\ y \leqslant \dfrac{x+1}{3} \\ y \leqslant 2-x \\ x \geqslant \dfrac{1}{3} \end{cases}$ $\left[\text{quadrilatero di vertici } \left(\dfrac{1}{3},0\right),\ (2,0),\ \left(\dfrac{5}{4},\dfrac{3}{4}\right),\ \left(\dfrac{1}{3},\dfrac{4}{9}\right)\right]$

353 $\begin{cases} y \geqslant x-4 \\ y \leqslant \dfrac{6-x}{2} \\ y \leqslant x \\ y \geqslant 0 \end{cases}$ $\left[\text{quadrilatero di vertici } (0,0),\ (4,0),\ \left(\dfrac{14}{3},\dfrac{2}{3}\right),\ (2,2)\right]$

354 $\begin{cases} y \geqslant x-6 \\ y \leqslant 4-x \\ 2x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$ [triangolo di vertici $(0,0)$, $(4,0)$, $(0,4)$]

355 $\begin{cases} y \geqslant x-6 \\ y \geqslant 4-x \\ 2x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$ [angolo di vertice $(5,-1)$]

356 $\begin{cases} y \leqslant x+3 \\ y \leqslant 3-x \\ y \geqslant x-3 \\ y \geqslant -x-3 \end{cases}$ [quadrato di vertici $(3,0)$, $(0,3)$, $(-3,0)$, $(0,-3)$]

357 Nella soluzione di due test Anna ha riportato rispettivamente 40 punti e 28 punti. Quale punteggio deve riportare Anna al terzo test per ottenere complessivamente una media di almeno 45 punti? [Almeno 67 punti]

358 Eva decide di iscriversi a un corso online di cucina. La spesa del corso comprende una quota fissa di 250 euro e un importo di 15 euro per ogni lezione seguita. Se Eva non vuole spendere più di 740 euro, quante lezioni potrà seguire? [Al massimo 64]

359 Un assicuratore guadagna ogni mese la cifra fissa di 800 euro più 75 euro per ogni nuova polizza stipulata. Quante polizze deve stipulare in un mese per guadagnare più di 1500 euro? [Almeno 10 polizze]

360 Due aziende telefoniche applicano le seguenti tariffe: la prima applica un costo fisso di 0,10 euro per ogni telefonata più 0,30 euro per ogni minuto di conversazione; la seconda applica un costo fisso di 0,20 euro più 0,25 euro per ogni minuto di conversazione. Per telefonate di quale durata è più conveniente la prima azienda? [Minori di due minuti]

361 A un rappresentante vengono proposti due diversi piani di retribuzione. Il piano A prevede uno stipendio fisso mensile di 600 euro e una percentuale dell'8% sulle vendite. A quanto dovrebbero ammontare le vendite in un mese perché sia più conveniente la proposta del piano A? [Meno di 10 000 euro]

362 Il prezzo di una maglia, dopo uno sconto del 20%, è compreso tra 30 euro e 40 euro. Quanto poteva costare in origine la maglia? [Tra 37,50 euro e 50 euro]

363 Un commerciante deve pagare sul fatturato mensile un'imposta che è uguale al 5% fino a un fatturato di 5000 euro e diventa del 10% per il fatturato eccedente i 5000 euro. In un dato mese il commerciante ha pagato un'imposta di più di 500 euro. Che cosa si può affermare sul fatturato di quel mese? [È stato superiore a 7500 euro.]

364 Il ricavo derivante dalla vendita di un'unità di un certo articolo è di 12,50 euro. Per produrre un'unità dell'articolo l'azienda sostiene un costo fisso mensile di 1000 euro più un costo di 4,25 euro per ogni unità dell'articolo. Quanti articoli devono essere prodotti e venduti in un mese perché l'azienda generi un profitto? [Almeno 122]

365 Il ricavo derivante dalla vendita di un'unità di un certo articolo è di 25,80 euro. Per produrre un'unità dell'articolo l'azienda sostiene un costo fisso mensile di 1250 euro più un costo di 10,30 euro per ogni unità dell'articolo. Quanti articoli devono essere prodotti e venduti in un mese perché l'azienda generi un profitto? [Almeno 81]

366 Una persona ha 15 000 euro che vuole impiegare in due investimenti, A e B. L'investimento A garantisce un tasso del 5% annuo e l'investimento B un tasso del 3% annuo. Quanto bisogna impiegare nell'investimento A perché dopo un anno l'interesse complessivamente generato dai due investimenti sia di almeno 600 euro? [Almeno 7500 euro]

3 ESPONENZIALI E LOGARITMI

Oggi ci sono calcolatrici e computer e non ci si rende conto dell'importanza di fare i calcoli rapidamente e in modo preciso. Quando Nepero inventò i logaritmi, i matematici contemporanei dissero che era stata loro regalata la metà della vita: infatti l'attività principale dei matematici, e soprattutto di quelli che si occupavano di astronomia e astrologia (cioè di quasi tutti), era quella di calcolare la posizione dei pianeti, e l'espressione "calcoli astronomici" non era solo un modo di dire.

Con i logaritmi si può trasformare prodotti in somme, quozienti in differenze, elevamenti a potenza in prodotti e calcoli di radici in quozienti, quindi tutte le operazioni vengono molto semplificate.

A questo aggiungiamo che i nostri sensi sono "logaritmici". Se per esempio ascoltiamo un suono e sentiamo poi un altro suono che ci sembra di intensità doppia, misurandoli vediamo che quest'ultimo ha intensità quattro volte superiore. La stessa cosa accade se vediamo una luce e poi un'altra che ci sembra tre volte più forte: misurandole troviamo che quest'ultima è nove volte più forte.

Il fatto che i nostri sensi siano in scala logaritmica ci permette di avere uno spettro di sensazioni molto più ampio di quello che avremmo se i nostri sensi fossero lineari. La risposta logaritmica del nostro udito ci permette di ascoltare il fruscio delle foglie in una giornata di leggera brezza, ma anche di sentire senza danni il rombo di un aereo che decolla. La risposta logaritmica della nostra vista a un segnale luminoso ci permette di vedere le stelle in una notte buia senza rimanere abbagliati da un paesaggio illuminato dal sole in pieno giorno.

3.1 RICHIAMI SULLE POTENZE

Potenze con esponente intero

Una potenza con esponente intero non è altro che una moltiplicazione ripetuta. Se dobbiamo moltiplicare 5 per se stesso sette volte, invece di scrivere $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$ è più comodo scrivere 5^7:

$$5^7 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$$

Il numero 5 si chiama *base*, il 7 si chiama *esponente* e 5^7 si chiama *potenza*. In generale:

Definizione 16. Si definisce *potenza* ennesima del numero a, e si indica con a^n, il prodotto di n fattori tutti uguali ad a. I numeri a e n si dicono rispettivamente *base* ed *esponente* della potenza a^n.

Convenzionalmente si pone $a^1 = a$.

Proprietà delle potenze

Per le potenze valgono le seguenti proprietà:

- Il prodotto di due potenze con la stessa base è uguale a una potenza che ha per base la stessa base e per esponente la somma degli esponenti:
$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$
Per esempio, $2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7$.
- Il prodotto di due potenze con lo stesso esponente è uguale a una potenza che ha per base il prodotto delle basi e per esponente lo stesso esponente:
$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$
Per esempio, $2^4 \cdot 3^4 = (2 \cdot 3)^4 = 6^4$.
- Il quoziente tra due potenze con la stessa base è uguale a una potenza che ha per base la stessa base e per esponente la differenza degli esponenti:
$$a^n : a^m = a^{n-m}$$
Per esempio, $4^5 : 4^2 = 4^{5-2} = 4^3$.
- Il quoziente tra due potenze con lo stesso esponente è uguale a una potenza che ha per base il rapporto tra le due basi e per esponente lo stesso esponente:
$$a^n : b^n = (a : b)^n$$
Per esempio, $6^5 : 3^5 = (6 : 3)^5 = 2^5$.
- La potenza di una potenza è ancora una potenza che ha per base la stessa base e per esponente il prodotto degli esponenti:
$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$
Per esempio, $(2^3)^4 = 2^{3 \cdot 4} = 2^{12}$.

Per fare in modo che le proprietà della divisione valgano anche nel caso in cui l'esponente del dividendo sia uguale o minore a quello del divisore, è necessario definire convenzionalmente anche:
$$a^0 = 1 \quad \text{e} \quad a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n} \quad \text{con } a \neq 0$$
La scrittura 0^0 non ha significato.

Potenze con esponente razionale

Il concetto di potenza si può estendere, mantenendone inalterate le proprietà, al caso in cui l'esponente è un numero razionale.

Definizione 17. Se a è un numero reale maggiore o uguale a zero, e m e n sono due interi positivi, si pone

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Per esempio: $4^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4^2}$, $9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$.

Senza la condizione $a \geqslant 0$ si può incorrere in contraddizioni. Per esempio, $(-8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-8} = -2$, ma poiché $1/3 = 2/6$ dovrebbe essere anche $(-8)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-8)^2} = 2$.

Potenze con esponente reale

Il concetto di potenza si può ulteriormente estendere, mantenendone ancora inalterate le proprietà, anche al caso in cui l'esponente sia un qualsiasi numero reale. Anche in questo caso si richiede che la base sia maggiore o uguale a zero.

3.2 FUNZIONI ESPONENZIALI

Definizione 18. Se a è un numero positivo e diverso da 1, la funzione $y = a^x$ è detta *funzione esponenziale*.

Per esempio, $y = 2^x$, $y = (1/2)^x$ e $y = 10^x$ sono funzioni esponenziali.

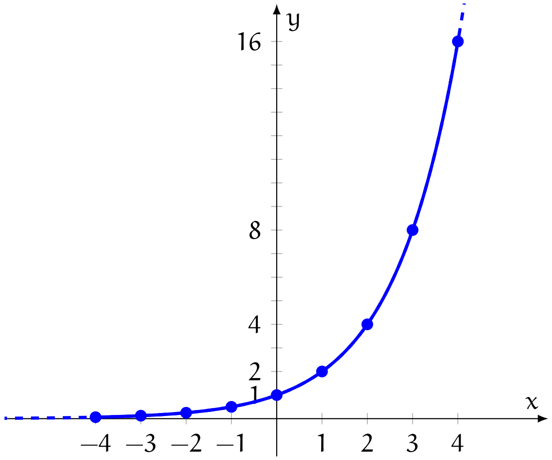
Come base di una funzione esponenziale si può prendere qualunque numero, purché sia positivo e diverso da 1, ma fra le varie basi ha particolare importanza il numero e (costante di Nepero o numero di Eulero): è un numero irrazionale che vale circa 2,7. La funzione esponenziale $y = e^x$ si indica anche con $y = \exp(x)$.

Esercizio 85. Disegna per punti il grafico della funzione $y = 2^x$.

Soluzione. La figura 8 mostra il grafico per punti della funzione $y = 2^x$. □

La funzione precedente:

- è definita per ogni x reale
- interseca l'asse y nel punto $(0, 1)$
- assume sempre valori positivi
- è sempre crescente



(a) Grafico

x	$y = 2^x$
-4	$2^{-4} = 1/16$
-3	$2^{-3} = 1/8$
-2	$2^{-2} = 1/4$
-1	$2^{-1} = 1/2$
0	$2^0 = 1$
1	$2^1 = 2$
2	$2^2 = 4$
3	$2^3 = 8$
4	$2^4 = 16$

(b) Alcuni valori

Figura 8: La funzione $y = 2^x$

- per ogni $x > 0$ è sempre $y > 1$
- per ogni $x < 0$ è sempre $0 < y < 1$

Questo tipo di grafico è comune a tutte le funzioni esponenziali $y = a^x$ con base $a > 1$.

Esercizio 86. Disegna per punti il grafico della funzione $y = (1/2)^x$.

Soluzione. La figura 9 mostra il grafico della funzione $y = (1/2)^x$. □

La funzione precedente:

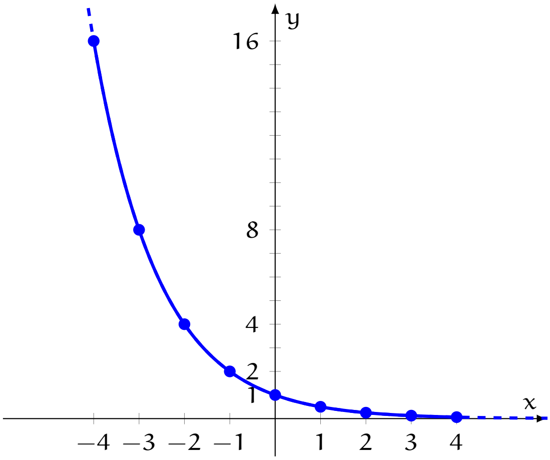
- è definita per ogni x reale
- assume sempre valori positivi
- interseca l'asse y nel punto $(0, 1)$
- è sempre decrescente
- per ogni $x > 0$ è sempre $0 < y < 1$
- per ogni $x < 0$ è sempre $y > 1$

Questo tipo di grafico è comune a tutte le funzioni esponenziali $y = a^x$ con base $0 < a < 1$.

3.3 LOGARITMI

Definizione

Consideriamo l'uguaglianza $2^3 = 8$. In essa ci sono tre elementi: la base 2, l'esponente 3 e la potenza 8.



(a) Grafico

x	$y = (1/2)^x$
-4	$(1/2)^{-4} = 16$
-3	$(1/2)^{-3} = 8$
-2	$(1/2)^{-2} = 4$
-1	$(1/2)^{-1} = 2$
0	$(1/2)^0 = 1$
1	$(1/2)^1 = 1/2$
2	$(1/2)^2 = 1/4$
3	$(1/2)^3 = 1/8$
4	$(1/2)^4 = 1/16$

(b) Alcuni valori

Figura 9: La funzione $y = (1/2)^x$

- Se non conosciamo la potenza, l'uguaglianza diventa $2^3 = x$. Il calcolo che risolve questa equazione è l'elevamento a potenza $x = 2^3$.
- Se non conosciamo la base, l'uguaglianza diventa $x^3 = 8$. Per risolvere questa equazione dobbiamo usare l'operazione di estrazione di radice $x = \sqrt[3]{8}$.
- Se non conosciamo l'esponente, l'uguaglianza diventa $2^x = 8$. Per risolvere questa equazione dobbiamo trovare l'esponente da dare a 2 per ottenere 8, questa è l'operazione di *logaritmo*. Si scrive $x = \log_2 8$ e si legge «logaritmo in base 2 di 8».

In generale:

Definizione 19. Si dice *logaritmo* in base a ($a > 0$, $a \neq 1$) del numero b ($b > 0$) l'esponente c che si deve dare alla base a per ottenere b:

$$c = \log_a b \iff a^c = b$$

Il numero a è detto *base* del logaritmo, mentre b è detto *argomento* del logaritmo.

