MATEMATICA

per le quinte

degli Istituti professionali

LORENZO PANTIERI

Questo lavoro spiega il programma di matematica degli Istituti professionali italiani. Ringrazio i miei studenti per l'aiuto fornito: il libro è più loro che mio. Se avete idee su argomenti da aggiungere o modificare, o se vi dovesse capitare di notare un errore, di battitura o di sostanza, mi fareste un favore comunicandomelo. Spero che possiate studiare la matematica con il mio stesso piacere.

♡

Lorenzo Pantieri

Matematica per gli Istituti professionali

☞ lorenzo.pantieri@gmail.com

INDICE

1 INTRODUZIONE ALL'ANALISI

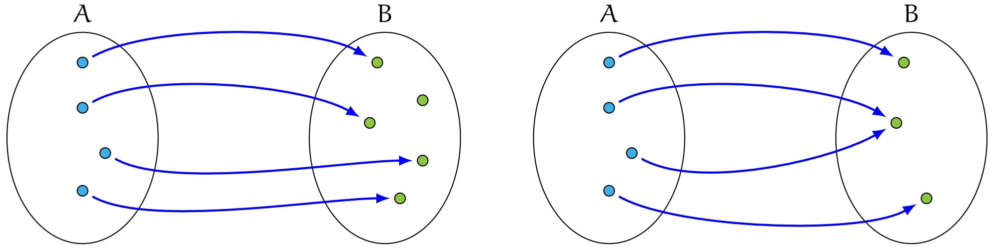
1.1 FUNZIONI

Facciamo alcuni richiami al concetto di funzione, uno dei più importanti della matematica.

Definizione 1. Dati due insiemi A e B, una **funzione** f di **dominio** A e **codominio** B è una relazione che associa a ogni elemento di A uno e un solo elemento di B. Si scrive $f\colon A \to B$. Il dominio A si indica anche con $\operatorname{dom} f$.

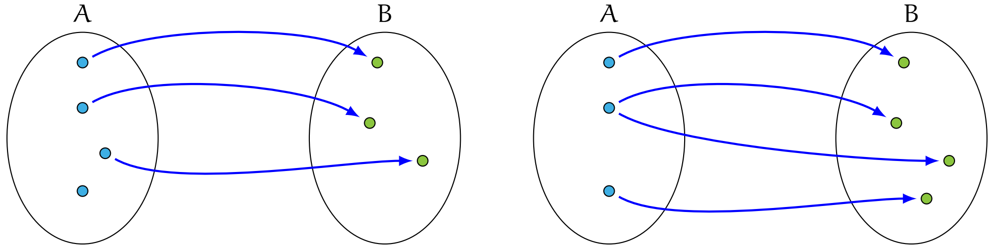
Definizione 2. L'elemento $y \in B$ che è associato a un elemento $x \in A$ è l'**immagine** di x: x è la **variabile indipendente** della funzione, mentre y è la **variabile dipendente**.

Per esempio, le relazioni nella figura 1 sono funzioni, mentre le relazioni nella figura 2 non lo sono.



(a) (b)

Figura 1: Funzioni



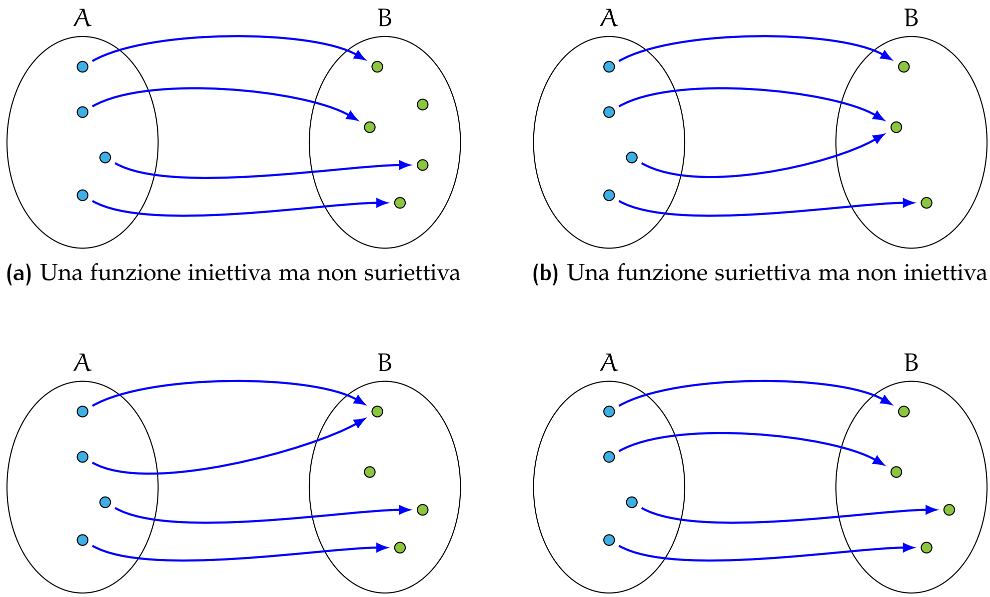
(a) (b)

Figura 2: Relazioni che non sono funzioni

Funzioni iniettive, suriettive, biunivoche

Definizione 3. Una funzione $f\colon A \to B$ è **iniettiva** se a elementi diversi di A corrispondono elementi diversi di B; è **suriettiva** se ogni elemento di B è immagine di almeno un elemento di A; è **biunivoca** se è iniettiva e suriettiva.

La figura 3 mostra alcune funzioni iniettive, suriettive e biunivoche.



(a) Una funzione iniettiva ma non suriettiva

(b) Una funzione suriettiva ma non iniettiva

(c) Una funzione né iniettiva né suriettiva

(d) Una funzione biunivoca

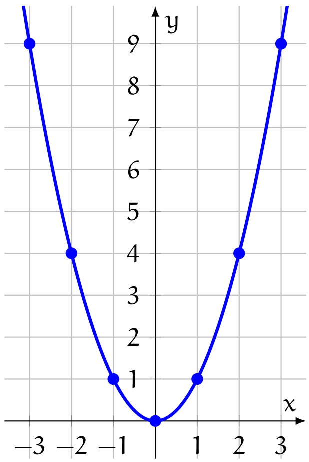
Figura 3: Funzioni iniettive, suriettive, biunivoche

Grafico di una funzione

Una funzione si può rappresentare, oltre che con un diagramma a frecce, anche con un diagramma cartesiano.

Definizione 4. Il **grafico** di una funzione $f\colon A \to B$ è l'insieme delle coppie (x, y) formate da un elemento $x \in A$ e dal suo corrispondente $y \in B$, con $y = f(x)$, nel piano cartesiano.

Per esempio, la figura 4 riporta il grafico della funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con $y = x^2$, sul piano cartesiano.



(a) Grafico

x	$y = x^2$
-3	9
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	9

(b) Alcuni valori

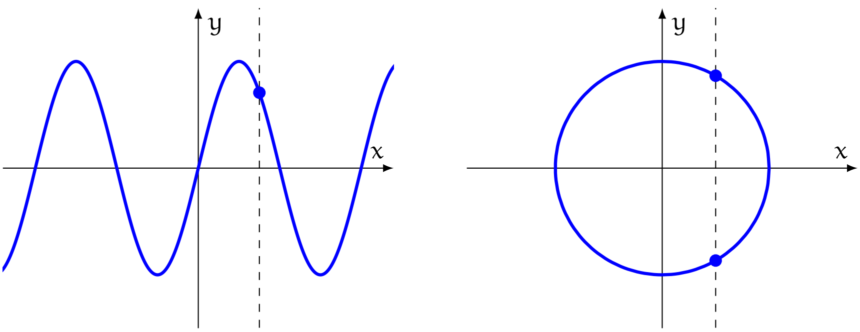
Figura 4: La funzione $y = x^2$

Test delle rette verticali e delle rette orizzontali

Data una curva nel piano cartesiano, si può stabilire se essa è il grafico di una funzione facendo il **test delle rette verticali**:

Proposizione 1. Una curva nel piano cartesiano è il grafico di una funzione se e solo se nessuna retta verticale la interseca più di una volta.

Esercizio 1. Le curve rappresentate nella figura 5 sono funzioni o no?



(a) Una funzione

(b) Una relazione che *non* è una funzione

Figura 5: Test delle rette verticali

Soluzione. Per il test delle rette verticali:

- la curva 5a è il grafico di una funzione, perché nessuna retta verticale la interseca più di una volta;
- la curva 5b non è il grafico una funzione, perché c'è almeno una retta verticale che la interseca due volte. □

Dato il grafico di una funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si può stabilire se essa è iniettiva, suriettiva o biunivoca facendo il **test delle rette orizzontali**:

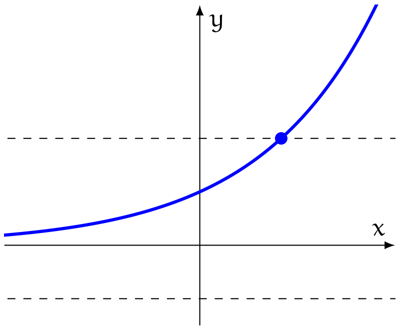
Proposizione 2.

- Una funzione è iniettiva se e solo se ogni retta orizzontale interseca il suo grafico *al massimo* una volta;
- una funzione è suriettiva se e solo se ogni retta orizzontale interseca il suo grafico *almeno* una volta;
- una funzione è biunivoca se e solo se ogni retta orizzontale interseca il suo grafico *esattamente* una volta.

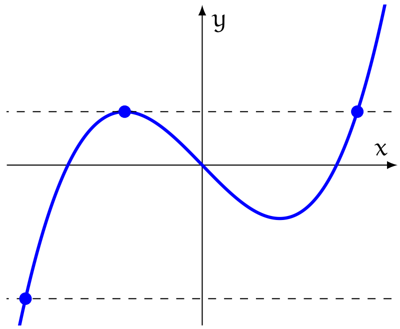
Esercizio 2. Le funzioni $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ rappresentate nella figura 6 sono iniettive, suriettive, biunivoche?

Soluzione. Per il test delle rette orizzontali:

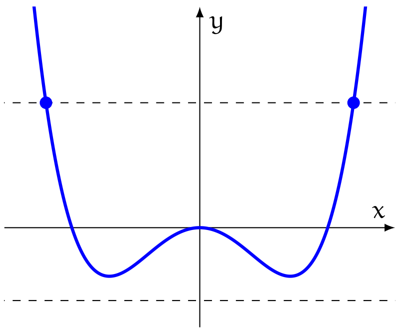
- la funzione 6a è iniettiva, perché ogni retta orizzontale interseca il suo grafico al massimo una volta), ma non suriettiva (perché c'è almeno una retta orizzontale che non lo interseca;
- la funzione 6b è suriettiva, perché ogni retta orizzontale interseca il suo grafico almeno una volta, ma non iniettiva, perché c'è almeno una retta orizzontale che la interseca due volte;
- la funzione 6c non è né iniettiva né suriettiva;
- la funzione 6d è biunivoca. □



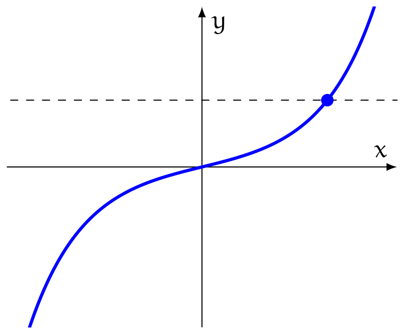
(a) Una funzione iniettiva ma non suriettiva



(b) Una funzione suriettiva ma non iniettiva



(c) Una funzione né iniettiva né suriettiva



(d) Una funzione biunivoca

Figura 6: Test delle rette orizzontali

1.2 CLASSIFICAZIONE

Definizione 5. Una **funzione numerica** è una funzione il cui dominio e codominio sono sottoinsiemi di $\mathbb{R}$.