Per esempio:

- $\log_2 8 = 3$, perché $2^3 = 8$
- $\log_3 9 = 2$, perché $3^2 = 9$
- $\log_9 27 = \frac{3}{2}$, perché $9^{\frac{3}{2}} = \sqrt{9^3} = 27$
- $\log_3 \frac{1}{9} = -2$, perché $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

Inoltre, per ogni $a > 0$, $a \neq 1$:

- $\log_a 1 = 0$, perché $a^0 = 1$
- $\log_a a = 1$, perché $a^1 = a$

Come base di un logaritmo si può prendere qualunque numero, purché sia positivo e diverso da 1, ma fra le varie basi alcune hanno particolare importanza:

- i logaritmi *decimali* hanno per base il numero 10, da cui il loro nome, e si indicano con $\log x$ (si omette la base);
- i logaritmi *naturali* hanno per base la costante di Nepero e e si indicano con $\ln x$.

Esercizio 87. Calcola il valore del logaritmo $\log_3 81$.

Soluzione. Dobbiamo trovare l'esponente da assegnare a 3 per ottenere 81. Se non riusciamo a trovarlo a mente, scomponiamo il numero 81. Poiché $81 = 3^4$, l'esponente è 4, quindi $\log_3 81 = 4$. □

Esercizio 88. Calcola la base del logaritmo $\log_x 9 = 2$.

Soluzione. Per la definizione di logaritmo si ha che $x^2 = 9$, equazione che ha come soluzioni $x = \pm 3$. Il valore $x = -3$ non è però accettabile, perché la base del logaritmo deve essere positiva. Quindi l'unica soluzione accettabile è $x = +3$. □

Proprietà

Poiché il logaritmo è l'esponente di una potenza, per esso sono valide proprietà analoghe a quelle delle potenze.

- Il logaritmo del prodotto di fattori positivi è uguale alla somma dei logaritmi dei singoli fattori:
$$\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c$$
Per esempio, $\log_2 (8 \cdot 4) = \log_2 8 + \log_2 4$.

- Il logaritmo di un quoziente di numeri positivi è uguale alla differenza tra il logaritmo del dividendo e il logaritmo del divisore:
$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$
Per esempio, $\log_3 \frac{81}{9} = \log_3 81 - \log_3 9$.

- Il logaritmo della potenza di un numero positivo è uguale al prodotto dell'esponente per il logaritmo della base.

$$\log_a (b^c) = c \log_a b$$

Per esempio, $\log_2 (4^3) = 3 \log_2 4$.

- Il logaritmo in base a di un numero b è uguale al rapporto tra il logaritmo del numero b in un'altra base c e il logaritmo della base a nella base c (questa formula è detta "formula del cambiamento di base"):

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Per esempio, $\log_4 16 = \dfrac{\log_2 16}{\log_2 4}$.

Esercizio 89. Calcola l'espressione $\log_2 6 + \log_2 10 - \log_2 15$.

Soluzione. Applicando le proprietà dei logaritmi si ha:

$$\log_2 6 + \log_2 10 - \log_2 15 = \log_2 \frac{6 \cdot 10}{15} = \log_4 = 2$$ □

Esercizio 90. Calcola l'espressione $2 \log 4 + \log 5 - \log 8$.

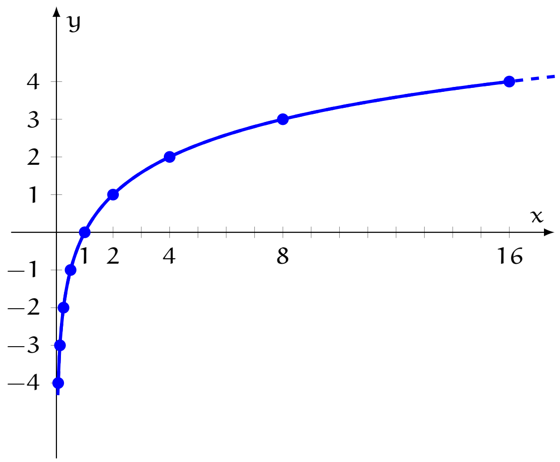
Soluzione. Applicando le proprietà dei logaritmi si ha:

$$\begin{aligned} 2 \log 4 + \log 5 - \log 8 &= \log(4^2) + \log 5 - \log 8 \\ &= \log(16) + \log 5 - \log 8 \\ &= \log \frac{16 \cdot 5}{8} = \log 10 = 1 \end{aligned}$$ □

Esercizio 91. Usando la calcolatrice scientifica, calcola $\log_2 7$.

Soluzione. Applicando la formula del cambiamento di base:

$$\log_2 7 = \frac{\log 7}{\log 2} \approx \frac{0{,}845098}{0{,}301030} \approx 2{,}807355$$ □



(a) Grafico

x	$y = \log_2 x$
1/16	$\log_2(1/16) = -4$
1/8	$\log_2(1/8) = -3$
1/4	$\log_2(1/4) = -2$
1/2	$\log_2(1/2) = -1$
1	$\log_2 1 = 0$
2	$\log_2 2 = 1$
4	$\log_2 4 = 2$
8	$\log_2 8 = 3$
16	$\log_2 16 = 4$

(b) Alcuni valori

Figura 10: La funzione $y = \log_2 x$

3.4 FUNZIONI LOGARITMICHE

Definizione 20. Se a è un numero positivo e diverso da 1, la funzione $y = \log_a x$ viene chiamata *funzione logaritmica*.

Per esempio, $y = \log_2 x$, $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ e $y = \ln x$ sono funzioni logaritmiche.

Esercizio 92. Disegna per punti il grafico della funzione $y = \log_2 x$.

Soluzione. La figura 10 mostra il grafico della funzione $y = \log_2 x$. □

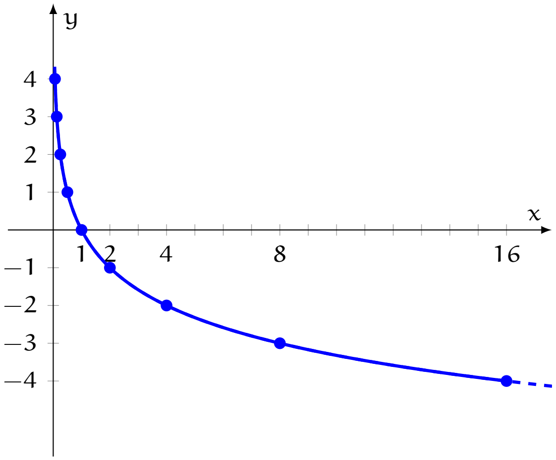
La funzione precedente:

- è definita per ogni $x > 0$
- può assumere qualsiasi valore
- si annulla se e solo se $x = 1$
- è sempre crescente
- è positiva quando $x > 1$
- è negativa quando $0 < x < 1$

Questo tipo di grafico è comune a tutte le funzioni logaritmiche $y = \log_a x$ di base $a > 1$.

Esercizio 93. Disegna per punti il grafico della funzione $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.

Soluzione. La figura 11 mostra il grafico della funzione $y = \log_{\frac{1}{2}} x$. □



(a) Grafico

x	$y = \log_{\frac{1}{2}} x$
$1/16$	$\log_{\frac{1}{2}}(1/16) = 4$
$1/8$	$\log_{\frac{1}{2}}(1/8) = 3$
$1/4$	$\log_{\frac{1}{2}}(1/4) = 2$
$1/2$	$\log_{\frac{1}{2}}(1/2) = 1$
1	$\log_{\frac{1}{2}} 1 = 0$
2	$\log_{\frac{1}{2}} 2 = -1$
4	$\log_{\frac{1}{2}} 4 = -2$
8	$\log_{\frac{1}{2}} 8 = -3$
16	$\log_{\frac{1}{2}} 16 = -4$

(b) Alcuni valori

Figura 11: La funzione $y = \log_{\frac{1}{2}} x$

La funzione precedente:

- è definita per ogni $x > 0$
- può assumere qualsiasi valore
- si annulla se e solo se $x = 1$
- è sempre decrescente
- è positiva quando $0 < x < 1$
- è negativa quando $x > 1$

Questo tipo di grafico è comune a tutte le funzioni logaritmiche $y = \log_a x$ di base $0 < a < 1$.

3.5 EQUAZIONI ESPONENZIALI

Definizione 21. Un'*equazione esponenziale* è un'equazione in cui l'incognita compare all'esponente di una potenza.

Per esempio, sono equazioni esponenziali: $2^x = 1$; $4^{2x} = 8^{x+1}$; $3^{x-1} = 2^x$.

Se si possono esprimere entrambi i membri dell'equazione come potenze di una stessa base,

$$a^{f(x)} = a^{g(x)}$$

l'equazione si riconduce a $f(x) = g(x)$, che si risolve con i metodi usuali.

Esercizio 94. Risolvi l'equazione $2^x = 8$.

Soluzione. L'equazione si si può scrivere come

$$2^x = 2^3$$

Uguagliando gli esponenti si ottiene $x = 3$. □

Esercizio 95. Risolvi l'equazione $4^{2x} = 8^{x+1}$.

Soluzione. Sia 4 che 8 sono potenze di 2, quindi l'equazione si può scrivere come

$$2^{4x} = 2^{3(x+1)}$$

Avendo ottenuto l'uguaglianza di due potenze con la stessa base, uguagliamo gli esponenti ottenendo l'equazione

$$4x = 3(x+1)$$

che ha come soluzione $x = 3$. □

Se l'equazione non è riconducibile all'uguaglianza di due potenze con la stessa base, occorre utilizzare i logaritmi.

Esercizio 96. Risolvi l'equazione $2^x = 5$.

Soluzione. Per la definizione di logaritmo, l'equazione si risolve con $x = \log_2 5$. □

Se l'equazione si può scrivere nella forma

$$a^{f(x)} = b^{g(x)}$$

applicando i logaritmi a entrambi i membri possiamo scrivere

$$\log a^{f(x)} = \log b^{g(x)} \qquad \Longrightarrow \qquad f(x) \cdot \log a = g(x) \cdot \log b$$

risolvibile con i metodi noti, tenendo conto che $\log a$ e $\log b$ sono dei numeri.

Esercizio 97. Risolvi l'equazione $3^{x-1} = 2^x$.

Soluzione. Applichiamo i logaritmi a entrambi i membri:

$$\log(3^{x-1}) = \log(2^x)$$

da cui, per le proprietà dei logaritmi:

$$(x-1)\log 3 = x \log 2$$

Risolvendo l'equazione, tenendo conto che i logaritmi rimasti sono dei numeri, troviamo

$$x\log 3 - \log 3 = x\log 2 \implies x\log 3 - x\log 2 = \log 3 \implies x(\log 3 - \log 2) = \log 3$$

da cui

$$x = \frac{\log 3}{\log 3 - \log 2} \qquad \square$$

Questa tecnica è applicabile anche al caso

$$k \cdot a^{f(x)} = h \cdot b^{g(x)}$$

che si può ricondurre, applicando i logaritmi a entrambi i membri, a

$$\log k + f(x)\log a = \log h + g(x)\log b$$

Esercizio 98. Risolvi l'equazione $3^{2x+1} = 5 \cdot 2^{3x}$

Soluzione. Applichiamo i logaritmi a entrambi i membri:

$$\log(3^{2x+1}) = \log(5 \cdot 2^{3x})$$

Per le proprietà dei logaritmi:

$$(2x+1)\log 3 = \log 5 + 3x\log 2$$

Risolvendo l'equazione (i logaritmi rimasti sono dei numeri) troviamo:

$$2x\log 3 + \log 3 = \log 5 + 3x\log 2 \implies x(2\log 3 - 3\log 2) = \log 5 - \log 3$$

da cui

$$x = \frac{\log 5 - \log 3}{2\log 3 - 3\log 2} \implies x = \frac{\log 5 - \log 3}{\log(3^2) - \log(2^3)} \implies x = \frac{\log 5 - \log 3}{\log 9 - \log 8} \quad \square$$

Talvolta occorre fare delle opportune sostituzioni per ricondurre l'equazione data a una o più equazioni risolvibili con metodi elementari.

Esercizio 99. Risolvi l'equazione $2^{2x} - 9 \cdot 2^x + 8 = 0$.

Soluzione. Ponendo $t = 2^x$ (da cui $t^2 = 2^{2x}$) si ottiene l'equazione $t^2 - 9t + 8 = 0$, che ha per soluzioni $t = 1$ e $t = 8$. Risolvendo le equazioni esponenziali elementari $2^x = 1$ e $2^x = 8$ troviamo rispettivamente $x = 0$ e $x = 3$, che sono le soluzioni dell'equazione data. $\square$

3.6 EQUAZIONI LOGARITMICHE

Definizione 22. Un'*equazione logaritmica* è un'equazione in cui l'incognita compare nell'argomento di un logaritmo.

Per esempio, sono equazioni logaritmiche: $\log_2 x = 4$; $\log_3(x - 1) - 2 = 0$.

In questo tipo di equazioni è importante tenere presente le condizioni di esistenza per selezionare le soluzioni accettabili. A tal fine, dopo aver risolto l'equazione, basta sostituire nel testo le soluzioni, una alla volta, e controllare che i logaritmi siano validi; se anche uno solo degli argomenti non è positivo, la soluzione non è accettabile.

Per la risoluzione di una equazione logaritmica si cerca, usando le proprietà dei logaritmi, di trasformarla in una del tipo

$$\log_a f(x) = b$$

che si riconduce a $f(x) = a^b$, oppure in una del tipo

$$\log_a f(x) = \log_a g(x)$$

che si riconduce a $f(x) = g(x)$.

Esercizio 100. Risolvi l'equazione $\log_2 x = 4$.

Soluzione. L'equazione, per la definizione di logaritmo, diventa $x = 2^4$, cioè $x = 16$. $\square$

Esercizio 101. Risolvi l'equazione $\log_3(x - 1) - 2 = 0$.

Soluzione. Possiamo scrivere $\log_3(x - 1) = 2$, da cui, per la definizione di logaritmo, $x - 1 = 3^2$, che ha come soluzione $x = 10$, soluzione accettabile perché soddisfa le condizioni di esistenza dell'equazione data. $\square$

Esercizio 102. Risolvi l'equazione $\log(x+3) - \log(2x-1) = 0$.

Soluzione. Portiamo il secondo addendo al secondo membro:

$$\log(x+3) = \log(2x-1)$$

Avendo ottenuto una uguaglianza di due logaritmi con la stessa base, uguagliamo gli argomenti:

$$x+3 = 2x-1$$

che ha come soluzione $x = 4$, soluzione accettabile. $\square$

Esercizio 103. Risolvi l'equazione $\log(19x+1) = 1 + \log(3-x)$.