D'ora in poi ci occuperemo solo di funzioni numeriche e intenderemo con *funzione* sempre una funzione numerica. Conosci già le funzioni:

- lineari $y = mx + q$
- quadratiche $y = ax^2 + bx + c$
- potenza $y = x^n$, con n intero $\geqslant 1$
- esponenziali $y = a^x$ e logaritmiche $y = \log_a x$, con $a > 0$ e $a \neq 1$

Le funzioni si possono classificare in base alle operazioni che compaiono nell'espressione $f(x)$.

Definizione 6. Una funzione è **algebrica** se contiene solo (un numero finito di) operazioni di addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione ed estrazione di radice. Altrimenti è **trascendente**.

Per esempio, sono funzioni algebriche:

- $y = x^2 - 4x + 3$
- $y = \dfrac{2x-4}{x-1}$
- $y = \sqrt{4-x^2}$

Sono funzioni trascendenti:

- $y = 2^x$
- $y = e^{-x^2}$
- $y = x \ln x$

Definizione 7. Tra le funzioni algebriche $y = f(x)$ si distinguono le funzioni:

- **intere**, in cui f è un polinomio
- **fratte**, in cui f è il quoziente di due polinomi
- **irrazionali**, in cui la x compare sotto il segno di radice

Per esempio, le funzioni:

- $y = x^2 - 4x + 3$
- $y = \dfrac{2x-4}{x-1}$
- $y = \sqrt{4-x^2}$

sono rispettivamente intera, fratta e irrazionale.

1.3 DOMINIO

Quando si assegna l'equazione che definisce una funzione senza specificarne il dominio, si sottintende che esso sia quello più ampio possibile.

Definizione 8. Il **dominio** di una funzione $y = f(x)$ è l'insieme dei valori di x per cui le operazioni che compaiono nell'espressione $f(x)$ hanno significato.

Per trovare il dominio basta allora seguire le seguenti indicazioni:

- l'addizione, la sottrazione e la moltiplicazione sono sempre definite, mentre la divisione è definita solo se il divisore è diverso da zero

- una radice di indice pari è definita solo se il radicando è positivo o nullo, mentre una radice di indice dispari è definita se esiste il radicando
- l'esponenziale (con base positiva e diversa da 1) è sempre definito se esiste l'esponente
- il logaritmo è definito se l'argomento è positivo e la base è positiva e diversa da 1

Esercizio 3. Trova il dominio delle funzioni:

- $y = x^2 - 4x + 3$
- $y = x^3 - 3x$
- $y = x^4 - 2x^2$

Soluzione. Sono tre funzioni intere: il loro dominio è $\mathbb{R}$ (figure 7a, 7b e 7c). □

Esercizio 4. Trova il dominio della funzione $y = \dfrac{2x-4}{x-1}$.

Soluzione. È una funzione fratta, definita se il suo denominatore è diverso da zero (figura 7d):

$$x - 1 \neq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x \neq 1$$

Il dominio della funzione è perciò

$$\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$ □

Esercizio 5. Trova il dominio della funzione $y = \dfrac{x^2}{x-1}$.

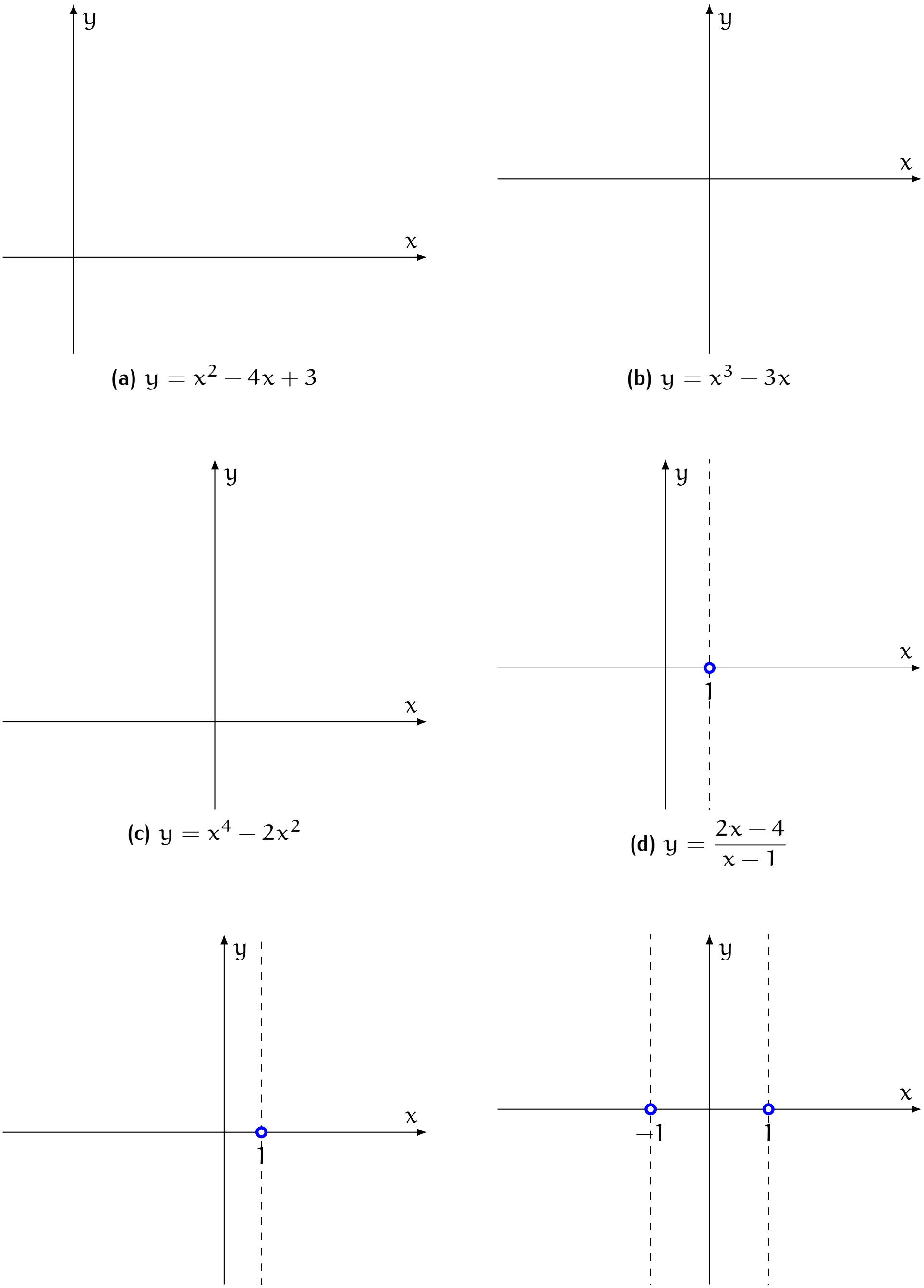
Soluzione. È una funzione fratta, definita se il suo denominatore è diverso da zero (figura 7e):

$$x - 1 \neq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x \neq 1$$

Il dominio della funzione è perciò

$$\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$ □

Esercizio 6. Trova il dominio della funzione $y = \dfrac{x^2-4}{x^2-1}$.



(a) $y = x^2 - 4x + 3$

(b) $y = x^3 - 3x$

(c) $y = x^4 - 2x^2$

(d) $y = \dfrac{2x-4}{x-1}$

(e) $y = \dfrac{x^2}{x-1}$

(f) $y = \dfrac{x^2-4}{x^2-1}$

Figura 7: Dominio di alcune funzioni algebriche intere e fratte

Soluzione. È una funzione fratta, definita se il suo denominatore è diverso da zero (figura 7f):

$$x^2 - 1 \neq 0$$

da cui

$$x \neq -1 \quad \wedge \quad x \neq 1$$

Il dominio delle due funzioni è perciò

$$\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$$

□

Esercizio 7. Trova il dominio della funzione $y = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$.

Soluzione. Poiché una radice quadrata è definita solo se il radicando è positivo o nullo, la funzione data è definita se e solo se:

$$x^2 - 4x + 3 \geqslant 0$$

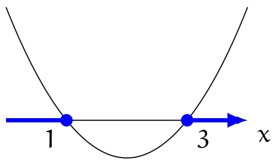
Risolviamo l'equazione associata:

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad (x-1)(x-3) = 0$$

da cui, uguagliando a zero i fattori:

$$x = 1 \quad \vee \quad x = 3$$

La parabola associata ha la concavità verso l'alto (perché il coefficiente di x^2 è positivo) e interseca l'asse x nei punti corrispondenti alle soluzioni dell'equazione associata. La disequazione è verificata quando la parabola «sta sopra» l'asse x o lo interseca.

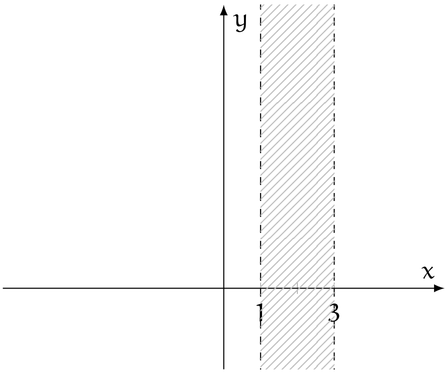


In conclusione, il dominio della funzione è l'insieme (figura 8a):

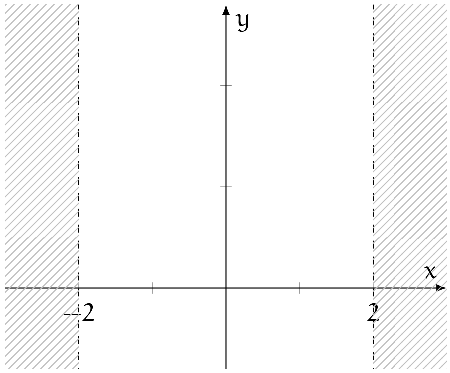
$$\operatorname{dom} f = \{ x \leqslant 1 \vee x \geqslant 3 \}$$

□

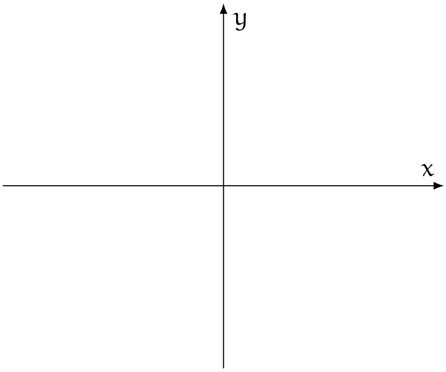
Esercizio 8. Trova il dominio della funzione $y = \sqrt{4 - x^2}$.



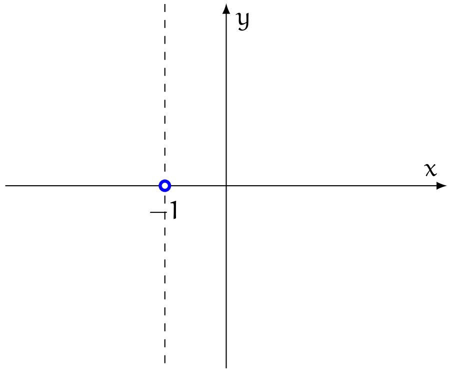
(a) $y = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$



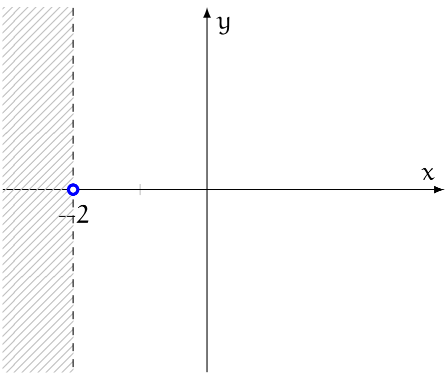
(b) $y = \sqrt{4 - x^2}$



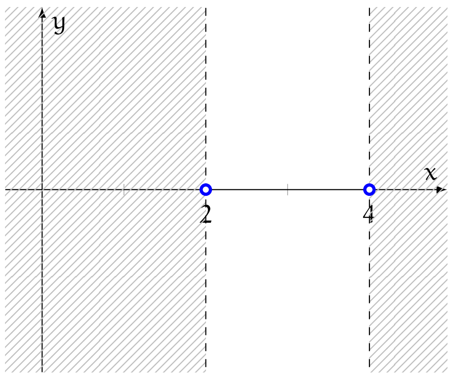
(c) $y = \sqrt[3]{x^2 + x}$



(d) $y = 2^{\frac{x}{x+1}}$



(e) $y = \log(x + 2)$



(f) $y = \log \dfrac{x - 2}{4 - x}$

Figura 8: Dominio di alcune funzioni irrazionali e trascendenti

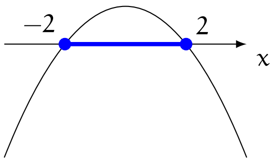
Soluzione. Poiché una radice quadrata è definita solo se il radicando è positivo o nullo, la funzione data è definita se e solo se:

$$4 - x^2 \geqslant 0$$

È una disequazione di secondo grado. Risolviamo l'equazione associata:

$$4 - x^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x^2 = 4 \quad \Longrightarrow \quad x = \pm 2$$

La parabola associata volge la concavità verso il basso (perché il coefficiente di x^2 nella disequazione è negativo) ed è secante l'asse x. La disequazione è verificata quando la parabola «sta sopra» l'asse x o lo interseca.