Soluzione. Per le proprietà dei logaritmi:

$$\log(19x+1) = \log 10 + \log(3-x)$$

da cui

$$\log(19x+1) = \log\left[10(3-x)\right]$$

Uguagliando gli argomenti:

$$19x+1 = 10(3-x) \quad\Longrightarrow\quad 19x+1 = 30-10x \quad\Longrightarrow\quad 29x = 29 \quad\Longrightarrow\quad x = 1 \quad \square$$

Esercizio 104. Risolvi l'equazione $2\log(6x+1) = \log(4x+1) + \log(2x+1)$.

Soluzione. Applicando le proprietà dei logaritmi, l'equazione diventa

$$\log(6x+1)^2 = \log[(4x+1)(2x+1)]$$

Avendo ottenuto una uguaglianza di due logaritmi con la stessa base, uguagliamo gli argomenti:

$$(6x+1)^2 = (4x+1)(2x+1)$$

che ha come soluzioni $x = 0$ e $x = -3/14$.

La seconda soluzione non è accettabile perché rende negativo l'argomento di almeno uno dei logaritmi dell'equazione data, quindi l'unica soluzione è $x = 0$. $\square$

Esercizio 105. Risolvi l'equazione $\log(x-3) + \log x = 1$.

Soluzione. Applicando le proprietà dei logaritmi, l'equazione diventa

$$\log[x(x-3)] = \log 10$$

Avendo ottenuto una uguaglianza di due logaritmi con la stessa base, uguagliamo gli argomenti:

$$x(x-3) = 10 \quad \Longrightarrow \quad x^2 - 3x - 10 = 0$$

che ha come soluzioni $x = -2$ e $x = 5$.

Verifichiamo le soluzioni. Dobbiamo escludere -2, che rende negativo l'argomento di $\log x$, mentre possiamo accettare la soluzione $x = 5$. □

Esercizio 106. Risolvi l'equazione $\log(x+2) - \log x = 2\log\frac{1}{2}$.

Soluzione. Applicando le proprietà dei logaritmi, l'equazione diventa

$$\log\frac{x+2}{x} = \log\left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad \Longrightarrow \quad \log\frac{x+2}{x} = \log\frac{1}{4}$$

Avendo ottenuto una uguaglianza di due logaritmi con la stessa base, uguagliamo gli argomenti:

$$\frac{x+2}{x} = \frac{1}{4}$$

Questa equazione fratta ha soluzione $x = -8/3$, che però non possiamo accettare, dal momento che rende negativo l'argomento di $\log x$. Poiché l'unica soluzione trovata va scartata, possiamo concludere che l'equazione data è impossibile. □

Talvolta occorre fare delle opportune sostituzioni per ricondurre l'equazione data a una o più equazioni risolvibili con metodi elementari.

Esercizio 107. Risolvi l'equazione $(\log x - 2)\log x = 3$.

Soluzione. Svolgendo i calcoli si ottiene

$$(\log x)^2 - 2\log x - 3 = 0$$

Nota che $(\log x)^2$ è diverso da $\log(x^2)$. Se poniamo $t = \log x$ l'equazione diventa $t^2 - 2t - 3 = 0$ che ha come soluzioni $t = -1$ e $t = 3$. Risolvendo le equazioni $\log x = -1$ e $\log x = 3$, otteniamo $x = 1/10$ e $x = 1000$, soluzioni entrambe accettabili. □

Esercizio 108. Risolvi l'equazione $(\log x)^2 - \log x - 2 = 0$.

Soluzione. Se poniamo $t = \log x$ l'equazione diventa $t^2 - t - 2 = 0$ che ha come soluzioni $t = -1$ e $t = 2$. Risolvendo le due equazioni $\log x = -1$ e $\log x = 2$, otteniamo $x = 1/10$ e $x = 100$, soluzioni entrambe accettabili. □

Esercizio 109. Risolvi l'equazione $\dfrac{1+\log x}{\log x - 1} - \dfrac{\log x + 3}{2 - 2\log x} = \dfrac{11}{2}$.

Soluzione. Se poniamo $t = \log x$ l'equazione diventa

$$\frac{1+t}{t-1} - \frac{t+3}{2-2t} = \frac{11}{2}$$

È un'equazione fratta che, risolta con i metodi usuali (e un po' di pazienza), ha per soluzione $t = 2$. Ciò implica che $\log x = 2$, da cui $x = 100$, soluzione accettabile. □

3.7 APPLICAZIONI

L'introduzione delle calcolatrici ha tolto importanza ai logaritmi come strumento di calcolo, ma le funzioni esponenziali e logaritmiche hanno un ruolo fondamentale non solo in matematica ma anche in fisica, economia, chimica, biologia, geologia, archeologia, e in generale dove si trattano grandezze che presentano ampie variazioni su un intervallo di diversi ordini di grandezza.

Per esempio, se una grandezza ha una variabilità che va da 1 a 10^{12} (mille miliardi), il logaritmo decimale di tale grandezza varia solamente da 1 a 12. Ciò rende possibile rappresentare graficamente questa grandezza: basta mettere nel grafico, anziché la grandezza stessa, il suo logaritmo decimale. Vediamo alcuni esempi.

- Supponiamo di voler rappresentare la storia della Terra su un grafico. L'istante 0 è quello attuale, poi usiamo un'unità di misura di 1 cm per indicare un anno, per poter rappresentare adeguatamente gli eventi degli ultimi anni. Ma Cristo quando è nato? Circa 2000 cm = 20 metri fa! E i dinosauri quando si sono estinti? L'estinzione dei dinosauri, avvenuta 65 milioni di anni fa, nel nostro grafico sta a 65 000 000 cm = 650 km: dovremmo usare un foglio lungo quanto la distanza tra Milano e Roma. Con i logaritmi, invece, è tutto più semplice: Cristo è nato circa 2000 anni fa, $\log 2000 \approx 3{,}3$ quindi la nascita di Cristo verrà messa a 3,3 cm. L'estinzione dei dinosauri, poiché $\log 65\,000\,000 \approx 7{,}8$, verrà messa a circa 7,8 cm.

- In fisica, le frequenze della banda dello spettro elettromagnetico variano su diversi ordini di grandezza, generalmente da 10^1 Hz a 10^{24} Hz, come mostra la tabella 2. Il problema della rappresentazione grafica si risolve con una scala logaritmica: per esempio, con unità pari a 1 cm si riescono a sistemare queste frequenze su un asse lungo 24 cm (figura 12).

- In sismologia, per descrivere gli effetti di un terremoto si usa la *scala Richter*, in base alla quale si calcola la *magnitudo* del terremoto. È importante

Tabella 2: Lo spettro elettromagnetico

Tipo di radiazione	**Frequenza** (Hz)	**log**
Onde radio	10^1-10^7	1-7
Microonde	10^8-10^{10}	8-10
Infrarossi	10^{11}-10^{13}	11-13
Luce visibile	10^{14}	14
Ultravioletti	10^{15}-10^{16}	15-16
Raggi X	10^{17}-10^{20}	17-20
Raggi gamma	10^{21}-10^{24}	21-24

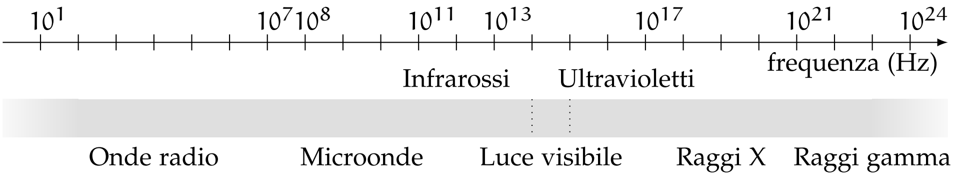


Figura 12: Rappresentazione dello spettro elettromagnetico con una scala logaritmica

sapere che la scala usata è logaritmica: un terremoto di magnitudine 8 *non* è doppiamente più disastroso di uno di magnitudine 4; poiché si lavora sugli esponenti, è diecimila volte più disastroso ($10^8 = 10\,000 \cdot 10^4$).

- In chimica, la concentrazione degli ioni idrogeno $[H^+]$ determina il grado di acidità o basicità di una soluzione. Tale concentrazione varia generalmente tra 10^{-1} e 10^{-14}, intervallo che copre ben 14 ordini di grandezza. In questo caso, anziché esprimere direttamente il valore della concentrazione, si preferisce definire una nuova grandezza, indicata con il simbolo pH e definita dalla relazione
$$\mathrm{pH} = -\log[H^+]$$
Ne segue che il pH di una soluzione è generalmente compreso tra 1 e 14 (quanto più basso è il pH, tanto più acida è la soluzione). È più facile esprimersi in termini di pH che di effettiva concentrazione degli ioni idrogeno. Per esempio, una soluzione con $\mathrm{pH} = 1$ ha una concentrazione di ioni H^+ cento volte superiore rispetto a una soluzione con $\mathrm{pH} = 3$.

- Le guerre vengono classificate in base al numero di morti: si parla per esempio di *magnitudo* 4 per indicare l'esponente che sulla base 10 indica approssimativamente il numero di morti, cioè il logaritmo in base 10 del numero dei morti (diecimila, nel caso considerato). Così se si sente dire che una guerra ha magnitudo doppia rispetto a una guerra precedente ci si deve allarmare, perché, quanto a numeri di morti, quella guerra ne ha avuti ben più del doppio. Per esempio, una guerra di magnitudo $M = 3$ ha mille vittime, mentre una guerra di magnitudo $M = 6$ ha un milione di morti.

3.8 ESERCIZI

Chi non risolve esercizi non impara la matematica.

1 Vero o falso?

a. $1^5 = 5$ ☐ V ☐ F

b. $0^3 = 0$ ☐ V ☐ F

c. $(-5)^0 = -1$ ☐ V ☐ F

d. $4^{(-1)} = -\frac{1}{4}$ ☐ V ☐ F

e. $2^{\frac{5}{7}} = \sqrt[7]{32}$ ☐ V ☐ F

f. $5^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{\sqrt[3]{625}}$ ☐ V ☐ F

g. $7^0 = 1$ ☐ V ☐ F

h. $2^{-5} = -\frac{1}{32}$ ☐ V ☐ F

i. $3^2 + 3^3 = 3^5$ ☐ V ☐ F

j. $(5^2)^0 = 1$ ☐ V ☐ F

k. $2^{15} : 2^5 = 2^3$ ☐ V ☐ F

l. $(7^2)^3 = 7^5$ ☐ V ☐ F

m. $2^{x+1} = 2 \cdot 2^x$ ☐ V ☐ F

n. $(\sqrt{2})^4 = 4$ ☐ V ☐ F

o. $(3 \cdot 5)^0 = 15$ ☐ V ☐ F

[6 uguaglianze vere e 9 false]

2 Vero o falso?

a. Se $a > 0$, il punto $(1, 0)$ appartiene al grafico della funzione $y = a^x$. ☐ V ☐ F

b. Se $a > 0$, i punti del grafico della funzione $y = a^x$ hanno ordinata positiva. ☐ V ☐ F

c. Se $a > 0$, la funzione $y = a^x$ non assume mai il valore 0. ☐ V ☐ F

d. La funzione esponenziale $y = a^x$ è crescente solo se $a > 1$. ☐ V ☐ F

e. Se $3^x = 9$ allora x è il logaritmo in base 9 di 3. ☐ V ☐ F

f. Se $3^x = 9$ allora x è il logaritmo in base 3 di 9. ☐ V ☐ F

[4 affermazioni vere e 2 false]

Calcola il valore dei seguenti logaritmi:

3 $\log_2 64$ [6]

4 $\log_{\frac{1}{2}} 2$ [−1]

5 $\log_2 \frac{1}{2}$ [−1]

6 $\log_5 125$ [3]

7 $\log_7 49$ [2]

8 $\log_4 4$ [1]

9 $\log_4 1$ [0]

10 $\log 1000$ [3]

11 $\ln e$ [1]

12 $\log_2 \frac{1}{16}$ [−4]

13 $\ln 1$ [0]

14 $\log 0$ [impossibile]

15 $\log_3 \frac{1}{9}$ [−2]

16 $\log 0{,}01$ [−2]

17 $\log_{\frac{1}{2}} 8$ [−3]

18 $\log_{\frac{1}{7}} 49$ [−2]

19 $\log_2 -8$ [impossibile]

20 $\log 10$ [1]

21 $\log_5 25$ [2]

22 $\log_2 32$ [5]

23 $\log_3 3$ [1]

24 $\log_3 1$ [0]

25 $\log_3 0$ [impossibile]

26 $\log_{\frac{1}{3}} 27$ [−3]

27 $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}$ [2]

28 $\log_{\frac{1}{2}} 4$ [−2]

29 $\log_3 27$ [3]

30 $\log_7 343$ [3]

31 $\log_5 125$ [3]

32 $\log_5 \frac{1}{25}$ [−2]

33 $\log_9 \frac{1}{81}$ [−2]

34 $\log_{\frac{5}{6}} \frac{36}{25}$ [−2]

35 $\log_{\frac{3}{5}} \frac{9}{25}$ [2]

36 $\log_{12} 144$ [2]

37 $\log_5 625$ [4]

38 $\log_{12} \frac{1}{144}$ [−2]

39 $\log_{\frac{1}{5}} 625$ [−4]

40 $\log_{64} 32$ [5/6]

41 $\log_{81} \frac{1}{27}$ [−3/4]

42 $\log_8 32$ [5/3]

43 $\log_4 8$ [3/2]

44 $\log_9 3$ [1/2]

45 $\log_{\frac{1}{9}} 3$ [−1/2]

Calcola la base dei seguenti logaritmi:

46 $\log_x 27 = 3$ [3]

47 $\log_x 32 = 5$ [2]

48 $\log_x \frac{1}{81} = -4$ [3]

49 $\log_x \frac{1}{25} = -2$ [5]

50 $\log_x \frac{1}{4} = 2$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

51 $\log_x \frac{8}{27} = 3$ $\left[\frac{2}{3}\right]$

52 $\log_x \frac{1}{32} = -5$ [2]

53 $\log_x 9 = -2$ $\left[\frac{1}{3}\right]$

54 $\log_x \frac{1}{8} = -3$ [2]

55 $\log_x 81 = 4$ [3]

56 $\log_x \frac{1}{49} = -2$ [7]

57 $\log_x \frac{1}{27} = -3$ [3]

58 $\log_x 1024 = 5$ [4]

59 $\log_x 8 = -3$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

60 $\log_x \frac{1}{16} = -4$ [2]

61 $\log_x \sqrt{3} = 1$ $\left[\sqrt{3}\right]$

62 $\log_x 2 = \frac{1}{3}$ [8]

63 $\log_x \frac{1}{9} = -\frac{2}{3}$ [27]