In conclusione, il dominio della funzione è (figura 8b):

$$\operatorname{dom} f = \{ -2 \leqslant x \leqslant 2 \}$$ □

Esercizio 9. Trova il dominio della funzione $y = \sqrt[3]{x^2 + x}$.

Soluzione. Poiché una radice di indice dispari è definita se esiste il radicando, la funzione data è definita per ogni x per cui ha senso l'espressione $x^2 + x$, cioè per ogni x. Quindi (figura 8c):

$$\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$$ □

Esercizio 10. Trova il dominio della funzione $y = 2^{\frac{x}{x+1}}$.

Soluzione. Poiché l'esponenziale (con base positiva e diversa da 1) è sempre definito se esiste l'esponente, la funzione è definita se e solo se è definita la frazione $\dfrac{x}{x+1}$, il che succede se e solo se il suo denominatore è diverso da 0:

$$x + 1 \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad x \neq -1$$

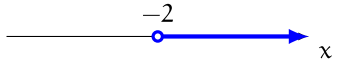
Quindi il dominio della funzione è (figura 8d):

$$\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{ -1 \}$$ □

Esercizio 11. Trova il dominio della funzione $y = \log(x+2)$.

Soluzione. Poiché il logaritmo è definito se e solo se l'argomento è positivo e la base è positiva e diversa da 1, la funzione data è definita se e solo se

$$x + 2 > 0 \quad \Longrightarrow \quad x > -2$$



Quindi il dominio della funzione è (figura 8e):

$$\operatorname{dom} f = \{ x > -2 \}$$

□

Esercizio 12. Trova il dominio della funzione $y = \log \dfrac{x-2}{4-x}$.

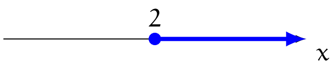
Soluzione. Poiché il logaritmo è definito se e solo se l'argomento è positivo e la base è positiva e diversa da 1, la funzione data è definita se e solo se

$$\frac{x-2}{4-x} > 0$$

Studiamo il segno del numeratore e del denominatore.

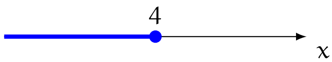
- Numeratore:

$$x - 2 \geqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad x \geqslant 2$$

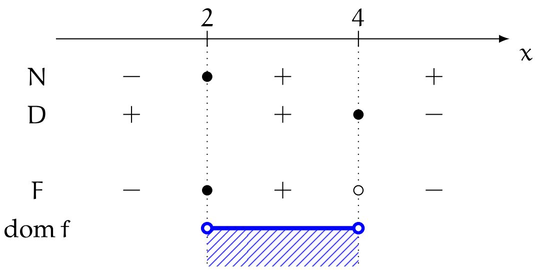


- Denominatore:

$$4 - x \geqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad x \leqslant 4$$



Costruiamo la tabella dei segni.



La disequazione è verificata quando la frazione è positiva (+). Quindi il dominio della funzione è l'insieme (figura 8f):

$$\operatorname{dom} f = \{\, 2 < x < 4 \,\}$$ □

1.4 INTERSEZIONI CON GLI ASSI

Per tracciare il grafico di una funzione è utile trovare i suoi punti di intersezione con gli assi cartesiani. In particolare:

- risolvendo l'equazione $f(x) = 0$ si ottengono le ascisse (dette anche **zeri** della funzione) delle intersezioni con l'asse x;
- calcolando il valore di $f(x)$ per $x = 0$, cioè $f(0)$, si ottiene l'ordinata dell'intersezione con l'asse y.

Esercizio 13. Trova le intersezioni con gli assi della funzione $y = x^2 - 4x + 3$.

Soluzione.

- Troviamo le intersezioni con l'asse x:

  $$x^2 - 4x + 3 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad (x-1)(x-3) = 0$$

  da cui

  $$x = 1 \quad \vee \quad x = 3$$

  Quindi il grafico della funzione interseca l'asse x nei punti $(1, 0)$ e $(3, 0)$.

- Troviamo le intersezioni con l'asse y:

  $$f(0) = 0^2 - 4 \cdot 0 + 3 = 3$$

  Quindi il grafico della funzione interseca l'asse y nel punto $(0, 3)$

Vedi la figura 9a. □

Esercizio 14. Trova le intersezioni con gli assi della funzione $y = x^3 - 3x$.

Soluzione.

- Troviamo le intersezioni con l'asse x:
$$x^3 - 3x = 0 \quad \Longrightarrow \quad x(x^2 - 3) = 0$$
Uguagliamo a zero i fattori:
$$x = 0 \quad \vee \quad x^2 - 3 = 0$$
da cui
$$x = 0 \quad \vee \quad x = \pm\sqrt{3}$$
per cui il grafico della funzione interseca l'asse x nei punti:
$$(-\sqrt{3}, 0) \qquad (0, 0) \qquad (\sqrt{3}, 0)$$
- Troviamo le intersezioni con l'asse y:
$$f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0 = 0$$
Quindi il grafico della funzione interseca l'asse y nel punto $(0, 0)$.

Vedi la figura 9b. □

Esercizio 15. Trova le intersezioni con gli assi della funzione $y = x^4 - 2x^2$.

Soluzione.

- Troviamo le intersezioni con l'asse x:
$$x^4 - 2x^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x^2(x^2 - 2) = 0$$
Uguagliamo a zero i fattori:
$$x^2 = 0 \quad \vee \quad x^2 - 2 = 0$$
da cui
$$x = 0 \quad \vee \quad x = \pm\sqrt{2}$$
Quindi il grafico della funzione interseca l'asse x nei punti:
$$(-\sqrt{2}, 0) \qquad (0, 0) \qquad (\sqrt{2}, 0)$$
- Troviamo le intersezioni con l'asse y.
$$f(0) = 0^4 - 2 \cdot 0^2 = 0$$
Quindi il grafico della funzione interseca l'asse y nel punto $(0, 0)$.

Vedi la figura 9c. □

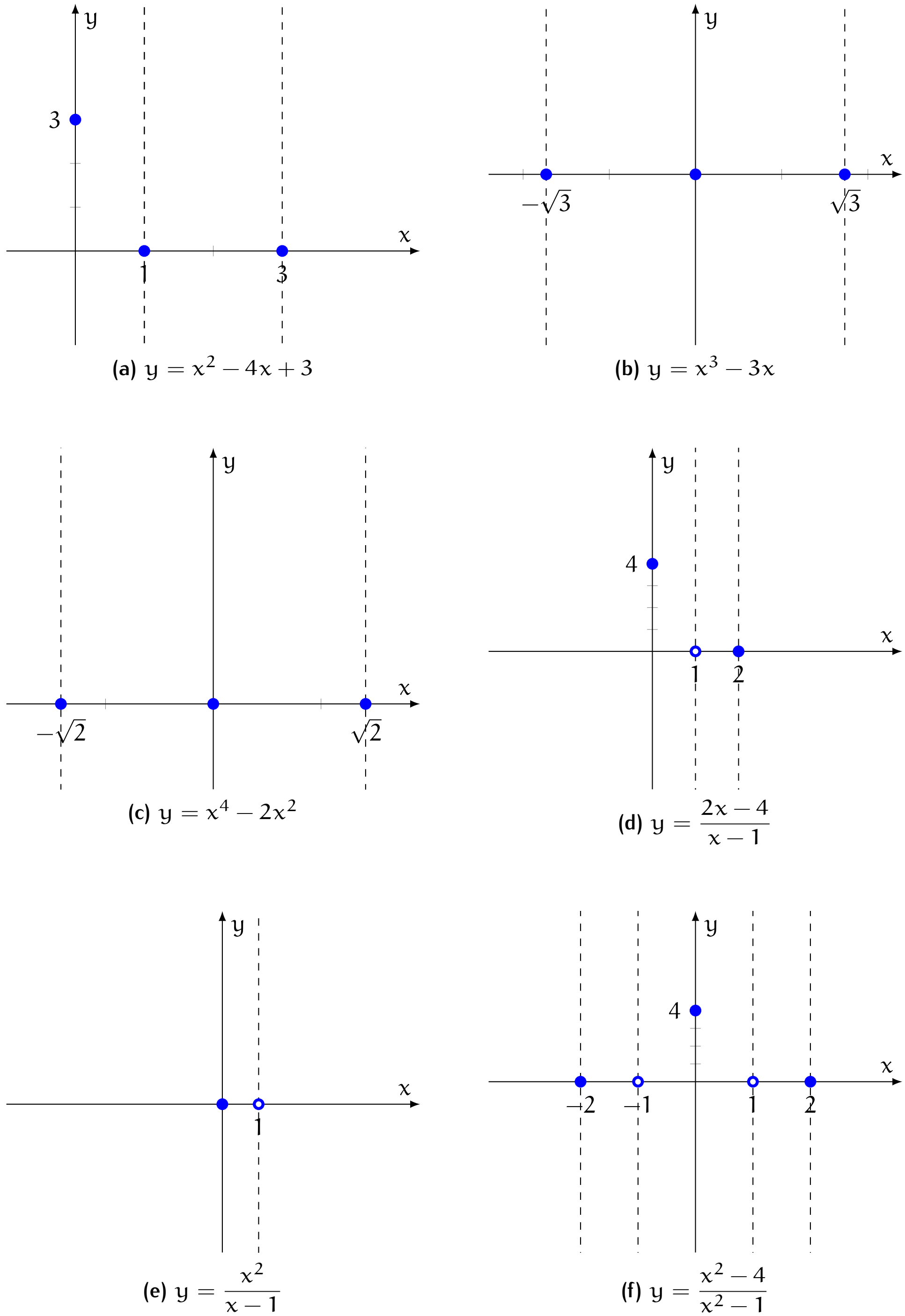


Figura 9: Intersezioni con gli assi di alcune funzioni algebriche

Esercizio 16. Trova le intersezioni con gli assi della funzione $y = \dfrac{2x-4}{x-1}$.

Soluzione.

- Troviamo le intersezioni con l'asse x:
$$\frac{2x-4}{x-1} = 0$$
da cui, eliminando il denominatore,
$$2x - 4 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x = 2$$
valore accettabile in quanto appartiene al dominio della funzione. Ciò significa che il grafico della funzione interseca l'asse x nel punto $(2, 0)$.

- Troviamo le intersezioni con l'asse y.
$$f(0) = \frac{2 \cdot 0 - 4}{0 - 1} = 4$$
Quindi il grafico della funzione interseca l'asse y nel punto $(0, 4)$.

Vedi la figura 9d. □

Esercizio 17. Trova le intersezioni con gli assi della funzione $y = \dfrac{x^2}{x-1}$.

Soluzione.

- Troviamo le intersezioni con l'asse x:
$$\frac{x^2}{x-1} = 0$$
da cui, eliminando il denominatore,
$$x^2 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x = 0$$
valore accettabile in quanto appartiene al dominio della funzione. Quindi il grafico della funzione interseca l'asse x nel punto $(0, 0)$.

- Troviamo le intersezioni con l'asse y.
$$f(0) = \frac{0^2}{0 - 1} = 0$$
Quindi il grafico della funzione interseca l'asse y nel punto $(0, 0)$.