64 $\log_x \sqrt[3]{49} = \frac{2}{3}$ [7]

Calcola il valore delle seguenti espressioni:

65 $3\log_2 4 - \log_2 8$ [3]

66 $\log 45 - \frac{1}{2}\log 25 + \log 27$ [$5\log 3$]

67 $\log_5 7 - \log_5 21 + 3\log_5 6$ [$\log_5 72$]

68 $2\log 5 + 3\log 2 - \log 20$ [1]

69 $4\log 2 + \log 3 - \frac{1}{2}\log 9$ [$\log 16$]

70 $\log_2 4 + \frac{1}{2}\log_2 9$ [$\log_2 12$]

71 $\log \frac{2}{5} - \log \frac{3}{4} + \log \frac{15}{2}$ [$\log 4$]

72 $\log_2 \sqrt{8} + \log_2 \sqrt{2}$ [2]

Usando la calcolatrice scientifica, calcola:

73 $\log 2$ [0,3010299]

74 $\log 1{,}7$ [0,2304489]

75 $\log 0{,}005$ [−2,3010299]

76 $\ln 5$ [1,6094379]

77 $\ln \sqrt{2}$ [0,3465735]

78 $\log_4 21$ [2,1961587]

79 $\log_3 100$ [4,1918065]

80 $\log_2 0{,}3$ [−1,7369655]

81 $\log_{0,1} 2$ [−0,3010299]

82 Indica la risposta corretta.

a. L'equazione esponenziale $4^x = -1$:

$\boxed{A}$ ha per soluzione 0 $\boxed{C}$ ha per soluzione $-1/4$

$\boxed{B}$ ha per soluzione -1 $\boxed{D}$ è impossibile

b. L'equazione esponenziale $3^x = 0$:

$\boxed{A}$ ha per soluzione 0 $\boxed{C}$ ha per soluzione $1/3$

$\boxed{B}$ ha per soluzione 1 $\boxed{D}$ è impossibile

c. L'equazione esponenziale $2^x = 1$:

$\boxed{A}$ ha per soluzione 0 $\boxed{C}$ ha per soluzione $1/2$

$\boxed{B}$ ha per soluzione 1 $\boxed{D}$ è impossibile

d. Quale, fra le seguenti, è la soluzione dell'equazione esponenziale $3^{x+2} = 1$?

$\boxed{A}$ 0 $\boxed{B}$ -2 $\boxed{C}$ 2 $\boxed{D}$ -1

e. Quale, fra le seguenti, è la soluzione dell'equazione esponenziale $3^{-x} = \dfrac{1}{27}$?

$\boxed{A}$ 3 $\boxed{B}$ -3 $\boxed{C}$ $1/2$ $\boxed{D}$ -2

f. Quale, fra le seguenti, è la soluzione dell'equazione esponenziale $(2/3)^x = 27/8$?

$\boxed{A}$ $1/3$ $\boxed{B}$ $-1/3$ $\boxed{C}$ 3 $\boxed{D}$ -3

g. Quale, fra le seguenti, è la soluzione dell'equazione esponenziale $5^{x+1} = 1$?

$\boxed{A}$ 1 $\boxed{B}$ $1/5$ $\boxed{C}$ -1 $\boxed{D}$ 0

[Due risposte A, una B, una C e tre D]

83 Indica la risposta corretta.

a. Quale delle seguenti affermazioni è vera per $\log_3 1$?

$\boxed{A}$ non esiste $\boxed{C}$ è uguale a 1

$\boxed{B}$ è un numero negativo $\boxed{D}$ è uguale a 0

b. Se a e b sono due numeri reali positivi, quale delle seguenti affermazioni è errata?

A $\log(a \cdot b) = \log a + \log b$

B $\log(a + b) = \log a + \log b$

C $\log(a^2) = 2\log a$

D $\log(a/b) = \log a - \log b$

c. Qual è il valore di x che rende vera l'uguaglianza $\log_2 16 = x$?

A 2 B -2 C 4 D -4

d. Qual è il valore di x che rende vera l'uguaglianza $\log_{\frac{2}{5}} \frac{25}{4} = x$?

A 2 B -2 C 4 D -4

e. Qual è il valore di x che rende vera l'uguaglianza $\log_x 16 = -2$?

A $1/4$ B $-1/4$ C 4 D -4

f. L'equazione $\log_3 x = 0$:

A è impossibile

B ha per soluzione $x = -1$

C ha per soluzione $x = 0$

D ha per soluzione $x = 1$

g. L'equazione $\log_2 x = -1$:

A è impossibile

B ha per soluzione $x = -2$

C ha per soluzione $x = 1/2$

D ha per soluzione $x = 0$

[Una risposta A, due B, due C e due D]

Risolvi le seguenti equazioni esponenziali:

84 $2^x = 32$ [5]

85 $2^x = \frac{1}{16}$ [−4]

86 $3^x = 0$ [impossibile]

87 $3^x = 1$ [0]

88 $3^x = 27$ [3]

89 $3^x = \frac{1}{81}$ [−4]

90 $3^x = \frac{1}{27}$ [−3]

91 $10^x = 100$ [2]

92 $10^x = \frac{1}{10\,000}$ [−4]

93 $10^x = 0{,}0001$ [−4]

94 $5^x = \frac{1}{125}$ [−3]

95 $5^x = \frac{1}{625}$ [−4]

96 $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{64}$ [6]

97 $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 9$ [−2]

98 $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{8}{27}$ [3]

99 $5^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{5}$ [−1]

100 $\frac{1}{4^x} = \sqrt{2}$ $\left[-\frac{1}{4}\right]$

101 $3^{\sqrt{x}} = 243$ [25]

102 $2^x = 16 \cdot \sqrt{2}$ $\left[\frac{9}{2}\right]$

103 $9^{x+1} : 3 = 27^2$ $\left[\frac{5}{2}\right]$

Risolvi le seguenti equazioni esponenziali:

104 $5^{x+2} = 25$ $[0]$

105 $3^{x+1} - 9 = 0$ $[1]$

106 $5^{x-1} = 125$ $[4]$

107 $8^{3x+2} = 16^{x-3}$ $\left[-\frac{18}{5}\right]$

108 $2^{x+1} = 16$ $[3]$

109 $7^{x+2} = 49 \cdot 7^{2x-3}$ $[3]$

110 $25^{4x-3} \cdot 5^{7x-2} = 5^{3x+4}$ $[1]$

111 $5^3 \cdot 5^{x+1} = 64 \cdot 2^{x-2}$ $[-4]$

112 $8 \cdot 2^{x-1} - 2^{x+1} = 16$ $[3]$

113 $5 \cdot 2^x - 18 = 2^{x-1}$ $[2]$

114 $5^x - 12 = 0$ $[\log_5 12]$

115 $3^{x+1} = 12$ $[\log_3 4]$

116 $4^x = 7^x$ $[0]$

117 $5 \cdot 3^x = 7$ $[\log_3 7 - \log_3 5]$

118 $2^x + 2^{x+1} = 2^{x-1} + 7$ $\left[\log_2 \frac{14}{5}\right]$

119 $7 \cdot 3^{2x+1} = 3 \cdot 49^{x+1}$ $\left[\frac{\log 7}{\log 9 - \log 49}\right]$

120 $9^x + 3^x = 90$ $[2]$

121 $4^x = 2^x - 2$ [impossibile]

122 $2^x + 2^{3-x} = 6$ $[1;\ 2]$

123 $2^{x+1} - \dfrac{6}{2^{x-1}} = 10$ $[\log_2 6]$

124 $4^{x^2+5x-14} = 1$ $[2;\ -7]$

125 $5^{2x^2+x-15} = 1$ $\left[-3;\ \frac{5}{2}\right]$

126 $2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$ $[1;\ 2]$

127 $2^{2x} - 9 \cdot 2^x + 8 = 0$ $[0;\ 3]$

128 $3^{2x} - 12 \cdot 3^x + 27 = 0$ $[1;\ 2]$

129 $3^{2x} - 10 \cdot 3^{x-1} + 1 = 0$ $[-1;\ 1]$

130 $2^{2x-1} - 2^{x+3} + 32 = 0$ $[3]$

131 $4^{x-1} - 3 \cdot 2^x + 8 = 0$ $[2;\ 3]$

132 $5^{x+1} - 5^{2x-1} = 120$ [impossibile]

133 $4^x - 2^{x+1} = 48$ $[3]$

134 $\dfrac{(3^{x-1})^x}{9} = \left(\dfrac{1}{27}\right)^{x+1}$ $[-1]$

135 $9^{x-1} = 10 - 9^{2-x}$ $[1;\ 2]$

136 $3^{x+2} + 5^x = 3^x + 9 \cdot 5^x$ $[0]$

137 $4^{x+2} + 4 \cdot 3^x = 11 \cdot 4^x + 3^{x+2}$ $[0]$

138 $81 \cdot 3^{x-2} = 4^{x+2}$ $[-2]$

Risolvi le seguenti equazioni logaritmiche:

139 $\log_3 x = 2$ $[9]$

140 $\log_5 x = -1$ $\left[\frac{1}{5}\right]$

141 $\log_{\frac{1}{2}} x = 3$ $\left[\frac{1}{8}\right]$

142 $\log_3 x + 2 = 0$ $\left[\frac{1}{9}\right]$

143 $\log_{\frac{1}{3}} x = 0$ $[1]$

144 $\log_2 x = -4$ $\left[\frac{1}{16}\right]$

145 $\log_2(x-1) = 0$ $[2]$

146 $\log_5(2x-1) = 2$ $[13]$

147 $\log_2(2x-1) = 3$ $\left[\frac{9}{2}\right]$

148 $\log_7(3x-2) = 0$ $[1]$

149 $\log(x-1) = \log(4-3x)$ $\left[\frac{5}{4}\right]$

150 $\log_2(x-1) = 3$ $[9]$

151 $\ln(x+1) - \ln(x-1) = \ln 2$ $[3]$

152 $\log(x+1) + \log(x-1) = 0$ $[\sqrt{2}]$

153 $\log(2x+3) - 2\log x = 0$ $[3]$

154 $2\log_2 x = 2 + \log_2(x+3)$ $[6]$

155 $\log(x-2) + \log 5 = \log x$ $\left[\frac{5}{2}\right]$

156 $\log(3x+2) = 3\log 2$ $[2]$

157 $\log_4(x-3) = -1$ $\left[\frac{13}{4}\right]$

158 $(\ln x)^2 - 2\ln x + 1 = 0$ $[e]$

159 $\log(x-1)+1=\log 5$ $\left[\frac{3}{2}\right]$

160 $\log_2(x^2+4x+2)=1$ $[-4;\ 0]$

161 $(4-\log_2 x)\log_2 x=3$ $[2;\ 8]$

162 $\log_3(x^2-2x)=1$ $[-1;\ 3]$

163 $\log(x^2-10x+31)=1$ $[3;\ 7]$

164 $2\log(2x)-\log[(4x-6)^2]=0$ $[1;\ 3]$

165 $\log_5 x+\log_5(x-4)=1$ $[5]$

166 $\log_9 x=\frac{1}{2}$ $[3]$

167 $\log(x+1)+\log(x-1)=0$ $\left[\sqrt{2}\right]$

168 $\log_2(x+1)=\log_4(2x+5)$ $[2]$

Risolvi le seguenti equazioni logaritmiche:

169 $\log_2(x^2-1)-\log_2(x-2)=3$ $[3;\ 5]$

170 $\log(x-2)-\log(x-3)=\log 4$ $\left[\frac{10}{3}\right]$

171 $\log x+\log(10+x)=2\log(3-x)$ $\left[\frac{9}{16}\right]$

172 $\log(x-4)+\log 7=\log(3x-2)$ $\left[\frac{13}{2}\right]$

173 $\log(x-2)-\log(x-1)=\log 5$ [impossibile]

174 $2(\log x)^2+5\log x-3=0$ $\left[10^{-3};\ \sqrt{10}\right]$

175 $\log(x^2+x+4)=1+\log(x-1)$ $[2;\ 7]$

176 $\log(x-2)-\log(x-3)=\log 4$ $\left[\frac{10}{3}\right]$

177 $\log_3(x^4)+\log_3(x^3)+\log_3(x^2)+\log_3 x=10$ $[3]$

178 $[\log(x^2)]^2-2\log(x^3)+2=0$ $\left[\sqrt{10};\ 10\right]$

179 $2\log x+\log 3=\log(5x-2)$ $[2/3;\ 1]$

180 Vero o falso?

a. L'argomento di un logaritmo può essere positivo o nullo. V F

b. La base di un logaritmo può essere 1. V F

c. La base di un logaritmo non può essere -1. V F

d. Un logaritmo può essere negativo. V F

e. Un logaritmo non può essere zero. V F

f. Il logaritmo in base 2 di $1/4$ vale 2. V F

g. Si ha che $7=\log_2 32+\log_5 25$. V F

[3 affermazioni vere e 4 false]

181 Vero o falso?

a. $\log 2 + \log 5 = \log 7$ V F

b. $\log(a+b) = \log(ab)$ V F

c. $3\log_7 5 = \log_7(5^3)$ V F

d. $2\log_6 5 = \log_6(2^5)$ V F

e. $(\log a)^2 = \log(2a)$ V F

f. $\left[\log(a^3)\right]^7 = \log(a^{21})$ V F

g. $\left[\log(a^5)\right]^2 = 25(\log a)^2$ V F

h. $\log 2 - \log 5 = \log 4 - 1$ V F

i. $\log_2 a = 2\log_4 a$ V F

j. $\log_a b = \dfrac{1}{3}\log_{a^3} b$ V F

k. $5^x : 3^x = 7 \implies x = \log_{15} 7$ V F

l. $\log\left(3^{\log_3 5}\right) = 1 - \log 2$ V F

m. $\dfrac{\log a}{2} = \log\sqrt{a}$ V F

n. $\log\dfrac{a}{b} = \log a - \log b$ V F

o. $\dfrac{\log a}{\log b} = \log(a-b)$ V F

p. $\dfrac{\log_3 12}{\log_3 5} = \log_5 12$ V F

[8 uguaglianze vere e 8 false]

182 Indica la risposta corretta.

a. L'equazione $3^{2(x-1)} = 81$ ha soluzione:

A $x = 0$ B $x = 3$ C $x = 4$ D $x = 5$

b. L'equazione $3^{2x} = 7$ ha soluzione:

A $x = \log_7 \dfrac{3}{2}$ B $x = \dfrac{1}{2}\log_3 7$ C $x = \log_3 \dfrac{7}{2}$ D $x = \log_7 \sqrt{3}$

c. L'equazione $3^{2x+1} - 3^{2x-1} = 16$ ha soluzione:

A $x = \log_3 6$ B $x = \dfrac{1+\log_3 4}{2}$ C $x = \dfrac{16}{3}\log_3 2$ D $x = \log_3 \sqrt{6}$

d. L'equazione $3^x - 5\cdot 3^{-x} = 4$ ha soluzione:

A $x = \log_3 5$ B $x = 0$ C $x = \log_5 3$ D impossibile

e. Quante soluzioni ha l'equazione $\left(\dfrac{3}{5}\right)^{x^2} = \left(\dfrac{125}{27}\right)^{x+1}$?