Vedi la figura 9e. □

Esercizio 18. Trova le intersezioni con gli assi della funzione $y = \dfrac{x^2-4}{x^2-1}$.

Soluzione.

- Troviamo le intersezioni con l'asse x:

$$\frac{x^2-4}{x^2-1} = 0$$

da cui, eliminando il denominatore,

$$x^2-4=0 \quad \Longrightarrow \quad x^2=4 \quad \Longrightarrow \quad x=\pm 2$$

valori entrambi accettabili in quanto appartengono al dominio della funzione. Quindi il grafico della funzione interseca l'asse x nei punti:

$$(-2,0) \qquad (2,0)$$

- Troviamo le intersezioni con l'asse y.

$$f(0) = \frac{0^2-4}{0^2-1} = 4$$

Quindi il grafico della funzione interseca l'asse y nel punto $(0,4)$.

Vedi la figura 9f. □

1.5 SEGNO

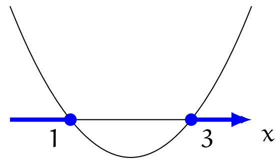
Studiare il segno di una funzione significa trovare i valori di x per cui $f(x) > 0$, $f(x) = 0$ e $f(x) < 0$. Si risolve la disequazione $f(x) \geqslant 0$, che individua gli intervalli dove la funzione è positiva o nulla, cioè dove il suo grafico «sta sopra» l'asse x o lo interseca: la funzione è negativa dove non è positiva o nulla, nel suo dominio.

Esercizio 19. Studia il segno della funzione $y = x^2-4x+3$.

Soluzione. Risolviamo la disequazione:

$$x^2-4x+3 \geqslant 0$$

Le soluzioni dell'equazione associata $x^2-4x+3=0$ sono $x=1$ e $x=3$. Disegniamo la parabola associata.



Quindi la funzione è:

- positiva se $x < 1$ o $x > 3$
- nulla se $x = 1$ o $x = 3$
- negativa altrimenti

Vedi la figura 10a. □

Esercizio 20. Studia il segno della funzione $y = x^3 - 3x$.

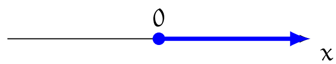
Soluzione. Risolviamo la disequazione:

$$x^3 - 3x \geqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad x(x^2 - 3) \geqslant 0$$

Studiamo il segno di ciascun fattore.

- Primo fattore:

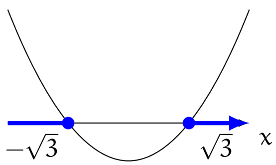
  $$x \geqslant 0$$

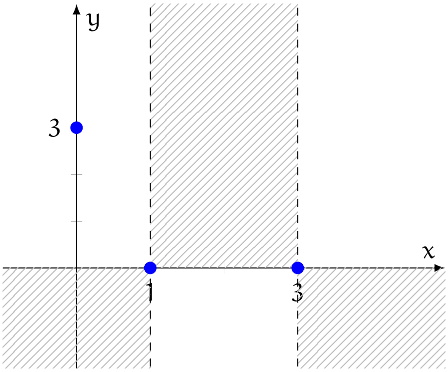
- Secondo fattore:

  $$x^2 - 3 \geqslant 0$$

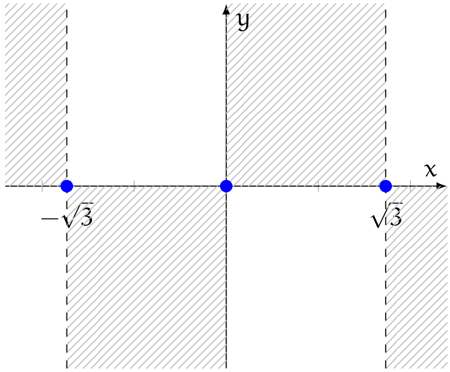
  Le soluzioni dell'equazione associata $x^2 - 3 = 0$ sono $x = \pm\sqrt{3}$. Disegniamo la parabola associata.

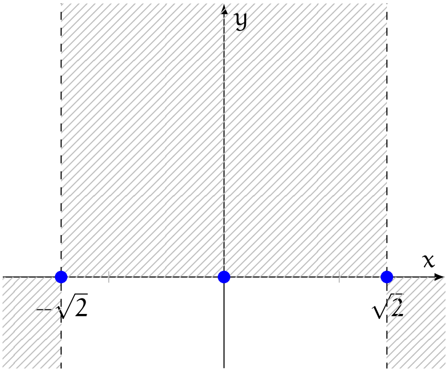
Costruiamo la tabella dei segni della funzione.



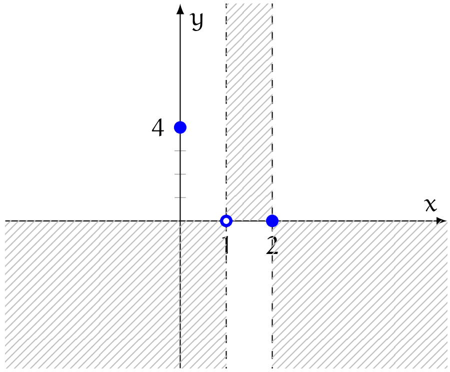
(a) $y = x^2 - 4x + 3$



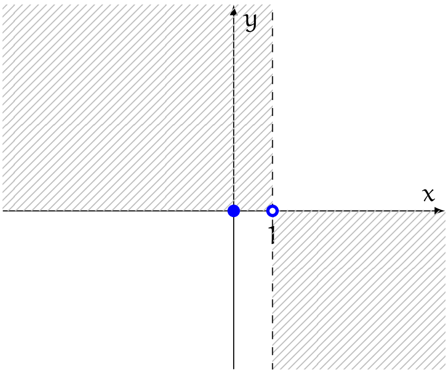
(b) $y = x^3 - 3x$



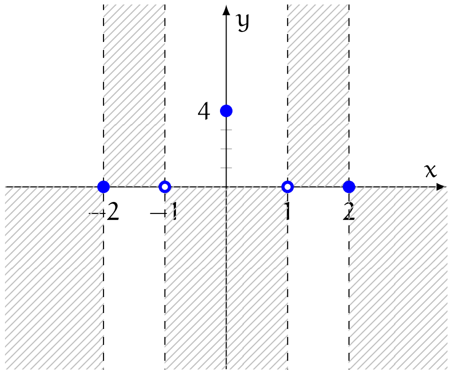
(c) $y = x^4 - 2x^2$



(d) $y = \dfrac{2x-4}{x-1}$

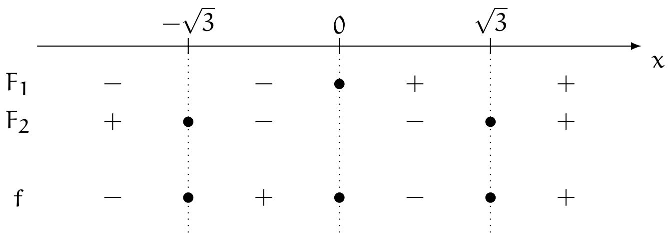


(e) $y = \dfrac{x^2}{x-1}$



(f) $y = \dfrac{x^2-4}{x^2-1}$

Figura 10: Segno di alcune funzioni algebriche



Quindi la funzione è:

- positiva se $-\sqrt{3} < x < 0$ o $x > \sqrt{3}$
- nulla se $x = -\sqrt{3}$ o $x = 0$ o $x = \sqrt{3}$
- negativa altrimenti

Vedi la figura 10b. □

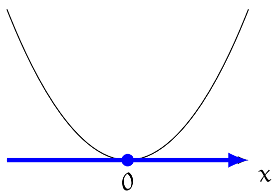
Esercizio 21. Studia il segno della funzione $y = x^4 - 2x^2$.

Soluzione. Risolviamo la disequazione:

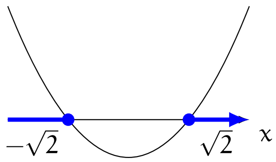
$$x^4 - 2x^2 \geqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad x^2(x^2 - 2) \geqslant 0$$

Studiamo il segno di ciascun fattore.

- Primo fattore:
$$x^2 \geqslant 0$$
L'unica soluzione dell'equazione associata $x^2 = 0$ è $x = 0$. Disegniamo la parabola associata.



- Secondo fattore:
$$x^2 - 2 \geqslant 0$$
L'equazione associata $x^2 - 2 = 0$ ha per soluzioni $x = \pm\sqrt{2}$. Disegniamo la parabola associata.



Costruiamo la tabella dei segni della funzione.

		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		x
F_1	$+$		$+$	$\bullet$	$+$		$+$	
F_2	$+$	$\bullet$	$-$		$-$	$\bullet$	$+$	
f	$+$	$\bullet$	$-$	$\bullet$	$-$	$\bullet$	$+$	

Quindi la funzione è:

- positiva se $x < -\sqrt{2}$ o $x > \sqrt{2}$
- nulla se $x = -\sqrt{2}$ o $x = 0$ o $x = \sqrt{2}$
- negativa altrimenti

Vedi la figura 10c. □

Esercizio 22. Studia il segno della funzione $y = \dfrac{2x-4}{x-1}$.

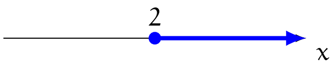
Soluzione. Risolviamo la disequazione:

$$\frac{2x-4}{x-1} \geqslant 0$$

Studiamo il segno del numeratore e del denominatore.

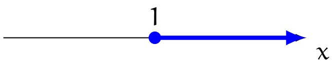
- Numeratore:

$$2x - 4 \geqslant 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x \geqslant 2$$



- Denominatore:

$$x - 1 \geqslant 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x \geqslant 1$$



Costruiamo la tabella dei segni della funzione.

		1		2		x
N	$-$		$-$	$\bullet$	$+$	
D	$-$	$\bullet$	$+$		$+$	
f	$+$	$\circ$	$-$	$\bullet$	$+$	

Quindi la funzione:

- è positiva se $x < 1$ o $x > 2$
- non è definita se $x = 1$
- è nulla se $x = 2$
- è negativa altrimenti

Vedi la figura 10d. □

Esercizio 23. Studia il segno della funzione $y = \dfrac{x^2}{x-1}$.

Soluzione. Risolviamo la disequazione:

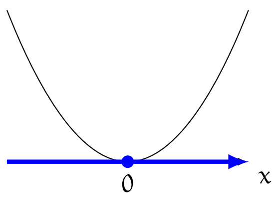
$$\frac{x^2}{x-1} \geqslant 0$$

Studiamo il segno del numeratore e del denominatore.

- Numeratore:

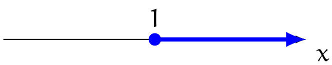
$$x^2 \geqslant 0$$

L'unica soluzione dell'equazione associata $x^2 = 0$ è $x = 0$.

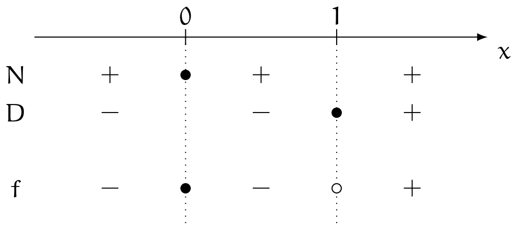


- Denominatore:

$$x - 1 \geqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad x \geqslant 1$$



Costruiamo la tabella dei segni della funzione.



Quindi la funzione:

- è positiva se $x > 1$
- è nulla se $x = 0$
- non è definita se $x = 1$
- è negativa altrimenti

Vedi la figura 10e. □

Esercizio 24. Studia il segno della funzione $y = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 1}$.

Soluzione. Risolviamo la disequazione:

$$\frac{x^2 - 4}{x^2 - 1} \geqslant 0$$

Studiamo il segno del numeratore e del denominatore.

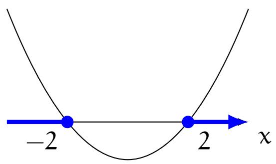
- Numeratore:

$$x^2 - 4 \geqslant 0$$

  Risolviamo l'equazione associata:

$$x^2 - 4 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x^2 = 4 \quad \Longrightarrow \quad x = \pm 2$$

  Disegniamo la parabola associata.



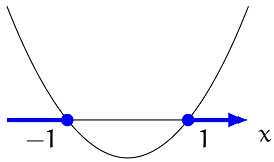
- Denominatore:

$$x^2 - 1 \geqslant 0$$

  Risolviamo l'equazione associata:

$$x^2 - 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x^2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad x = \pm 1$$

  Disegniamo la parabola associata.



Costruiamo la tabella dei segni della funzione.

		-2		-1		1		2		x
N	$+$	●	$-$		$-$		$-$	●	$+$	
D	$+$		$+$	●	$-$	●	$+$		$+$	
f	$+$	●	$-$	○	$+$	○	$-$	●	$+$	

Quindi la funzione:

- è positiva se $x < -2$ o $-1 < x < 1$ o $x > 2$
- è nulla se $x = -2$ o $x = 2$
- non è definita se $x = -1$ o $x = 1$
- è negativa altrimenti

Vedi la figura 10f. □

1.6 SIMMETRIE

Il grafico di una funzione può avere alcune particolari simmetrie: queste caratteristiche vengono formalizzate dalle definizioni di funzione *pari* e *dispari*.

Definizione 9. Una funzione è **pari** se $f(-x) = f(x)$ per ogni x appartenente al dominio della funzione. Una funzione è **dispari** se $f(-x) = -f(x)$ per ogni x appartenente al dominio della funzione.

Il grafico di una funzione pari è simmetrico rispetto all'asse y, mentre il grafico di una funzione dispari è simmetrico rispetto all'origine: vedi la figura 11.

Esercizio 25. La funzione $y = x^2 - 4x + 3$ è pari o dispari?

Soluzione. Sostituiamo $-x$ al posto di x in $f(x)$:

$$f(-x) = (-x)^2 - 4(-x) + 3 = x^2 + 4x + 3$$

Poiché quest'ultima espressione non coincide né con $f(x)$ né con $-f(x)$, la funzione non è né pari né dispari. □

Esercizio 26. La funzione $y = x^3 - 3x$ è pari o dispari?

Soluzione. Sostituiamo $-x$ al posto di x in $f(x)$.

$$f(-x) = (-x)^3 - 3(-x) = -x^3 + 3x = -(x^3 - 3x) = -f(x)$$

La funzione è dispari. Vedi le figure 10b e 35b. □

Esercizio 27. La funzione $y = x^4 - 2x^2$ è pari o dispari?

Soluzione. Sostituiamo $-x$ al posto di x in $f(x)$:

$$f(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2 = x^4 - 2x^2 = f(x)$$

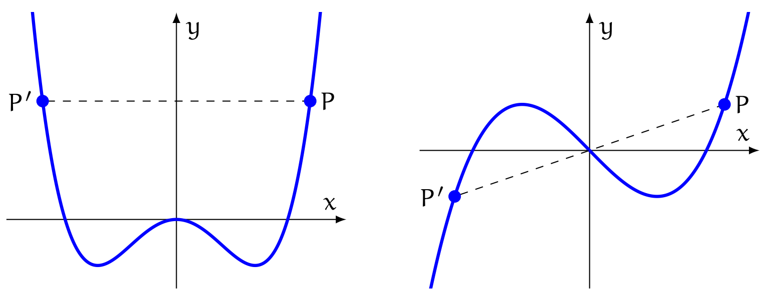
La funzione è pari. □

Esercizio 28. La funzione $y = \dfrac{2x-4}{x-1}$ è pari o dispari?

Soluzione. Sostituiamo $-x$ al posto di x in $f(x)$:

$$f(-x) = \frac{2(-x)-4}{-x-1} = \frac{-2x-4}{-x-1} = \frac{2x+4}{x+1}$$

Poiché quest'ultima espressione non coincide né con $f(x)$ né con $-f(x)$, la funzione non è né pari né dispari. □



(a) Una funzione pari **(b)** Una funzione dispari

Figura 11: Funzioni pari e dispari

Esercizio 29. La funzione $y = \dfrac{x^2}{x-1}$ è pari o dispari?

Soluzione. Sostituiamo $-x$ al posto di x in $f(x)$:

$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{-x-1} = \frac{x^2}{-x-1} = -\frac{x^2}{x+1}$$

Perciò la funzione non è né pari né dispari. □

Esercizio 30. La funzione $y = \dfrac{x^2-4}{x^2-1}$ è pari o dispari?

Soluzione. Sostituiamo $-x$ al posto di x in $f(x)$:

$$f(-x) = \frac{(-x)^2-4}{(-x)^2-1} = \frac{x^2-4}{x^2-1} = f(x)$$

La funzione è pari. □

1.7 ESERCIZI

Chi non risolve esercizi non impara la matematica.

1 La relazione $f \colon \{\,\text{alunni di una scuola}\,\} \to \{\,\text{classi della scuola}\,\}$ «l'alunno x è iscritto alla classe y» è una funzione? È suriettiva? È iniettiva? È biunivoca?

2 La relazione $f \colon \{\,\text{bambini}\,\} \to \{\,\text{madri}\,\}$ «x è figlio naturale di y» è una funzione? È suriettiva? È iniettiva? È biunivoca?

3 La relazione $f \colon \{\,\text{bambini}\,\} \to \{\,\text{donne}\,\}$ «x è figlio naturale di y» è una funzione? È suriettiva? È iniettiva? È biunivoca?

4 La relazione $f \colon \{\,\text{Paesi dell'Unione Europea}\,\} \to \{\,\text{capitali dei Paesi dell'UE}\,\}$ «x ha per capitale y» è una funzione? È suriettiva? È iniettiva? È biunivoca?

5 La relazione $f \colon \{\,\text{Regioni italiane}\,\} \to \{\,\text{mari italiani}\,\}$ «x è bagnata da y» è una funzione?

Trova il dominio delle seguenti funzioni algebriche:

6 $y = \dfrac{1}{4x^2 - 9}$ $\left[\mathbb{R} \setminus \left\{ \pm\dfrac{3}{2} \right\}\right]$

7 $y = \dfrac{x+1}{x^2 - 5x + 6}$ $[\mathbb{R} \setminus \{\,2, 3\,\}]$

8 $y = \dfrac{1}{x^2 + x + 1}$ $[\mathbb{R}]$

9 $y = \dfrac{1}{4x^2 - 20x + 25}$ $\left[\mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{5}{2} \right\}\right]$

10 $y = \dfrac{x^2+1}{x^2 + 6x - 7}$ $[\mathbb{R} \setminus \{\,-7, 1\,\}]$

11 $y = \dfrac{x-1}{x^2 - 11x + 10}$ $[\mathbb{R} \setminus \{\,1, 10\,\}]$

12 $y = \dfrac{1}{x^3 + x^2 + 2x}$ $[\mathbb{R} \setminus \{\,0\,\}]$

13 $y = \dfrac{x^3 + x^2}{x - 7}$ $[\mathbb{R} \setminus \{\,7\,\}]$

14 $y = \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 6x - 7}$ $[\mathbb{R} \setminus \{\,-7, 1\,\}]$

15 $y = \dfrac{x^2+1}{x(x^2 - 4)}$ $[\mathbb{R} \setminus \{\,-2, 0, 2\,\}]$

16 $y = \dfrac{1}{x^5 - 4x^4}$ $[\mathbb{R} \setminus \{\,0, 4\,\}]$

17 $y = \dfrac{x^2 - 2}{x^2 - 5}$ $\left[\mathbb{R} \setminus \left\{ \pm\sqrt{5} \right\}\right]$

18 $y = \dfrac{x-4}{x-2}$ $[\mathbb{R} \setminus \{\,2\,\}]$

19 $y = \dfrac{x+1}{x^2 - 9}$ $[\mathbb{R} \setminus \{\,\pm 3\,\}]$

20 $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - x - 20}$ $[\mathbb{R} \setminus \{\,-4, 5\,\}]$

21 $y = \dfrac{x^3 - 1}{x^2}$ $[\mathbb{R} \setminus \{\,0\,\}]$

22 $y = \dfrac{x}{3x^2 + 6x}$ $[\mathbb{R} \setminus \{\,-2, 0\,\}]$

23 $y = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{x^2 + x + 1}$ $[\mathbb{R} \setminus \{\,0\,\}]$

24 $y = \dfrac{1}{x^2 + 1} + \dfrac{1}{x^3}$ $[\mathbb{R} \setminus \{\,0\,\}]$

25 $y = \sqrt{x^2 - 16}$ $[x \leqslant -4 \vee x \geqslant 4]$

26 $y = \sqrt{25 - x^2}$ $[-5 \leqslant x \leqslant 5]$

27 $y = \sqrt{x^2 - 1}$ $[x \leqslant -1 \vee x \geqslant 1]$

28 $y = \sqrt{10x - x^2}$ $[0 \leqslant x \leqslant 10]$

29 $y = \sqrt{-x^2 + x + 30}$ $[-5 \leqslant x \leqslant 6]$

30 $y = \sqrt{3x^2 - 6x + 3}$ $[\mathbb{R}]$

31 $y = \sqrt{5 - x} + \sqrt{2x + 4}$ $[-2 \leqslant x \leqslant 5]$

32 $y = \sqrt{\dfrac{x+2}{x+5}}$ $[x < -5 \vee x \geqslant -2]$

33 $y = \dfrac{\sqrt{5x - x^2}}{x - 3}$ $[0 \leqslant x \leqslant 5 \wedge x \neq 3]$

34 $y = \dfrac{1}{3x^2 + 3x} + \sqrt[3]{x}$ $[\mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}]$

35 $y = \sqrt{\dfrac{x^2 + 4}{x + 3}}$ $[x > -3]$

36 $y = \dfrac{x}{\sqrt{x - 4}}$ $[x > 4]$

37 $y = \sqrt{5 - x} + \sqrt{x - 2}$ $[2 \leqslant x \leqslant 5]$

38 $y = \sqrt{x + 2} + \sqrt{1 - x}$ $[-2 \leqslant x \leqslant 1]$

39 $y = \sqrt{\dfrac{x - 3}{x + 4}}$ $[x < -4 \vee x \geqslant 3]$

40 $y = \sqrt{1 + \dfrac{1}{x}}$ $[x \leqslant -1 \vee x > 0]$

41 $y = \dfrac{x^2 - 3x - 3}{\sqrt{16 - x^2 - 6x}}$ $[-8 < x < 2]$

42 $y = \dfrac{\sqrt{x}}{x - 1} + \dfrac{\sqrt{x - 1}}{x}$ $[x > 1]$

43 $y = \dfrac{\sqrt{x + 1}}{2x - 6}$ $[x \geqslant -1, x \neq 3]$

44 $y = \sqrt[3]{x}$ $[\mathbb{R}]$

45 $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ $[\mathbb{R} \setminus \{0\}]$

46 $y = \dfrac{3}{\sqrt{8 - 2x}}$ $[x < 4]$

47 $y = \dfrac{x^4 - 1}{x^3 + x^2 - 10x + 8}$ $[\mathbb{R} \setminus \{-4, 1, 2\}]$

48 $y = \dfrac{x + 3}{x^3 - 8x^2 + 19x - 12}$ $[\mathbb{R} \setminus \{1, 3, 4\}]$

49 $y = \sqrt{\dfrac{x^2 - 4x}{1 - x^2}}$ $[-1 < x \leqslant 0 \vee 1 < x \leqslant 4]$

50 $y = \sqrt{4x^2 - x - \dfrac{1}{2}}$ $\left[x \leqslant -\dfrac{1}{4} \vee x \geqslant \dfrac{1}{2}\right]$

51 $y = \sqrt{\dfrac{x^2 + 2x}{x - 1}}$ $[-2 \leqslant x \leqslant 0 \vee x > 1]$

52 $y = \sqrt{\dfrac{x^2 - 8}{x^2 - 4}}$ $\left[x < -2\sqrt{2} \vee -2 < x < 2 \vee x \geqslant 2\sqrt{2}\right]$

53 $y = \dfrac{\sqrt{2x^2 - 7x - 22}}{4}$ $\left[x < -2 \vee x \geqslant \dfrac{11}{2}\right]$

54 $y = \sqrt{\dfrac{x - 1}{x^2 - 4}} + \dfrac{1}{x - 2}$ $[-2 < x \leqslant 1 \vee x > 2]$

55 $y = \sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x^2 - 2} - \sqrt{3 - x^2}$ $\left[-\sqrt{3} \leqslant x \leqslant -\sqrt{2} \vee \sqrt{2} \leqslant x \leqslant \sqrt{3}\right]$

Trova il dominio delle seguenti funzioni trascendenti.