A nessuna B una C due D tre

f. Quale delle seguenti espressioni ha significato?

A $\log_2 0$ B $\log_3 -3$ C $\log_3 1$ D $\log_{-4} 2$

g. Il numero $\log 0{,}0001$ è uguale a:

A 10^{-4} B 10^4 C -4 D $-\log 4$

[1 risposta A, 2 B, 2 C e 2 D]

183 Indica la risposta corretta.

a. Se $a = \log(99\,876\,543\,210)$, allora:

A $8 < a < 9$ B $9 < a < 10$ C $10 < a < 11$ D $11 < a < 12$

b. Per quale numero reale x, positivo e diverso da 1, si ha che $\log_x \sqrt[5]{16} = \dfrac{4}{5}$?

A $x = 2$ B $x = 4$ C $x = 5$ D $x = 8$

c. L'equazione $3 \cdot 7^x + 7^{x-1} = 154$ ha soluzione:

A $x = -2$ B $x = -1$ C $x = 1$ D $x = 2$

d. L'equazione $5^{x+2} \cdot 2^x = 2500$ ha soluzione:

A $x = 1$ B $x = 2$ C $x = 3$ D $x = 4$

e. Quale delle seguenti affermazioni è vera per ogni valore reale di x?

A $2^x + 2^x = 2^{2x}$ B $81^x = (3^x)^4$ C $3^2 \cdot 3^{2x} = 81^x$ D $2^x + 4 = 2^{x+2}$

f. Quanto vale $\log_9 27$?

A $3/2$ B $\sqrt{2}$ C -2 D $2/3$

g. Supponendo che sia $\log 2 = 0{,}301$, quanto vale $\log(20\,0000)$?

A 1,204 B 2,301 C 4,301 D 301

[2 risposte A, 2 B, 2 C e 1 D]

184 Indica la risposta corretta.

a. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

A $0 < \log 9 < 1$

B $-1 < \log 9 < 0$

C $1 < \log 9 < 10$

D $-2 < \log 9 < -1$

b. Se $a = \log 123$, allora:

A $1 < a < 2$ B $2 < a < 3$ C $3 < a < 4$ D $4 < a < 5$

c. Quale fra le seguenti uguaglianze è corretta?

A $\log_3 12 = \log_{12} 3$

B $\log_4 7 = \log_4 5 + \log_4 2$

C $\log_5 24 = \log_5 6 + \log_5 4$

D $\log_6(2^3) = \log_6 2 \cdot \log_6 3$

d. L'uguaglianza $x = 10^{\log x}$ è vera:

A per tutti gli x reali

B per tutti gli x positivi

C per tutti gli x diversi da zero

D mai

e. Quale fra le seguenti uguaglianze è corretta?

A $2^0 = 0$ B $\log 0 = 1$ C $\log_3 9 = 2$ D $\log_5 5 = 5$

f. L'espressione $3^{x+1} - 3^x$ è uguale a:

A 3^x B 3 C 6^x D $2 \cdot 3^x$

g. Dati due numeri positivi x e y, l'uguaglianza $2\log x = 3\log y$ implica che:

A $2x = 3y$ B $\sqrt{x} = \sqrt[3]{y}$ C $2^x = 3^y$ D $x^2 = y^3$

[1 risposta A, 2 B, 2 C e 2 D]

185 Indica la risposta corretta.

a. L'espressione $\log_6 36 + 5\log_2 16$ vale:

A $\log_{12} 576$ B 22 C 200 D $\log_6(36 \cdot 16^5)$

b. Quanto vale l'espressione $\frac{3}{2} \cdot (1 - \log_3 \sqrt[3]{3})$?

A 1 B 2 C $\sqrt[3]{3}$ D $1/3$

c. In quale delle seguenti uguaglianze è stata applicata correttamente la formula del cambiamento di base dei logaritmi?

A $\log_4 5 = \dfrac{\log 4}{\log 5}$

B $\log_3 8 = \log 3 \cdot \log 8$

C $\log_3 4 = \dfrac{\log_3 10}{\log_4 10}$

D $\log_3 7 \cdot \log 3 = \log 7$

d. La disuguaglianza $10^x > -\dfrac{1}{10}$ è:

A vera solo se $x > -1$

B falsa

C vera solo se $x \neq -1$

D sempre vera

e. Individua tra le seguenti uguaglianze quella *falsa*.

A $(\log_9 18)/(\log_9 2) = 1$

B $\log_9 18 - \log_9 2 = 1$

C $\log_6 18 + \log_6 2 = 2$

D $\log_4 8 + \log_2 \sqrt{2} = 2$

f. Quanto vale l'espressione $\dfrac{\log_3 125 - \log_3 5}{2 \cdot \log_3 5}$?

A $\log_3 5$ B 1 C 3 D 5

g. Quanto vale l'espressione $\dfrac{\log 49}{\log(1/7)}$?

A $\log 7$ B $\log 49$ C -2 D $\log 49 - \log 7$

[2 risposte A, 2 B, 1 C e 2 D]

186 Indica la risposta corretta.

a. L'espressione $\log(-2x) + \log(-3x)$ vale:

A $6\log(x^2)$ B $\log(-6x^2)$ C $\log 6 - 2\log x$ D $\log 6 + \log(x^2)$

b. Nell'equazione $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) = -2$:

A $x = -1$ B $x = 0$ C $x = 1/3$ D $x = 3$

c. L'espressione $\log(a^2 - b^2) - \log(a+b)$ vale:

A $2\log(a-b)$ B $-\log(a-b)$ C $\log(a-b)$ D $\log(a+b)$

d. L'equazione $3^x + 4^x - 2^x = 21$ ha soluzione:

A 0 B 1 C 2 D 3

e. L'espressione $\log\sqrt{a}$ vale:

A $(\log a)/2$ B $\sqrt{\log a}$ C $2\log a$ D $\log(a/2)$

f. L'espressione $\log a + \log(a^{-2})$ vale:

A $\log(a^{-3})$ B $\log(1/a)$ C $\log a$ D $3\log a$

g. L'espressione $\log(a^2) - \log(b^2)$ vale:

A $\log(a^2 - b^2)$ B $2\log(a/b)$ C $\log(2a - 2b)$ D $\log(a^2b^2)$

[1 risposta A, 2 B, 2 C e 2 D]

187 Indica la risposta corretta.

a. Nell'equazione $\log_{\sqrt{3}} 27 = x$:

A $x = 3/2$ B $x = 3$ C $x = 5$ D $x = 6$

b. Nell'equazione $\log_{\frac{1}{2}} x = \frac{1}{2}$:

A $x = 1/2$ B $x = -1/2$ C $x = \sqrt{1/2}$ D $x = \sqrt{2}$

c. Nell'equazione $\log_{\frac{1}{4}} x = -2$:

A $x = 1/8$ B $x = 2$ C $x = 8$ D $x = 16$

d. Quanto vale l'espressione $\log_3(9^x)$?

A x B $2x$ C 1 D 2

e. L'espressione $\log_{-\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$ vale:

A -1 B 0 C impossibile D 1

f. Nell'equazione $\log_x \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$:

A $x = \frac{1}{256}$ B $x = \frac{1}{128}$ C $x = \frac{1}{64}$ D $x = \frac{1}{4}$

g. Quanto vale l'espressione $12 \cdot (\log 3 + \log 5)$?

A $\log(15^{12})$ B $\log(12^{15})$ C $12/15$ D $15/12$

[2 risposte A, 1 B, 2 C e 2 D]

4 PROVE INVALSI

Le prove Invalsi (Istituto Nazionale per la VALutazione del Sistema di Istruzione e formazione), che nelle scuole superiori coinvolgono le classi seconde e quinte, valutano l'apprendimento degli studenti italiani. Questo capitolo, rivolto alle classi quarte, contiene esercizi di preparazione alle prove Invalsi di matematica.

4.1 ALGEBRA

Esercizio 110. Una moto ha percorso i 7/8 di un certo tragitto. Sapendo che ha percorso 56 km, quanto è lungo l'intero tragitto?

A 49 km B 63 km C 64 km D 70 km

Soluzione. Se x è la lunghezza del tragitto in chilometri, basta risolvere la proporzione:

$$\frac{7}{8} : 1 = 56 : x \quad \Longrightarrow \quad \frac{7}{8}x = 56 \quad \Longrightarrow \quad x = 64$$

La risposta esatta è la C. □

Esercizio 111. La soluzione dell'equazione $5x + 5(x+1) = 35$ è:

A -10 B 3 C 10 D 20

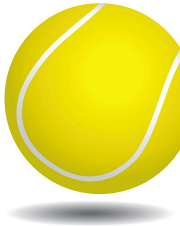
Soluzione.

$$5x + 5(x+1) = 35 \quad \Longrightarrow \quad 5x + 5x + 5 = 35 \quad \Longrightarrow \quad 10x = 30 \quad \Longrightarrow \quad x = 3$$

La risposta esatta è la B. □

Esercizio 112. In un negozio di articoli sportivi ci sono 37 scatole di palline da tennis. Alcune scatole contengono tre palline e altre ne contengono quattro. In tutto ci sono 133 palline. Quante scatole da quattro palline ci sono?

A 15 B 17 C 20 D 22



Soluzione. Se x è il numero di scatole con quattro palline, le scatole con tre palline sono $37 - x$. Il numero di palline totali è la somma delle palline contenute nelle scatole da quattro, cioè $4x$, più quelle contenute nelle scatole da tre, cioè $3 \cdot (37 - x)$:

$$4x + 3 \cdot (37 - x) = 133 \quad \Longrightarrow \quad 4x + 111 - 3x = 133 \quad \Longrightarrow \quad x = 22$$

La risposta esatta è la D. □

Esercizio 113. È data l'equazione $(3k - 6)x - 5k + 2 = 0$, in cui x è l'incognita e k è un numero. La soluzione dell'equazione è 0 per k uguale a:

A 0 B $1/5$ C $2/5$ D 2

Soluzione. Sostituiamo 0 alla x nell'equazione:

$$-5k + 2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad k = 2/5$$

La risposta esatta è la C. □

Esercizio 114. Quanti secondi trascorrono tra le otto e mezzo e le dieci meno un quarto?

A 750 B 3200 C 4500 D 9400

Soluzione. Tra le otto e mezzo e le dieci meno un quarto passa un'ora e un quarto, quindi $(60 + 15)$ minuti $= 75$ minuti; moltiplicando per 60 si ottengono 4500 secondi. La risposta esatta è la C. □

Esercizio 115. Se un lavoro può essere svolto da 32 operai in dodici giorni, in quanto tempo può essere svolto da 48 operai?

[A] 6 [B] 8 [C] 10 [D] 16

Soluzione. Le grandezze "operai" e "numero di giorni" sono inversamente proporzionali, quindi il loro prodotto è costante. Se x è il tempo incognito, basta risolvere l'equazione:

$$32 \cdot 12 = 48 \cdot x \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{32 \cdot 12}{48} \quad \Longrightarrow \quad x = 8$$

La risposta esatta è la B. □

Esercizio 116. Per calcolare l'imposta su un certo immobile si rivaluta la sua rendita catastale del 5% e si moltiplica il risultato ottenuto per 160. Allo stesso risultato si può giungere in un solo passaggio, moltiplicando direttamente la rendita catastale per un opportuno coefficiente. Quale?

[A] 165 [B] 168 [C] 180 [D] 265

Soluzione. Se x è la rendita catastale iniziale, la rendita catastale rivalutata è:

$$x + \frac{5}{100}x = x + \frac{1}{20}x = \frac{21}{20}x$$

Moltiplicando per 160 si ottiene:

$$\frac{21}{20}x \cdot 160 = 168x$$

Il coefficiente è 168, quindi la risposta esatta è la B. □

Esercizio 117. Per preparare una torta bisogna usare due parti di zucchero ogni cinque parti di farina. Quanti chili x di zucchero servono se si vogliono usare 1,1 kg di farina?

A $2:5 = x:1,1$

B $2:x = x:5$

C $5:2 = x:1{,}1$

D $5:x = 2:1{,}1$

Soluzione. Le grandezze sono direttamente proporzionali, quindi il rapporto tra zucchero e farina deve essere lo stesso. La risposta esatta è la A. □

Esercizio 118. All'inizio dell'anno hai comprato alcune azioni che a metà dell'anno hanno guadagnato il 10% del valore, ma alla fine dell'anno hanno perso il 10% del valore che avevano a metà dell'anno. Rispetto al valore iniziale, quello finale è:

A lo stesso

B diminuito del 10%

C diminuito dell'1%

D aumentato dell' 1%

Soluzione. Se x è il valore iniziale delle azioni, il loro valore a metà dell'anno è:

$$x + \frac{10}{100}x = x + \frac{1}{10}x = \frac{11}{10}x$$

Il valore finale delle azioni è quindi:

$$\frac{11}{10}x - \frac{10}{100} \cdot \frac{11}{10}x = \frac{11}{10}x - \frac{11}{100}x = \frac{110-11}{100}x = \frac{99}{100}x$$

La risposta esatta è la C. □

Esercizio 119. Aldo, Bruna e Carlo fanno una corsa in bici. Bruna impiega i due terzi del tempo di Aldo, mentre Carlo impiega i cinque quarti del tempo di Bruna. Non sappiamo quanto tempo ha impiegato Aldo. Qual è stato l'ordine di arrivo?

A Aldo, Bruna e Carlo

B Aldo, Carlo e Bruna

C Bruna, Carlo e Aldo

D Carlo, Bruna e Aldo

Soluzione. Se A, B e C sono rispettivamente i tempi impiegati da Aldo, Bruna e Carlo, si ha:

$$B = \frac{2}{3}A \qquad C = \frac{5}{4}B = \frac{5}{4} \cdot \frac{2}{3}A = \frac{5}{6}A$$

Poiché

$$\frac{2}{3} < \frac{5}{6} < 1 \qquad \Longrightarrow \qquad B < C < A$$

la risposta esatta è la C. □

Esercizio 120. Con il vino contenuto in una botte si sono riempite 162 bottiglie da 2 litri. Quante bottiglie da 0,75 litri si sarebbero potute riempire con lo stesso vino?