56 $y = \ln(x - 2)$ $[x > 2]$

57 $y = \dfrac{1}{\ln x}$ $[\mathbb{R} \setminus \{1\}]$

58 $y = \ln(x^2 - 5x + 6)$ $[x < 2 \vee x > 3]$

59 $y = e^{-x}$ $[\mathbb{R}]$

60 $y = e^{-\frac{1}{x^2}}$ $[\mathbb{R} \setminus \{0\}]$

61 $y = e^{\frac{x-1}{2x-4}}$ $[\mathbb{R} \setminus \{2\}]$

62 Trova il dominio della funzione rappresentata nella figura 12a (il tratteggio indica che il grafico prosegue indefinitamente).

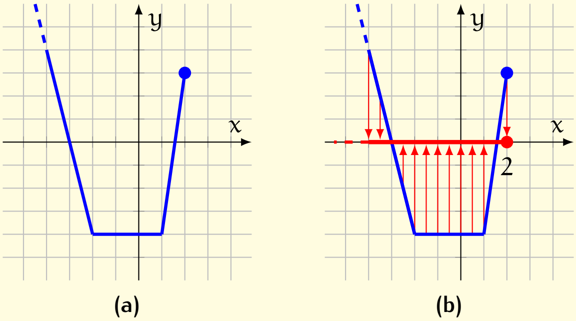


Figura 12: Lettura di un dominio sul grafico

Soluzione. Il dominio è l'insieme delle ascisse dei punti che appartengono al grafico della funzione. Per individuare il dominio per via geometrica immaginiamo di proiettare tutti i punti del grafico sull'asse x (figura 12b): otteniamo la semiretta costituita dai punti dell'asse x di ascissa minore o uguale a 2, compresa l'origine della semiretta che ha coordinate $(2, 0)$. Perciò il dominio della funzione è l'insieme

$$\operatorname{dom} f = \{\, x \leqslant 2 \,\}$$ □

63 Trova il dominio delle funzioni rappresentate nella figura 13.

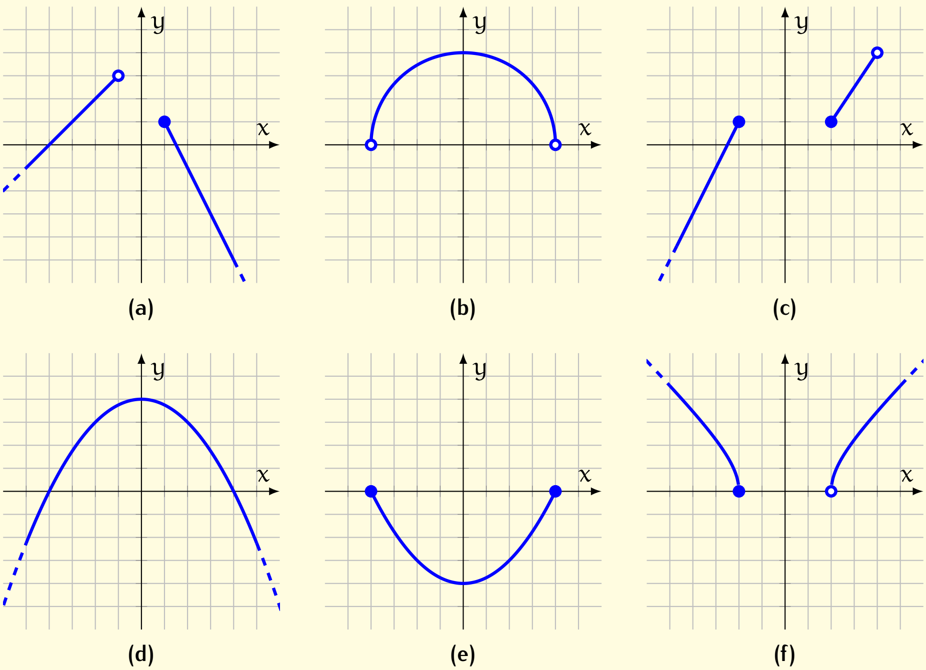


Figura 13: Lettura di domini sul grafico

Trova il dominio, i punti di intersezione con gli assi cartesiani e il segno delle seguenti funzioni:

64 $y = (x-1)(x-2)(x-3)$ $\left[\begin{array}{l}\text{dom}\, f = \mathbb{R} \\ \text{intersezioni con gli assi: } (1,0),\ (2,0),\ (3,0),\ (0,-6) \\ \text{è positiva per } 1 < x < 2 \vee x > 3\end{array}\right]$

65 $y = (x-1)(x-2)(3-x)$ $\left[\begin{array}{l}\text{dom}\, f = \mathbb{R} \\ \text{intersezioni con gli assi: } (1,0),\ (2,0),\ (3,0),\ (0,6) \\ \text{è positiva per } x < 1 \vee 2 < x < 3\end{array}\right]$

66 $y = x^3 + 10x^2 - 11x$ $\left[\begin{array}{l}\text{dom}\, f = \mathbb{R} \\ \text{intersezioni con gli assi: } (-11,0),\ (0,0),\ (1,0) \\ \text{è positiva per } -11 < x < 0 \vee x > 1\end{array}\right]$

67 $y = 4x^3 - x^2 - 14x$ $\left[\begin{array}{l}\text{dom}\, f = \mathbb{R} \\ \text{intersezioni con gli assi: } \left(-\frac{7}{4}, 0\right),\ (0,0),\ (2,0) \\ \text{è positiva per } -\frac{7}{4} < x < 0 \vee x > 2\end{array}\right]$

68 $y = x^4 - 5x^2 + 4$ $\left[\begin{array}{l}\text{dom}\, f = \mathbb{R} \\ \text{intersezioni con gli assi: } (\pm 1,0),\ (\pm 2,0),\ (0,4) \\ \text{è positiva per } x < -2 \vee -1 < x < 1 \vee x > 2\end{array}\right]$

69 $y = x^4 - \frac{5}{4}x^2 + \frac{1}{4}$ $\left[\begin{array}{l}\text{dom}\, f = \mathbb{R} \\ \text{intersezioni con gli assi: } \left(\pm\frac{1}{2}, 0\right),\ (\pm 1,0),\ \left(0, \frac{1}{4}\right) \\ \text{è positiva per } x < -1 \vee -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \vee x > 1\end{array}\right]$

70 $y = x^5 - x^3$ $\left[\begin{array}{l}\text{dom}\, f = \mathbb{R} \\ \text{intersezioni con gli assi: } (0,0),\ (\pm 1,0) \\ \text{è positiva per } -1 < x < 0 \vee x > 1\end{array}\right]$

71 $y = \dfrac{x}{x^2 + 4x - 5}$ $\left[\begin{array}{l}\text{dom}\, f = \mathbb{R} \setminus \{-5, 1\} \\ \text{intersezioni con gli assi: } (0,0) \\ \text{è positiva per } -5 < x < 0 \vee x > 1\end{array}\right]$

72 $y = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 4}$ $\left[\begin{array}{l}\text{dom}\, f = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\} \\ \text{intersezioni con gli assi: } (-1,0),\ (3,0),\ \left(0, \frac{3}{4}\right) \\ \text{è positiva per } x < -2 \vee -1 < x < 2 \vee x > 3\end{array}\right]$

73 $y = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x - 2}$ $\left[\begin{array}{l}\text{dom}\, f = \mathbb{R} \setminus \{2\} \\ \text{intersezioni con gli assi: } (-3,0),\ (1,0),\ \left(0, \frac{3}{2}\right) \\ \text{è positiva per } -3 < x < 1 \vee x > 2\end{array}\right]$

74 $y = \dfrac{x+1}{x^3}$ $\left[\begin{array}{l}\text{dom}\, f = \{x \neq 0\} \\ \text{intersezioni con gli assi: } (-1,0) \\ \text{positiva per } x < -1 \vee x > 0\end{array}\right]$

75 $y = \dfrac{x}{x^2 - 4}$ $\left[\begin{array}{l}\text{dom}\, f = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\} \\ \text{intersezioni con gli assi: } (0,0) \\ \text{è positiva per } -2 < x < 0 \vee x > 2\end{array}\right]$

76 $y = \dfrac{x-1}{x^2+x+1}$ $\left[\begin{array}{l}\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \\ \text{intersezioni con gli assi: } (1,0),\ (0,-1) \\ \text{è positiva per } x > 1\end{array}\right]$

77 $y = \dfrac{x^2+x+1}{x-1}$ $\left[\begin{array}{l}\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{1\} \\ \text{intersezioni con gli assi: } (0,-1) \\ \text{è positiva per } x > 1\end{array}\right]$

78 $y = \dfrac{x^2-10x+21}{x-5}$ $\left[\begin{array}{l}\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{5\} \\ \text{intersezioni con gli assi: } (3,0),\ (7,0),\ \left(0, -\dfrac{21}{5}\right) \\ \text{è positiva per } 3 < x < 5 \vee x > 7\end{array}\right]$

79 $y = \dfrac{x^2+x+1}{x^2-1}$ $\left[\begin{array}{l}\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\} \\ \text{intersezioni con gli assi: } (0,-1) \\ \text{è positiva per } x < -1 \vee x > 1\end{array}\right]$

80 $y = \dfrac{12x-3x^2}{x^2-2x+1}$ $\left[\begin{array}{l}\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{1\} \\ \text{intersezioni con gli assi: } (0,0),\ (4,0) \\ \text{è positiva per } 0 < x < 1 \vee 1 < x < 4\end{array}\right]$

81 $y = \dfrac{x^2+3x+2}{x^2-3x+2}$ $\left[\begin{array}{l}\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{1,2\} \\ \text{intersezioni con gli assi: } (-2,0),\ (-1,0),\ (0,1) \\ \text{è positiva per } x < -2 \vee -1 < x < 1 \vee x > 2\end{array}\right]$

82 $y = \dfrac{x^2-4x+4}{x^2-1}$ $\left[\begin{array}{l}\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\} \\ \text{intersezioni con gli assi: } (2,0),\ (0,-4) \\ \text{è positiva per } x < -1 \vee x > 1\end{array}\right]$

83 $y = \dfrac{x^2-4x+3}{x^2-6x+8}$ $\left[\begin{array}{l}\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{2,4\} \\ \text{intersezioni con gli assi: } (1,0),\ (3,0),\ \left(0, \dfrac{3}{8}\right) \\ \text{è positiva per } x < 1 \vee 2 < x < 3 \vee x > 4\end{array}\right]$

84 $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-x}$ $\left[\begin{array}{l}\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0,1\} \\ \text{non interseca gli assi} \\ \text{è positiva per } x < 0 \vee x > 1\end{array}\right]$

85 $y = \dfrac{x}{x^3-1}$ $\left[\begin{array}{l}\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ \text{intersezioni con gli assi: } (0,0) \\ \text{è positiva per } x < 0 \vee x > 1\end{array}\right]$

86 $y = \dfrac{x^3}{x^2+x+1}$ $\left[\begin{array}{l}\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \\ \text{intersezioni con gli assi: } (0,0) \\ \text{è positiva per } x > 0\end{array}\right]$

87 $y = \dfrac{2x+3}{x^2-2x-3}$ $\left[\begin{array}{l}\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{-1,3\} \\ \text{intersezioni con gli assi: } \left(-\dfrac{3}{2}, 0\right),\ (0,-1) \\ \text{è positiva per } -\dfrac{3}{2} < x < -1 \vee x > 3\end{array}\right]$

88 $y = \dfrac{x \cdot \sqrt{x^2-1}}{x-2}$ $\left[\begin{array}{l}\operatorname{dom} f = \{x \leqslant -1 \vee 1 \leqslant x < 2 \vee x > 2\} \\ \text{intersezioni con gli assi: } (\pm 1, 0) \\ \text{positiva per } x < -1 \vee x > 2\end{array}\right]$

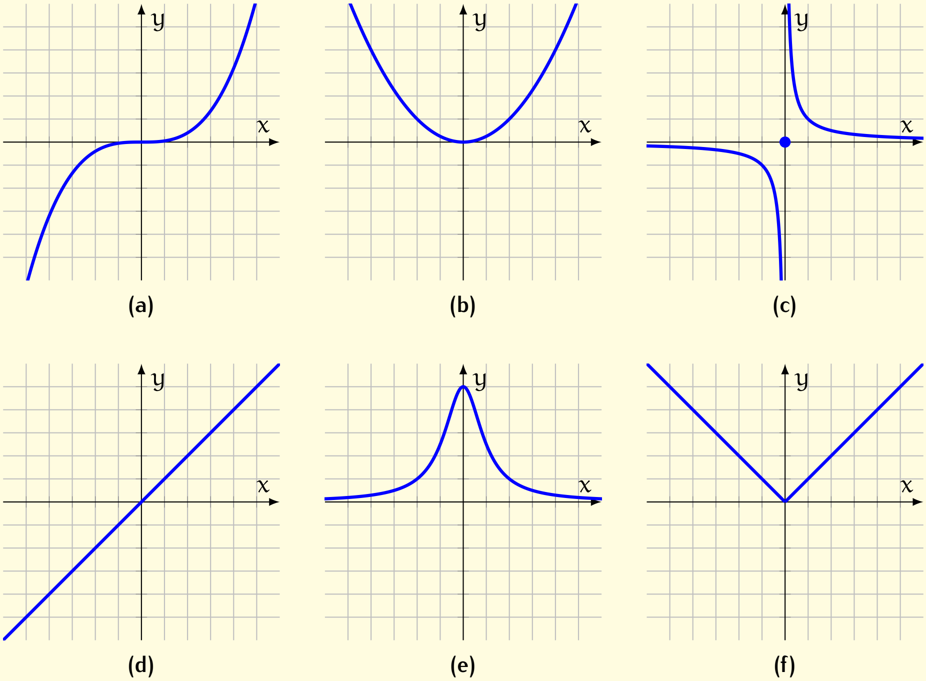


Figura 14: Funzioni pari e dispari

89 $y = \sqrt{\dfrac{x}{4-x}}$ $\left[\begin{array}{l}\text{dom } f = \{0 \leqslant x < 4\} \\ \text{passa per l'origine} \\ \text{è positiva per } 0 < x < 4\end{array}\right]$

90 Le funzioni seguenti sono pari, dispari o né pari né dispari?

a. $y = \dfrac{x}{x^2+1}$ **c.** $y = \dfrac{x^2+4}{x^2+1}$ **e.** $y = \dfrac{2x}{x^4-1}$ **g.** $y = \dfrac{1}{x^2-x}$

b. $y = x^8 - x^5$ **d.** $y = x^8 - x^6$ **f.** $y = x^5 - x^3$ **h.** $y = x^4$

[Tre funzioni pari, tre dispari, due né pari né dispari]

91 Le funzioni che hanno i grafici riportati nella figura 14 sono pari o dispari?

92 In riferimento al grafico della funzione f rappresentato nella figura 15, rispondi alle seguenti domande.

- Qual è il dominio di f?
- Quanto vale $f(-4)$? E $f(4)$?
- Per quali valori f si annulla?
- In quali punti f interseca gli assi?
- $f(2)$ è positivo o negativo? E $f(-2)$?
- La funzione è pari? È dispari?

93 Indica la risposta corretta.

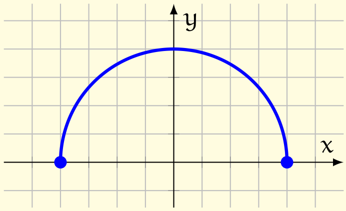


Figura 15: Una funzione

a. La funzione $y = \dfrac{x+2}{x-2}$ è definita:

- $\boxed{\text{A}}$ $\forall x \in \mathbb{R}$
- $\boxed{\text{B}}$ $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 2$
- $\boxed{\text{C}}$ per nessun valore di x
- $\boxed{\text{D}}$ per ogni valore di x, tranne $x = -2$

b. Data la funzione $y = x^4 + x^2 + 1$ si può affermare che:

- $\boxed{\text{A}}$ la variabile indipendente è y
- $\boxed{\text{B}}$ la funzione è intera di sesto grado
- $\boxed{\text{C}}$ $y = (x^2+1)^2$
- $\boxed{\text{D}}$ la funzione è sempre definita

c. La funzione $y = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ è definita:

- $\boxed{\text{A}}$ per tutti i valori di x diversi da ± 1
- $\boxed{\text{B}}$ $\forall x \in \mathbb{R}$
- $\boxed{\text{C}}$ $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0$
- $\boxed{\text{D}}$ solo per $x > -1$

d. Quale delle seguenti rappresenta una funzione f tale che $f(-2) = 3$ e $f(3) = -2$?

- $\boxed{\text{A}}$ $y = -x + 1$
- $\boxed{\text{B}}$ $y = x + 5$
- $\boxed{\text{C}}$ $y = x - 5$
- $\boxed{\text{D}}$ $y = -2x - 1$

e. La funzione $y = \dfrac{x+2}{\log(x-1)}$ è definita per:

- $\boxed{\text{A}}$ $1 < x \leqslant 2$
- $\boxed{\text{B}}$ $x > 1$ con $x \neq 2$
- $\boxed{\text{C}}$ $x \geqslant 1$ con $x \neq 2$
- $\boxed{\text{D}}$ $x > 1$

f. Data la funzione $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}$ il suo dominio è:

- $\boxed{\text{A}}$ $0 \leqslant x \leqslant 1$
- $\boxed{\text{B}}$ $x \leqslant 0 \vee x \geqslant 1$
- $\boxed{\text{C}}$ $0 \leqslant x < 1$
- $\boxed{\text{D}}$ $x \geqslant 0$

g. Data la funzione $f(x+1) = \dfrac{2 \cdot f(x) + 2}{2}$ e $f(1) = 2$ quanto vale $f(2)$?

A 0 B 1 C 2 D 3

h. Il dominio di $f(x) = \dfrac{\ln(e^x - 1)}{\sqrt{x-2}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x-3}}$ è:

A $x > 2$ B $x < 0 \vee x > 2$ C $x > 2$ e $x \neq 3$ D $x > 3$

i. Data la funzione $y = \dfrac{2x}{x^2+1}$ si può affermare che:

A per $x = -1$ non è definita

C per $x = 5$ è definita

B per $x = 0$ non è definita

D è definita solo per $x = \pm 1$

j. Indica fra le seguenti l'affermazione *errata*:

A la funzione $y = \log(x^2+1)$ è definita $\forall x \in \mathbb{R}$

B la funzione $y = x^2 - 3$ è definita ovunque

C la funzione $y = \dfrac{x}{x-7}$ non è definita per $x = 8$

D la funzione $y = \sqrt{4 - x^2}$ non è definita per $x = 3$

[Una risposta A, tre B, quattro C e due D]

94 Indica la risposta corretta.

a. Data la funzione $y = \sqrt{x^2 + 2x - 15}$ indica quale affermazione è vera:

A è definita per $x \leqslant -5 \vee x \geqslant 3$

C è definita solo per $x \geqslant 3$

B è definita per $-5 \leqslant x \leqslant 3$

D nessuna delle precedenti

b. Data la funzione $y = \log(x^2 + x - 12)$ indica l'affermazione *falsa*:

A per $x = 4$ non è definita

C per $x = 3$ non è definita

B per $x = -4$ non è definita

D per $x = -5$ è definita

c. Data la funzione $y = \log \dfrac{5x}{x^2+1}$ indica quale affermazione è vera:

A il suo dominio è $x > 0$

C il suo dominio è $\mathbb{R}$

B il suo dominio è $x \leqslant 0$

D per $x = 0$ vale $y = 0$

d. La funzione $f(x) = 2 - \ln x$ è positiva nell'intervallo

A $(0, e^2)$ B $(-\infty, 2)$ C $(0, +\infty)$ D $(e^2, +\infty)$

e. Data la funzione $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^3}$, il suo dominio è:

A $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ C $\{x < 1 \vee x > 3\}$

B $\mathbb{R}$ D $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

f. Per trovare il dominio di quale tra le seguenti funzioni si risolve la disequazione $A(x) \geqslant 0$?

A $y = \dfrac{1}{\sqrt{A(x)}}$ B $\sqrt[3]{A(x)}$ C $y = \ln A(x)$ D $y = \sqrt{A(x)}$

g. Il dominio della funzione $y = x\sqrt{9 - x^2}$ è:

A $(-3, 3)$ B $[-3, 3]$ C $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ D $(-\infty, 3]$

h. Il dominio della funzione $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 5x}}$ è:

A $\mathbb{R}$ C $x > 0$

B $x < -5 \vee x > 0$ D $x \leqslant -5 \vee x \geqslant 0$

i. La funzione $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2+4}$ interseca l'asse delle ascisse nel punto:

A $(0, -3)$ B $(2, 0)$ C $(-3, 0)$ D $(3, 0)$

j. Il dominio della funzione $y = \dfrac{x-4}{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}$ è:

A $\mathbb{R}$ C $\mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$

B $\{x < 2 \vee x > 3\}$ D $\{2 < x < 3\}$

[Cinque risposte A, tre B, una C e una D]

95 Vero o falso?

a. La funzione $y = 2^x$ è pari. V F

b. La funzione $y = \dfrac{2}{x}$ è dispari. V F

c. Una funzione che non è pari è dispari. V F

d. Una funzione pari è simmetrica rispetto all'asse y. V F

e. Una funzione dispari è simmetrica rispetto all'asse x. V F

[2 affermazioni vere e 3 false]

96 Indica la risposta corretta.

a. La funzione $y = 9 - x^2$:

- A è sempre definita
- B passa per l'origine degli assi
- C è sempre positiva
- D non è definita per $x = 3$

b. La funzione $y = 3x - 6$ si annulla per:

- A $x = -2$
- B $x = 0$
- C $x = 2$
- D $x = 4$

c. Quale tra le seguenti funzioni è pari?

- A $y = 2x - 4$
- B $y = 4/x$
- C $y = 10^x$
- D $y = \sqrt{3 - x^2}$

d. Quale tra le seguenti funzioni è dispari?

- A $y = 3x - 3$
- B $y = 4/x$
- C $y = 9^x$
- D $y = \sqrt{3 - x^2}$

e. Quale tra le seguenti affermazioni è *falsa*?

- A Una funzione o è pari o è dispari.
- B Ci sono funzioni simmetriche rispetto all'asse y.
- C Ci sono funzioni simmetriche rispetto all'origine.
- D Ci sono funzioni né pari né dispari.

f. Quale tra le seguenti funzioni non interseca mai gli assi cartesiani?

- A $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$
- B $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 + x}$
- C $y = \dfrac{x}{x^2 + 1}$
- D $y = \dfrac{x - 1}{x^2 + x}$

g. Quale tra le seguenti funzioni ha come dominio $\mathbb{R}$?

- A $y = \log(x^2)$
- B $y = \sqrt{x + 1}$
- C $y = \sqrt{x^2 + x}$
- D $y = \sqrt{x^2 + 1}$

[Due risposte A, due B, una C e due D]

97 La funzione $y = f(x) = x^2 - 4x + 3$ è iniettiva?

Soluzione. Poiché

$$f(x) = x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3) \quad \Longrightarrow \quad f(1) = f(3) = 0$$

ci sono due valori distinti del dominio (1 e 3) che hanno la stessa immagine (0): la funzione non è iniettiva. □

98 La funzione $y = f(x) = x^2$ è suriettiva?

Soluzione. Poiché $x^2 \geqslant 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, non esiste alcun x tale che $f(x) = -1$: la funzione non è suriettiva. □

2 LIMITI

Questo capitolo introduce un concetto fondamentale dell'analisi, quello di *limite*. Cominceremo ad analizzare questa nozione attraverso alcuni esempi, in cui ci familiarizzeremo con l'idea di limite a livello intuitivo.