A 432	B 400	C 124	D 521

Soluzione. I litri di vino sono $162 \cdot 2 = 324$, che vanno suddivisi in bottiglie da 0,75, quindi $324 : 0{,}75 = 432$. La risposta esatta è la A. □

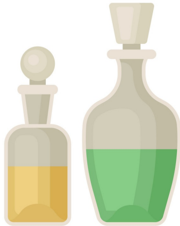
Esercizio 121. Qual è la maggiore delle seguenti frazioni?

A 1/5	B 1/10	C 3/5	D 3/2

Soluzione. La frazione 3/2 è l'unica maggiore di 1, perché il numeratore è maggiore del denominatore. La risposta esatta è la D. □

Esercizio 122. Una bottiglia di vetro, che vuota pesa 260 g, contiene 350 g di succo di frutta, mentre una bottiglia di vetro, che vuota pesa 320 g, ne contiene 700 g. Quanto vetro si risparmia confezionando sei bottiglie da 700 g invece che dodici da 350 g?

A 1000 g	B 1200 g	C 1350 g	D 1400 g



Soluzione. Il vetro necessario per confezionare le dodici bottiglie da 350 g è $12 \cdot 260\,\text{g} = 3210\,\text{g}$, mentre il vetro necessario per confezione le sei bottiglie da 700 g è $6 \cdot 320\,\text{g} = 1920\,\text{g}$. Il vetro risparmiato è quindi $(3120 - 1920)\,\text{g} = 1200\,\text{g}$. La risposta esatta è la B. □

Esercizio 123. Una persona ha 20 000 euro che vuole impiegare in due investimenti, A e B. L'investimento A garantisce un tasso del 4% annuo e l'investimento B un tasso del 2% annuo. Quanto bisogna impiegare nell'investimento A perché dopo un anno l'interesse complessivamente generato dai due investimenti sia di almeno 450 euro?

A 1500 € B 2000 € C 2500 € D 3000 €

Soluzione. Se x e y sono rispettivamente il denaro investito in A e in B in euro, si ha:

$$\begin{cases} x + y = 20\,000 \\ \dfrac{4}{100}x + \dfrac{2}{100}y \geqslant 450 \end{cases}$$

Sostituendo nella disequazione l'espressione di y data dall'equazione:

$$\frac{4}{100}x + \frac{2}{100}(20\,000 - x) \geqslant 450 \quad \Longrightarrow \quad 4x + 40\,000 - 2x \geqslant 45\,000 \quad \Longrightarrow \quad x \geqslant 2\,500$$

La risposta esatta è la C. □

Esercizio 124. Se al prodotto di tre numeri interi consecutivi si aggiunge il numero intermedio, si ottiene:

A il quadrato del numero intermedio

B il cubo del numero intermedio

C il cubo del numero minore

D il quadrato del numero maggiore

Soluzione. Se indichiamo i tre numeri consecutivi con n, $n+1$ e $n+2$, moltiplicandoli e aggiungendo il numero intermedio $(n+1)$ si ottiene:

$$n(n+1)(n+2)+(n+1)=(n+1)[n(n+2)+1]=(n+1)(n+1)^2=(n+1)^3$$

La risposta esatta è la B. □

Esercizio 125. Se $\log(x^2)=10$, quanto vale $\log x$?

A $\sqrt{10}$ B 5 C 10 D 100

Soluzione.

$$\log(x^2)=10 \quad\Longrightarrow\quad 2\log x=10 \quad\Longrightarrow\quad \log=5$$

La risposta esatta è la B. □

Esercizio 126. La disequazione $(x+2)^2>x^2+4$:

A è sempre verificata

B ha infinite soluzioni, tutte positive

C ha infinite soluzioni, tutte negative

D è impossibile

Soluzione.

$$(x+2)^2>x^2+4 \quad\Longrightarrow\quad x^2+4x+4>x^2+4 \quad\Longrightarrow\quad 4x>0 \quad\Longrightarrow\quad x>0$$

La risposta esatta è la B. □

Esercizio 127. Alla pizzeria «Bella Napoli» è atteso un gruppo di 23 ragazzi, da far sedere attorno a un'unica tavolata. I tavoli che la pizzeria ha a disposizione per formare la tavolata ospitano due persone su ciascuno dei lati più lunghi e una persona su ciascuno dei due lati più corti. Qual è il minimo numero di tavoli che bisogna unire per formare la tavolata?

A 4 B 5 C 6 D 7

Soluzione. I tavoli vanno uniti lungo i lati più corti. Una volta uniti i tavoli, ogni tavolo può ospitare quattro persone (quelle distribuite sui due lati più lunghi), cui si aggiungono i due «capitavola», all'inizio e alla fine. Quindi una tavolata composta da n tavoli può ospitare in tutto $4n+2$ persone. Per poter fare accomodare 23 ragazzi, deve essere:

$$4n+2\geqslant 23 \quad\Longrightarrow\quad n\geqslant\frac{21}{4}=5{,}25$$

Il numero cercato è il più piccolo intero che verifica la disequazione, quindi $n = 6$. La risposta esatta è la C. □

Esercizio 128. In un test formato da 25 domande il punteggio totale p è calcolato assegnando 4 punti per ogni risposta esatta e togliendo 2 punti per ogni risposta sbagliata o mancante. Se la sufficienza si ottiene con almeno 60 punti, qual è il numero minimo di domande cui occorre rispondere correttamente per avere la sufficienza?

A 17 B 18 C 19 D 20

Soluzione. Se x è il numero di risposte esatte e y il numero di risposte sbagliate o mancanti, allora:

$$\begin{cases} x + y = 25 \\ p = 4x - 2y \geqslant 60 \end{cases}$$

da cui

$$4x - 2(25 - x) \geqslant 60 \implies 6x \geqslant 110 \implies x \geqslant 18{,}\overline{3}$$

Il numero cercato è il più piccolo intero che verifica la disequazione, quindi $x = 19$. La risposta esatta è la C. □

Esercizio 129. Data l'equazione $5 \log x = \log 32$, x è uguale a:

A $1/4$ B $1/2$ C 2 D 4

Soluzione.

$$5 \log x = \log 32 \implies \log(x^5) = \log(2^5) \implies x^5 = 2^5 \implies x = 2$$

La risposta esatta è la C. □

Esercizio 130. Se $\log 2x = 3$, quanto vale x?

A $1/8$ B 8 C 500 D 1000

Soluzione.

$$\log 2x = 3 \implies 10^3 = 2x \implies 2x = 1000 \implies x = 500$$

La risposta esatta è la C. □

Esercizio 131. Quanto vale la somma $\log 2 + \log 3/2 + \log 4/3 + \log 5/4$?

A $\log 14/9$ B $\log 2$ C $\log 5$ D 1

Soluzione.

$$\log 2 + \log \frac{3}{2} + \log \frac{4}{3} + \log \frac{5}{4} = \log\left(2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4}\right) = \log 5$$

La risposta esatta è la C. □

Esercizio 132. L'espressione $\log \dfrac{9(1+2/3\,x^2)+2x^4-x^4}{(x^2+3)^2}$ vale:

A 0 B 1 C $2x$ D $4x$

Soluzione.

$$\log \frac{9(1+2/3\,x^2)+2x^4-x^4}{(x^2+3)^2} = \log \frac{9+6x^2+x^4}{(x^2+3)^2} = \log \frac{(x^2+3)^2}{(x^2+3)^2} = \log 1 = 0$$

La risposta esatta è la A. □

Esercizio 133. Il logaritmo in base $11/20$ di 1 è uguale a:

A 0 B $11/20$ C 1 D $20/11$

Soluzione. Il logaritmo di 1 è uguale a 0 qualunque sia la base (positiva e diversa da 1), quindi la risposta esatta è la A. □

Esercizio 134. In matematica finanziaria, la formula che esprime, in regime di capitalizzazione composta, il montante M in funzione del capitale investito C, del tasso d'interesse annuo i e del periodo t misurato in anni, è $M = C(1+i)^t$. Quale delle formule seguenti esprime il periodo t dell'investimento finanziario in funzione di M, C e i?

A $t = \log_{1+i} \dfrac{M}{C}$

B $t = \log_1 \dfrac{M}{C} + \log_i \dfrac{M}{C}$

C $t = \sqrt[1+i]{\dfrac{M}{C}}$

D $t = \log_{1+i} MC$

Soluzione.

$$M = C(1+i)^t \quad \Longrightarrow \quad \frac{M}{C} = (1+i)^t \quad \Longrightarrow \quad t = \log_{1+i} \frac{M}{C}$$

La risposta esatta è la A. □

Esercizio 135. Siano x e y due numeri tali che $\log_2 x = y$. Allora:

- [A] necessariamente $y > 0$
- [B] necessariamente $x > 2$
- [C] $\log_2(x^2) = y^2$
- [D] $\log_2 2x = y + 1$

Soluzione. Se $\log_2 x = y$, allora $x > 0$ e y può avere segno qualsiasi, quindi le risposte A e B sono sbagliate. Anche la risposta C è sbagliata: basta vedere che non è verificata per $x = 2$ e $y = 1$, che invece verificano l'ipotesi. Sviluppiamo l'equazione D:

$$\log_2 2x = y + 1 \implies \log_2 2 + \log_2 x = y + 1 \implies 1 + \log_2 x = y + 1 \implies \log_2 x = y$$

La risposta esatta è la D. □

Esercizio 136. Federica deve risolvere l'equazione $\log(x^2) = (\log x)^2$. Aiutala a stabilire per quali valori di x essa è verificata.

- [A] Per nessun numero.
- [B] Per tutti i numeri positivi.
- [C] Per tutti i numeri diversi da 0
- [D] Per due numeri.

Soluzione.

$$\log(x^2) = (\log x)^2 \quad\implies\quad 2\log x = (\log x)^2 \quad\implies\quad \log x \cdot (\log x - 2) = 0$$

che è verificata se $\log x = 0$ oppure se $\log x - 2 = 0$, cioè se $x = 1$ o se $x = 100$. La risposta esatta è la D. □

Esercizio 137. Jack ha dodici pipe apparentemente identiche, una delle quali è però più pesante delle altre. Avendo a disposizione una bilancia a due piatti, quante pesate sono necessarie per individuarla?

- [A] 3
- [B] 4
- [C] 6
- [D] 7

Soluzione. Le pesate necessarie per individuare la pipa più pesante sono tre.

- Con la prima pesata si mettono sei pipe su ciascun piatto della bilancia: il piatto che si abbassa di più contiene la pipa più pesante, quindi si eliminano le sei pipe sull'altro piatto.
- Con la seconda pesata si mettono tre pipe su ciascun piatto della bilancia: il piatto che si abbassa di più contiene la pipa più pesante, quindi si eliminano le tre pipe sull'altro piatto.
- Con la terza pesata si mette su ciascun piatto della bilancia una pipa, presa a caso dalle tre rimaste: se i piatti della bilancia restano alla stessa altezza, la pipa più pesante è quella lasciata da parte, mentre se c'è un piatto che si abbassa di più, è quello che contiene la pipa più pesante.

La risposta esatta è la A. □

4.2 GEOMETRIA

Esercizio 138. Per i tre punti $(0,0)$, $(1,3)$ e $(3,5)$ di un sistema di assi cartesiani:

A non passa alcuna retta

B passa una sola retta

C passano due rette

D passano infinite rette

Soluzione. La retta che unisce i punti $(0,0)$ e $(1,3)$ ha equazione $y = 3x$. Questa retta non passa per $(3,5)$. La risposta esatta è la A. □

Esercizio 139. Di due cerchi, il primo ha area doppia del secondo. Qual è il rapporto tra la lunghezza della circonferenza del primo e quella del secondo?:

A $\sqrt{2}$ B $1/2$ C 2 D 4

Soluzione. Indichiamo con R_1 e R_2 i raggi dei due cerchi, e con A_1 e A_2 le rispettive aree. Allora:

$$A_1 = \pi R_1^2 \qquad A_2 = \pi R_1^2 \qquad A_1 = 2A_2$$

da cui si ottiene:

$$\pi R_1^2 = 2\pi R_2^2 \qquad \Longrightarrow \qquad R_1 = R_2\sqrt{2}$$

Se C_1 e C_2 sono le misure delle due circonferenze, si ha:

$$C_1 = 2\pi R_1 \qquad C_2 = 2\pi R_2 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{C_1}{C_2} = \frac{R_1}{R_2} = \sqrt{2}$$

La risposta esatta è la A. □

Esercizio 140. Un rettangolo, uno dei cui lati è lungo il doppio dell'altro, ha lo stesso perimetro di un quadrato. Il rapporto tra l'area del rettangolo e l'area del quadrato è uguale a:

A 1/2 B 5/8 C 3/4 D 8/9

Soluzione. Se a e $2a$ sono le dimensioni del rettangolo, il perimetro del rettangolo è $6a$. Se b è il lato del quadrato, il perimetro del quadrato è $4b$. Allora:

$$6a = 4b \implies a = 2b/3$$

Il rapporto tra l'area del rettangolo e l'area del quadrato è:

$$\frac{2a \cdot a}{b^2} = \frac{2a^2}{b^2} = \frac{2(2b/3)^2}{b^2} = \frac{2 \cdot 4b^2}{9b^2} = \frac{8}{9}$$

La risposta esatta è la D. □

Esercizio 141. Se si raddoppia il raggio di una sfera, la sua superficie:

A raddoppia
B triplica
C quadruplica
D si moltiplica per 2π

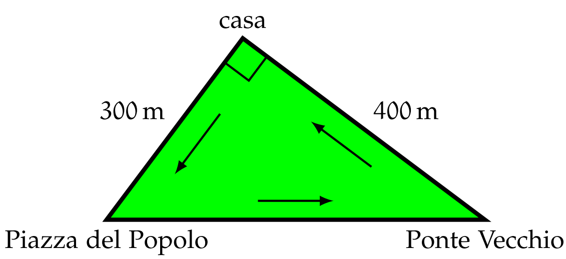
Soluzione. La superficie S di una sfera di raggio R è $4\pi R^2$. Se R raddoppia, la superficie diventa:

$$4\pi(2R)^2 = 4\pi 4R^2 = 4S$$

La risposta esatta è la C. □

Esercizio 142. Per mantenersi in forma Maria ha l'abitudine di correre lungo le vie del centro cittadino, completando per cinque volte il percorso indicato nella figura seguente: da casa procede verso Piazza del Popolo, poi si dirige verso il Ponte Vecchio e infine punta nuovamente verso la propria abitazione. Quanti chilometri percorre Maria?

A 3 km B 4 km C 5 km D 6 km



Soluzione. La distanza tra Piazza del Popolo e il Ponte Vecchio è data dal teorema di Pitagora:

$$\sqrt{300^2 + 400^2}\,\text{m} = \sqrt{90\,000 + 160\,000}\,\text{m} = \sqrt{250\,000}\,\text{m} = 500\,\text{m}$$

Quindi il percorso è lungo

$$(300 + 500 + 400)\,\text{m} = 1200\,\text{m}$$

Maria lo percorre cinque volte. Poiché

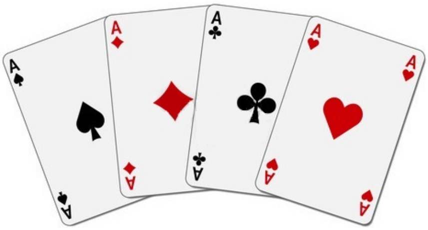
$$(1200 \cdot 5)\,\text{m} = 6000\,\text{m} = 6\,\text{km}$$

la risposta esatta è la D. □

4.3 PROBABILITÀ E STATISTICA

Esercizio 143. Un mazzo di carte da poker è composto da 52 carte, di cui 12 sono figure. Pescando a caso una carta, qual è la probabilità che esca una figura o un asso?

A 1/13 B 3/13 C 4/13 D 6/13



Soluzione. Le figure sono dodici e gli assi sono quattro. La probabilità è il numero di casi favorevoli ($12 + 4 = 16$) diviso per il numero di casi possibili (52). Poiché $12/52 = 4/13$, la riposta esatta è la C. □

Esercizio 144. Un insieme di dati è costituito dai quattro valori 20, 30, 50, 60. A questi se ne aggiunge un altro e si calcola la media dei cinque valori, che è 50. Qual è il dato aggiunto?

A 10 B 40 C 50 D 90

Soluzione. Indicando con x il dato aggiunto, la media dei cinque valori è

$$\frac{20 + 30 + 50 + 60 + x}{5} = 50 \quad\Longrightarrow\quad 160 + x = 250 \quad\Longrightarrow\quad x = 90$$

La risposta esatta è la D. □

Esercizio 145. Nella soluzione di tre test Paolo ha ottenuto 15 punti, 8 punti e 11 punti. Quale punteggio deve ottenere Paolo nel quarto test per avere complessivamente una media di almeno 12 punti?

A 8 B 11 C 14 D 15

Soluzione. Se x è il punteggio che Paolo ottiene nel quarto test, la sua media deve verificare la disequazione:

$$\frac{15+8+11+x}{4} \geqslant 12 \quad \Longrightarrow \quad 34+x \geqslant 48 \quad \Longrightarrow \quad x \geqslant 14$$

La risposta esatta è la C. □

Esercizio 146. A un corso di fitness sono iscritti 15 ragazzi di età media pari a 18 anni e 20 ragazze di età media pari a 25 anni. Qual è l'età media degli iscritti al corso?

A 20 B 21 C 22 D 24

Soluzione. Applichiamo la formula della media pesata:

$$\frac{15 \cdot 18 + 20 \cdot 25}{15+20} = \frac{270+500}{35} = 22$$

La risposta esatta è la C. □

Esercizio 147. Un'urna contiene 5 palline blu, 20 rosse e 25 verdi. Qual è la probabilità di estrarre in sequenza prima una pallina blu e poi una pallina rossa? (La seconda estrazione avviene senza reinserire nell'urna la prima pallina.)

A circa l'1% B circa il 4% C circa l'8% D circa il 10%

Soluzione. La probabilità di estrarre una pallina blu è il numero delle palline blu (casi favorevoli) diviso per il numero totale di palline (casi possibili): $5/50 = 1/10$. Poiché la pallina blu estratta non viene rimessa nell'urna, prima della seconda estrazione nell'urna sono rimaste 49 palline; la probabilità di estrarre una pallina rossa è quindi 20/49. La probabilità che i due eventi avvengano in sequenza è il prodotto delle singole probabilità:

$$\frac{1}{10} \cdot \frac{20}{49} = \frac{2}{49} \approx \frac{2}{50} = 4\%$$

La risposta esatta è la B. □

Esercizio 148. La tabella seguente riporta, per quattro regioni, il numero di incidenti stradali verificatisi nel 2010 e la lunghezza della rete stradale in chilometri. In quale regione era più rischioso circolare nel 2010?

A Umbria B Sicilia C Piemonte D Sardegna

Regione	**Numero di incidenti**	**Lunghezza della rete stradale** (km)
Piemonte	5290	18 500
Umbria	4520	6639
Sicilia	10 283	20 833
Sardegna	5562	12 132

Soluzione. Il rischio è dato dal rapporto tra il numero di incidenti e la lunghezza della rete stradale. Questo rapporto è più alto per l'Umbria, quindi la risposta esatta à la A. □

Esercizio 149. Si lanciano due dadi. Qual è la probabilità che la somma dei numeri usciti sia pari?

A 25% B 33% C 50% D 75%

Soluzione. Indicando con P un numero pari e con D un numero dispari, scriviamo tutti i casi possibili che si possono presentare lanciando due dadi:

PP PD DP **DD**

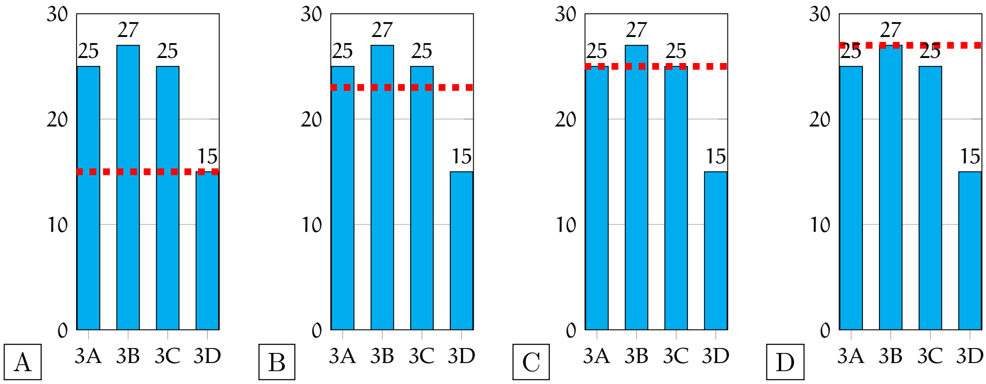
La probabilità che la somma dei numeri usciti sia pari è il numero di casi favorevoli (due: PP, DD) diviso per il numero di casi possibili (quattro). Poiché $2/4 = 50\%$, la risposta esatta è la C. □

Esercizio 150. Una scatola contiene 60 biglietti numerati da 1 a 60. Estraendo un biglietto a caso, qual è la probabilità che il numero risulti minore di 4 o maggiore di 57?

A 1/15 B 1/12 C 1/10 D 1/6

Soluzione. La probabilità è il numero di casi favorevoli (sei, che corrispondono ai numeri 1, 2, 3, 58, 59, 60) diviso per il numero di casi possibili (60). Poiché $6/60 = 1/10$, la risposta esatta è la C. □

Esercizio 151. In una scuola ci sono quattro classi terze. I seguenti grafici rappresentano la distribuzione del numero di alunni in ogni classe. In quale grafico la linea tratteggiata rappresenta la media del numero degli alunni per classe?



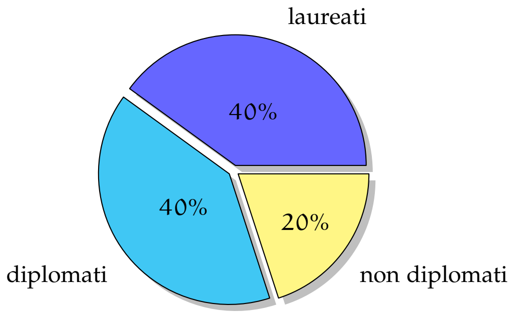
Soluzione. La media del numero degli alunni per classe è:

$$\frac{25+27+25+15}{4} = 23$$

La risposta esatta è la B. □

Esercizio 152. Il grafico seguente mostra la ripartizione in base al titolo di studio dei dipendenti di un'azienda. Se l'azienda ha 30 dipendenti in tutto, quanti sono i non diplomati?

A 6 B 8 C 10 D 12



Soluzione. I dipendenti non diplomati sono il 20% del totale, cioè $20/100 \cdot 30 = 6$. La risposta esatta è la A. □

Esercizio 153. Un gruppo di dieci ciclisti è composto da sei uomini e quattro donne. I dieci ciclisti pesano in media 74 kg. Il peso medio dei sei uomini è 82 kg. Quanto pesano in media le quattro donne?

A 62 kg B 63 kg C 64,5 kg D 66 kg

Soluzione. Indichiamo con x il peso medio delle quattro donne e applichiamo la formula della media pesata:

$$\frac{6 \cdot 82 + 4 \cdot x}{10} = 74 \quad \Longrightarrow \quad 492 + 4x = 740 \quad \Longrightarrow \quad 4x = 248 \quad \Longrightarrow \quad x = 62$$

La risposta esatta è la A. □

Esercizio 154. Andrea estrae a caso un numero dalla tombola. Qual è circa la probabilità che esso non sia multiplo né di 10 né di 6? Ricorda che i numeri della tombola vanno dall'1 al 90 (inclusi).

A 73% B 75% C 77% D 79%

Soluzione. I multipli di 10 compresi tra 1 e 90 sono nove:

$$10 \quad 20 \quad 30 \quad 40 \quad 50 \quad 60 \quad 70 \quad 80 \quad 90$$

I multipli di 6 compresi tra 1 e 90 sono quindici:

$$6 \quad 12 \quad 18 \quad 24 \quad 30 \quad 36 \quad 42 \quad 48 \quad 54 \quad 60 \quad 66 \quad 72 \quad 78 \quad 84 \quad 90$$

I multipli di 10 o di 6 compresi tra 1 e 90 sono $9 + 12 = 21$ (i numeri 30, 60 e 90 vanno contati una volta sola), quindi i numeri compresi tra 1 e 90 che *non* sono multipli né di 10 né di 6 sono $90 - 21 = 69$. La probabilità di estrarne uno è il numero di casi favorevoli (69) diviso per il numero di casi possibili (90). Poiché $69/90 \approx 77\%$, la risposta esatta è la C. □

Esercizio 155. Lanciando contemporaneamente dieci monete, qual è la probabilità di ottenere dieci teste?

$\boxed{\text{A}}$ circa lo 0,1% $\boxed{\text{B}}$ l'1% $\boxed{\text{C}}$ il 2% $\boxed{\text{D}}$ circa il 10%

Soluzione. La probabilità di ottenere testa lanciando una moneta è 1/2. La probabilità di ottenere dieci teste lanciandone dieci è:

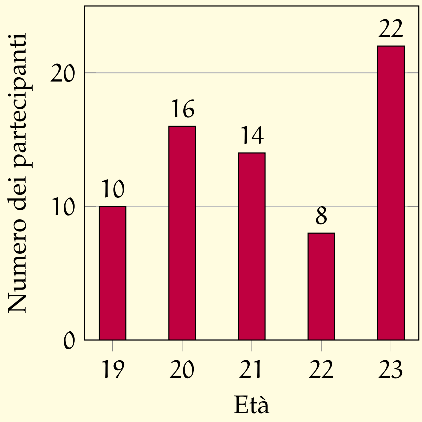
$$\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{1024} \approx \frac{1}{1000} = 0{,}1\%$$

La risposta esatta è la A. □

4.4 ESERCIZI

Chi non risolve esercizi non impara la matematica.

1 Il grafico seguente rappresenta la distribuzione di frequenza delle età dei giocatori che partecipano a un torneo.



a. Qual è il numero complessivo dei partecipanti?

b. Qual è l'età media dei partecipanti?

c. Qual è l'età mediana?

d. Quale età rappresenta la moda della distribuzione?

e. Qual è la percentuale dei partecipanti che hanno più di 20 anni?

[70; 21,3; 21; 23; 62,9%]

2 Indica la risposta corretta.

a. Le soluzioni della disequazione $x^2 - 5x > -4$ sono:

A $x < 1$ o $x > 4$ B $x < 4$ C $x > 1$ D $1 < x < 4$

b. Anna e Bruno stanno giocando a «indovina il numero che ho pensato». Anna dice di aver pensato un numero maggiore di 0 e minore di 50. Bruno può fare tre domande e avere le relative risposte. Bruno chiede: «È primo?». Anna risponde di sì. Bruno: «È più piccolo di 32?». Anna risponde di no. Bruno: «La somma delle sue cifre è un numero pari?». Anna risponde di sì. Qual è il numero pensato da Anna?

A 35 B 37 C 39 D 41

c. Quattro studenti hanno messo in ordine tre numeri, dal più piccolo al più grande. Quale delle disuguaglianze seguenti è corretta?

A $2{,}3 < 2{,}15 < 2{,}147$
C $2{,}147 < 2{,}3 < 2{,}15$
B $2{,}147 < 2{,}15 < 2{,}3$
D $2{,}15 < 2{,}147 < 2{,}3$

d. L'espressione $\log 2 + \log 4$ è uguale a:

A $2 \log 2$ B $\log 6$ C $\log 8$ D 8

e. Quanto vale $\log 10$?

A -1 B 0 C 1 D 10

f. L'espressione $\log 8 + \log 7$ vale:

A $\log 1$ B $\log 15$ C 15 D $\log 56$

g. Le soluzioni della disequazione $-9x^2 + 12x - 4 \geqslant 0$ sono:

A il solo numero $2/3$
C tutti i numeri tranne $2/3$
B nessuna
D tutti i numeri

[Due risposte A, due B, due C e una D]

3 Indica la risposta esatta.

a. Tutte le le soluzioni della disequazione $x^2 - 2x - 3 < 0$ sono:

A $1 < x < 3$ B $-3 < x < 1$ C $-1 < x < 3$ D $-3 < x < -1$

b. Per frequentare una piscina si deve acquistare una tessera da 10 euro e pagare 7 euro per ogni ingresso. Luigi può spendere al massimo 100 euro. Se n è il numero degli ingressi, quale tra le seguenti disequazioni descrive il numero di ingressi che Luigi può fare?

A $(10 + 7)n \leqslant 100$
C $10 + 7n \leqslant 100$
B $10n + 7 \leqslant 100$
D $10 + 7n \geqslant 100$

c. La disequazione $x^2 > 0$ è verificata:

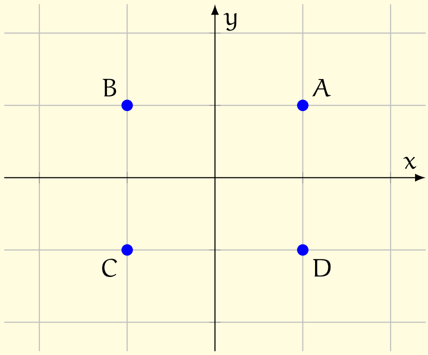
A per ogni x B per ogni $x \neq 0$ C solo se $x < 0$ D solo se $x > 0$

d. Dati i numeri a e b non nulli, si ha $ab > b$ solo quando:

A $a > 1$ e $b > 0$ oppure $a < 1$ e $b < 0$ C $a > 0$ e $b > 0$ oppure $a < 0$ e $b < 0$

B $a > 0$ e $b > 1$ oppure $a < 0$ e $b < 1$ D $a > 1$ e $b > 1$ oppure $a < 1$ e $b < 1$

e. Quale dei punti rappresentati ha coordinate $(1, -1)$?



A A B B C C D D

f. L'espressione $\log 99$ è uguale a:

A $\log 3 + \log 33$ B $\log 100 - \log 1$ C $\log 33 + \log 66$ D $\log 3 \cdot \log 33$

g. Se $c < 0$, la disequazione $cx^2 - x > 0$ è verificata se

A $0 < x < -\frac{1}{c}$ B $\frac{1}{c} < x < 0$ C $x < 0$ o $x > \frac{1}{c}$ D $x < \frac{1}{c}$ o $x > 0$

[Due risposte A, una B, due C e due D]

4 Indica la risposta esatta.

a. Il risultato dell'operazione $125 : 100$ è:

A 0,125 B 1,25 C 12,5 D 1250

b. Quanti centilitri ci sono in sette litri?

A 0,7 B 7 C 70 D 700

c. Quante ore ci sono in un ottavo di giorno?

A 3 B 5 C 8 D 20

d. I cateti di un triangolo rettangolo misurano 3 cm e 6 cm. Qual è la sua area?

A $6\,cm^2$ B $9\,cm^2$ C $18\,cm^2$ D $36\,cm^2$

e. Nella divisione $15 : 5 = 3$, qual è il divisore?

A 0 B 3 C 5 D 15

f. Qual è la frazione inversa di 5/4?

A $-5/4$ B $-4/5$ C $4/5$ D $5/4$

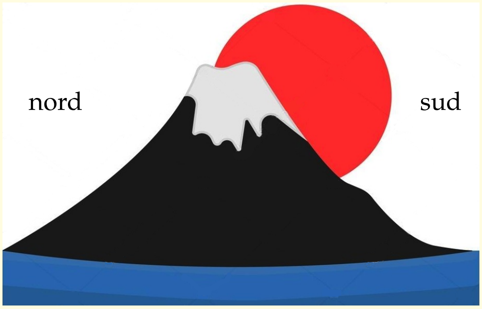
g. Se $4^x = 3$, allora:

A $16^x = 9$ B $12^x = 9$ C $2^3 = 3/2$ D $8^x = 6$

[Due risposte A, due B, due C e una D]

5 La figura seguente rappresenta la situazione climatica sul versante nord e sul versante sud di una montagna in un certo periodo dell'anno.

altitudine (m)	°C	°C
1400	1	1
1200	2	3
1000	3	5
800	4	7
600	5	9
400	7	11
200	8	13
0	9	15



a. Da quale punto cardinale è vista la montagna in questa immagine?

b. Qual è la temperatura, a 400 m di altitudine, sul versante sud della montagna?

c. Qual è la differenza di temperatura, a 200 m di altitudine, sui due versanti della montagna?

d. Uno scalatore parte da 200 m di altitudine e arriva a 1200 m. Durante la scalata la temperatura diminuisce di 10 °C. Su quale versante ha scalato la montagna?

[ovest; 11 řC; 45 řC; sud]

6 Indica la risposta esatta.

a. Per quale dei seguenti valori è vera la relazione $n(n+1) > 1+n$?

A $n = -1$ B $n = 0$ C $n = 1$ D $n = 2$

b. L'area di un rettangolo misura 100 metri quadrati e la sua altezza misura 5 metri. Quanto misura la sua base?

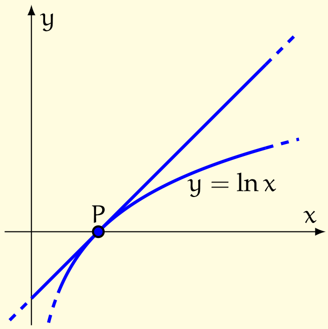
A 5 m   B 10 m   C 20 m   D 25 m

c. Mentre un ciclista si allena su una pista a ogni giro si segna il tempo impiegato. In quale giro è andato più veloce?

Giri	0	1º	2º	3º	4º
Tempo	0	11″	21″	30″	41″

A il primo   B il secondo   C il terzo   D il quarto

d. La figura seguente rappresenta la retta tangente al grafico della funzione $y = f(x) = \ln x$ nel suo punto d'intersezione P con l'asse x. Qual è la sua equazione?



A $y = x - e$ B $y = x - 1$ C $y = ex - 1$ D $y = e(x - 1)$

e. L'equazione $3^{2x-1} = -3$:

A è impossibile

B ha come soluzione 0

C ha come soluzione $1/2$

D ha come soluzione 1

f. L'espressione $\log(x + y)$ equivale a:

A $\log x + \log y$

B $\log(x \cdot y)$

C $x \log y$

D nessuna delle precedenti

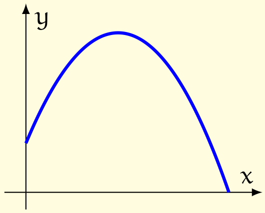
g. Il rapporto tra i volumi di due cubi è 4. Qual è il rapporto tra le loro superfici?

A 2 B $2^{4/3}$ C $2^{3/2}$ D 4

[Una risposta A, due B, due C e due D]

7 Indica la risposta esatta.

a. Francesca lancia una palla in aria. La traiettoria del lancio è rappresentata dalla parabola $y = -x^2 + 3x + 1$. In che punto la palla tocca terra? (Approssima il valore ai decimi.)



A 0,3	B 1,3	C 2,3	D 3,3

b. Dati i quattro numeri seguenti:

$$x = \log 10 \qquad y = \log 7 \qquad z = \log_3 2 \qquad t = \log_2 3$$

qual è il minore?

A x	B y	C z	D t

c. Qual è il risultato dell'espressione $0{,}2 + 0{,}8 + 0{,}9 + 0{,}1$?

A 0,2	B 2	C 2,2	D 20

d. L'espressione $2 \cdot \frac{3}{4} - \frac{1}{2}\left(2 - \frac{3}{4}\right) + 2$ vale:

A 1/8	B 7/4	C 3/2	D 23/8

e. Le diagonali di un rombo misurano 6 cm e 8 cm. Qual è il perimetro del rombo?

A 16 cm	B 20 cm	C 24 cm	D 48 cm

f. L'area di un rettangolo misura $36\,\text{cm}^2$ e uno dei suoi lati è lungo 9 cm. Quanto misura l'altro lato?

A 4 cm	B 18 cm	C 27 cm	D 36 cm

g. Qual è l'area del quadrilatero che ha per vertici i punti $A(1,5)$, $B(3,5)$, $C(3,-3)$ e $D(1,3)$?

A 16	B 20	C 24	D 30

[Due risposte A, due B, una C e due D]

8 Su una confezione da 250 g di cereali e frutta secca sono riportate le seguenti informazioni.

Nutriente	**Peso** (g)
Zuccheri	48
Proteine	20
Amidi	155
Grassi	4
Fibre	11
Sale	2
Altro	10

a. Quanti grammi di fibre ci sono nella confezione?

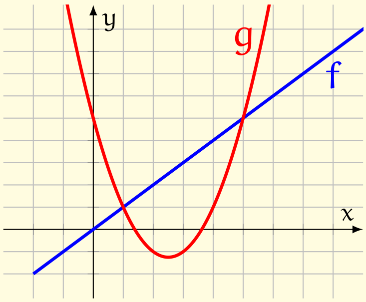
b. Qual è la percentuale di fibre presenti nella confezione?

c. Quanti grammi di fibre si trovano in 30 g di cereali e frutta secca?

[11 g; 4,4%; 1,32 g]

9 Indica la risposta esatta.

a. Osserva il grafico seguente.



Indica l'affermazione errata.

- A $f(x) = 0$ se e solo se $x = 0$
- B $f(x) = g(x)$ se e solo se $x = 1$ o $x = 5$
- C $g(x) > f(x)$ se e solo se $x < 1$ o $x > 5$
- D $f(x) > 0$ se e solo se $1 < x < 5$

b. Per quali numeri è divisibile 1250?

- A solo per 2
- B solo per 5
- C solo per 2 e per 5
- D nessuna delle precedenti

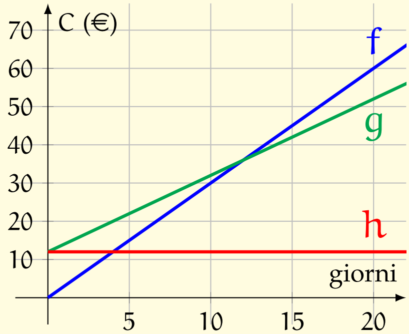
c. Dati due numeri interi consecutivi, la loro somma è sempre un numero:

- A pari
- B dispari
- C negativo
- D primo

d. La media di un insieme di n numeri è:

- A la somma di tutti i numeri diviso n
- B la somma di tutti i numeri diviso 2
- C il massimo meno il minimo
- D la somma degli estremi diviso 2

e. Tre amici si preparano a trascorrere una vacanza e vogliono noleggiare una tenda, che costa due euro al giorno più un costo fisso di 12 euro per l'assicurazione obbligatoria. Qual è il grafico che rappresenta il costo della tenda?



- A grafico f
- B grafico g
- C grafico h
- D grafici f o h

f. Su una carta geografica con scala 1 : 100 000 la distanza tra due città è di 10 cm. Quale sarà la distanza tra le due città su una carta geografica con scala 1 : 50000?

- A 5 cm
- B 10 cm
- C 20 cm
- D 25 cm

g. Quattro metri quadrati può essere l'area di:

- A un'aula scolastica
- B un banco scolastico
- C un tappeto
- D un campo di calcio

[Due risposte A, una B, due C e due D]

10 Indica se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera o falsa.

a. Se si raddoppia il lato di un quadrato, il suo perimetro raddoppia. V F

b. Se si raddoppia il lato di un quadrato, la sua area raddoppia. V F

c. Se si raddoppia la base di un rettangolo e si dimezza la sua altezza, la sua area resta la stessa. V F

d. Se si raddoppia la base di un rettangolo e si dimezza la sua altezza, il suo perimetro resta lo stesso.. V F

e. Se si aumentano la base e l'altezza di un rettangolo di una stessa lunghezza a, il suo perimetro aumenta di $4a$. V F

[3 affermazioni vere e 2 false]

11 Indica la risposta esatta.

a. Se x è un numero positivo e y è un numero negativo, la somma dei loro quadrati è:

- A uguale al quadrato della somma
- B minore del quadrato della somma
- C negativa
- D maggiore del quadrato della somma

b. L'insieme dei numeri interi è infinito. Quale dei seguenti suoi sottoinsiemi è *finito*?

- A l'insieme dei numeri pari
- B l'insieme dei multipli di 3
- C l'insieme dei sottomultipli di 30
- D l'insieme dei numeri positivi

c. Data la sequenza numerica

$$8 \quad 14 \quad 20 \quad 26 \quad 32 \quad 38 \quad 44 \quad \ldots$$

qual è il numero successivo?

- A 46
- B 48
- C 50
- D 52

d. Se in una gara di staffetta Luigi parte prima di Giuseppe, Marco parte prima di Giuseppe, Cesare parte prima di Giuseppe e Luigi parte prima di Cesare:

- A Giuseppe non parte per ultimo.
- B Marco è il secondo a partire.
- C Cesare è il terzo a partire.
- D Non si sa chi parte per primo.

e. Come si chiamano i termini di una moltiplicazione?

- A addendi
- B fattori
- C dividendo e divisore
- D minuendo e sottraendo

f. La retta di equazione $y = 2x$:

- A è parallela all'asse x
- B ha coefficiente angolare uguale a 2
- C non passa per l'origine
- D è parallela all'asse y

g. Dati i numeri π, $\sqrt{16}$, 3,60 e 335/100, qual è il più piccolo?

$\boxed{\text{A}}$ π $\boxed{\text{B}}$ $\sqrt{16}$ $\boxed{\text{C}}$ 3,60 $\boxed{\text{D}}$ 335/100

[Una risposta A, due B, due C e due D]

12 Indica la risposta esatta.

a. Aggiungendo un centesimo al numero 0,999 si ottiene

$\boxed{\text{A}}$ 1,009 $\boxed{\text{B}}$ 1,01 $\boxed{\text{C}}$ 1,99 $\boxed{\text{D}}$ 1,09

b. Un'urna contiene 50 palline. Marco ne estrae 20 senza rimetterle nell'urna e osserva che 10 sono nere e 10 sono rosse. Estraendo una ventunesima pallina, qual è la probabilità che questa sia nera?

$\boxed{\text{A}}$ meno di 1/2 $\boxed{\text{C}}$ più di 1/2

$\boxed{\text{B}}$ esattamente 1/2 $\boxed{\text{D}}$ i dati non bastano per rispondere

c. La disequazione $3 - x > 1$ ha soluzione:

$\boxed{\text{A}}$ $x < -2$ $\boxed{\text{B}}$ $x < 2$ $\boxed{\text{C}}$ $x > -2$ $\boxed{\text{D}}$ $x < 4$

d. Considera un quadrato di lato a. Se si aumenta il lato a del 20%, si ottiene un nuovo quadrato di lato b. Quale delle seguenti espressioni rappresenta la misura di b?

$\boxed{\text{A}}$ $20a$ $\boxed{\text{B}}$ $1{,}20a$ $\boxed{\text{C}}$ $a + 20$ $\boxed{\text{D}}$ $a + 0{,}20$

e. Considera un quadrato di lato a. Se si aumenta il lato a del 20%, si ottiene un nuovo quadrato di lato b. Di quanto aumenta in percentuale l'area del quadrato di lato b rispetto all'area del quadrato di lato a?

$\boxed{\text{A}}$ Del 20% $\boxed{\text{B}}$ Del 40% $\boxed{\text{C}}$ Del 44% $\boxed{\text{D}}$ Del 120%

f. Quale delle equazioni seguenti traduce il problema «il doppio di x supera di 2 la metà di x»?

$\boxed{\text{A}}$ $2x = 2 + \frac{1}{2}x$ $\boxed{\text{B}}$ $2x + \frac{1}{2}x = 2$ $\boxed{\text{C}}$ $x^2 = 2 + \frac{x}{2}$ $\boxed{\text{D}}$ $2 + 2x = \frac{1}{2}x$

g. Quale dei numeri seguenti è maggiore di 3?

$\boxed{\text{A}}$ 3/2 $\boxed{\text{B}}$ 0,333 $\boxed{\text{C}}$ 1/3 $\boxed{\text{D}}$ 10/3

[Due risposte A, due B, una C e due D]