2.1 CONCETTO DI LIMITE

Esempi introduttivi

Limite finito quando x tende a un valore finito

Data la funzione $y = \dfrac{x^2-9}{x-3}$ studiamo il suo comportamento quando x assume valori sempre più vicini a 3.

ANALISI NUMERICA La funzione non è definita per $x = 3$, ma possiamo calcolare i valori di y per valori di x vicini a 3. Attribuendo per esempio a x i valori indicati in tabella, con l'aiuto di una calcolatrice otteniamo i valori approssimati di y riportati.

x	2,9	2,99	2,999	3	3,001	3,01	3,1
y	5,9	5,99	5,999	non definita	6,001	6,01	6,1

$$\longrightarrow 6 \longleftarrow$$

Vediamo che quando la variabile x assume valori sempre più vicini a 3, i corrispondenti valori di y si avvicinano sempre più a 6. Per esprimere questo comportamento della funzione in prossimità del valore $x = 3$ scriviamo

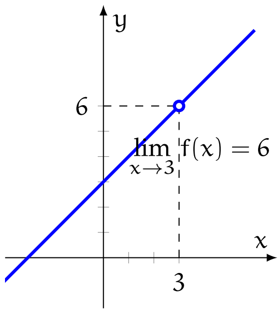
$$\lim_{x \to 3} f(x) = 6$$

che si legge «il limite di $f(x)$ per x che tende a 3 è 6».

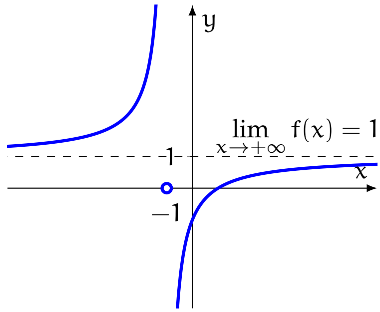
INTERPRETAZIONE GRAFICA Si può avere conferma di questo comportamento della funzione per x vicino a 3 anche tracciando il suo grafico, perché

$$f(x) = \frac{x^2-9}{x-3} = \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = x+3 \quad \text{per } x \neq 3$$

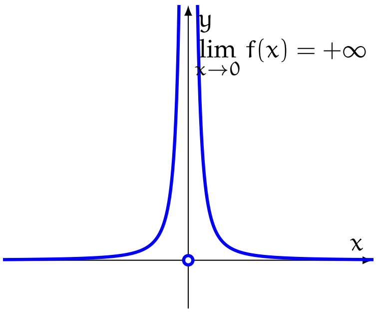
Il grafico della funzione è una retta, privata del punto di ascissa 3 (figura 16a).



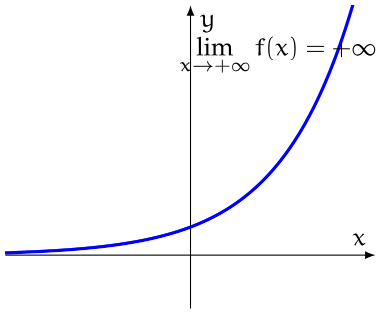
(a) Limite finito quando x tende a un valore finito



(b) Limite finito quando x tende a infinito



(c) Limite infinito quando x tende a un valore finito



(d) Limite infinito quando x tende a infinito

Figura 16: Esempi di limiti

Limite finito quando x tende a infinito

Data la funzione $y = \dfrac{x-1}{x+1}$ studiamo il suo comportamento quando x assume valori positivi via via sempre più grandi.

ANALISI NUMERICA Attribuendo a x i valori indicati nella tabella seguente, con l'aiuto di una calcolatrice otteniamo i valori approssimati di y riportati.

x	100	200	300	400	500	1000	10 000
y	0,980	0,990	0,993	0,995	0,996	0,998	0,999

$$\longrightarrow \quad 1$$

Vediamo così che quando la variabile x assume valori positivi sempre più grandi (si dice «tendenti a più infinito»), i corrispondenti valori di y si avvicinano sempre più a 1. Per esprimere questo comportamento della funzione scriviamo

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$$

che si legge «il limite della funzione $f(x)$ per x che tende a più infinito è 1».

INTERPRETAZIONE GRAFICA Il grafico della funzione $y = f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ ha la retta $y = 1$ come *asintoto orizzontale* (vedi la figura 16b e il paragrafo 2.4).

Limite infinito quando x tende a un valore finito

Data la funzione $y = f(x) = 1/x^2$ studiamo il suo comportamento quando x assume valori sempre più vicini a 0.

ANALISI NUMERICA La funzione non è definita per $x = 0$, ma possiamo calcolare i valori di y quando x si avvicina a 0. Attribuendo per esempio a x i valori indicati nella tabella seguente, otteniamo i valori approssimati di y riportati.

x	$-0{,}1$	$-0{,}01$	$-0{,}001$	0	$0{,}001$	$0{,}01$	$0{,}1$
y	100	10 000	1 000 000	non definita	1 000 000	10 000	100

i valori di y
diventano sempre più grandi

Vediamo così che quando x assume valori sempre più vicini a 0, i corrispondenti valori di y diventano sempre più grandi, cioè «tendono a più infinito». Scriveremo

$$\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$$

che si legge «il limite di $f(x)$ per x che tende a 0 è più infinito».

INTERPRETAZIONE GRAFICA Il grafico della funzione $y = f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ ha l'asse y come *asintoto verticale* (vedi la figura 16c e il paragrafo 2.4).

Limite infinito quando x tende a infinito

Data la funzione $y = f(x) = 2^x$ studiamo il suo comportamento quando x assume valori positivi via via sempre più grandi.

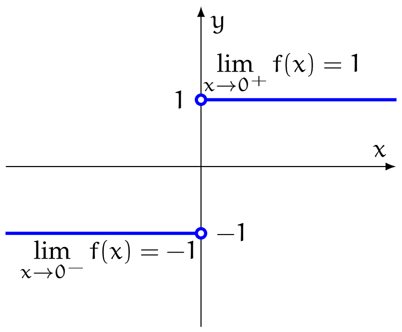


Figura 17: Limite destro e limite sinistro

ANALISI NUMERICA Attribuendo per esempio a x i valori indicati nella tabella seguente, otteniamo i valori approssimati di y riportati.

x	10	15	20	25
y	1024	32 768	1 048 576	33 554 432

i valori di y diventano sempre più grandi

Vediamo così che quando la variabile x assume valori positivi via via più grandi («tendenti a più infinito»), anche i corrispondenti valori di y diventano sempre più grandi (cioè tendono anch'essi a più infinito). Scriveremo allora

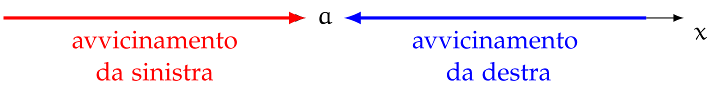
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

che si legge «il limite di $f(x)$ per x che tende a più infinito è più infinito».

INTERPRETAZIONE GRAFICA La funzione esaminata è una funzione esponenziale che al crescere di x assume valori che tendono a $+\infty$ (figura 16d).

Limite destro e limite sinistro

Il limite di una funzione per $x \to a \in \mathbb{R}$ è l se $f(x)$ tende a l sia quando x si avvicina ad a per valori maggiori di a (cioè «da destra» rispetto ad a) sia quando x si avvicina ad a per valori minori di a (cioè «da sinistra» rispetto ad a).



A volte il comportamento della funzione a destra di a è diverso dal comportamento a sinistra di a. Per indagare queste situazioni si parla di *limite destro* e di *limite sinistro* e si scrive:

- $\lim_{x \to a^+} f(x)$ indica il limite *destro*
- $\lim_{x \to a^-} f(x)$ indica il limite *sinistro*

Per esempio, consideriamo la seguente funzione (chiamata anche *segno* di x):

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

La funzione *non* è definita per $x = 0$. La figura 17 mostra il grafico della funzione:

- per $x > 0$ abbiamo che $f(x) = 1$, quindi $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$
- per $x < 0$ abbiamo che $f(x) = -1$, quindi $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$

Non c'è invece il limite dalla funzione per $x \to 0$, perché i due limiti destro e sinistro sono diversi tra loro. Il limite di una funzione per $x \to a$, con $a \in \mathbb{R}$, esiste se e solo se i due limiti, destro e sinistro, esistono e sono uguali.

Definizione di limite

Gli esempi precedenti spiegano il concetto di limite, di cui diamo la seguente definizione intuitiva.

Definizione 10. Data una funzione $f(x)$, supponiamo che a e l siano due numeri, oppure $+\infty$ o $-\infty$. Il **limite** della funzione $f(x)$ per x che tende ad a è l, in formule

$$\lim_{x \to a} f(x) = l$$

se $f(x)$ assume valori vicini quanto si vuole a l tutte le volte che i valori di x sono abbastanza vicini ad a (tranne il punto $x = a$, dove la funzione può non essere definita).

2.2 CALCOLO DEI LIMITI

Nel paragrafo precedente abbiamo introdotto e definito il concetto di limite. Il problema che ci poniamo adesso è invece quello del *calcolo* dei limiti.

Limiti di alcune funzioni elementari

In base alla definizione di limite, si può dimostrare che valgono i limiti riassunti nella tabella 1.

Tabella 1: Limiti di alcune funzioni elementari (a è un numero reale)

$\lim_{x \to a} x^n = a^n$	per ogni n intero
$\lim_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$	
$\lim_{x \to a} \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{a}$	
$\lim_{x \to a} 2^x = 2^a$	
$\lim_{x \to a} \log x = \log a$	

Risultati analoghi valgono per le radici di indice (intero positivo) qualsiasi, e per le funzioni esponenziali e logaritmiche di base qualsiasi (purché > 0 e $\neq 1$).

Nel caso delle funzioni elementari il calcolo del limite per $x \to a$, con $a \in \mathbb{R}$ appartenente al dominio della funzione, si riduce quindi a effettuare una semplice *sostituzione*. Per esempio:

$$\lim_{x \to 3} x^2 = 3^2 = 9$$

Le figure 18 e 19 mostrano i limiti di alcune importanti funzioni elementari *agli estremi del loro dominio*. Per esempio:

$$\lim_{x \to \pm\infty} x^3 = \pm\infty \qquad \lim_{x \to \pm\infty} x^4 = +\infty$$

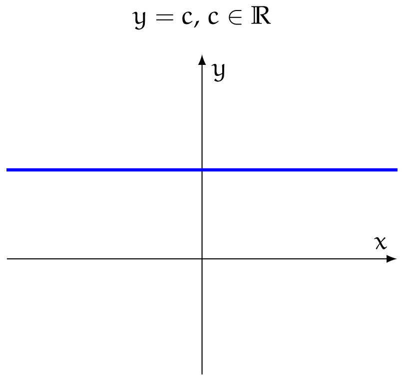
Algebra dei limiti

A partire dai limiti mostrati nella tabella 1, si possono calcolare i limiti di funzioni più complicate? Per esempio, sappiamo che $\lim_{x \to 2} x^2 = 4$ e che $\lim_{x \to 2} x^3 = 8$; possiamo dire che $\lim_{x \to 2}(x^2 + x^3) = 12$ è la loro somma?

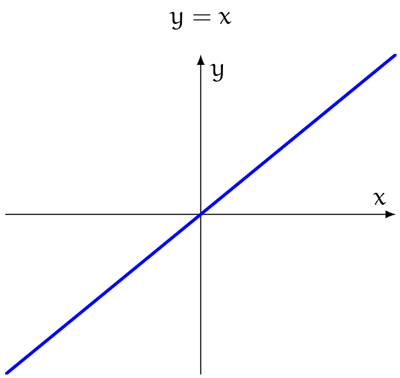
In altre parole, vogliamo studiare il comportamento dell'operazione di limite rispetto alle operazioni tra funzioni. Cominciamo dal caso più semplice, in cui i limiti delle funzioni in gioco sono *finiti*.

Regole di calcolo nel caso in cui i due limiti sono finiti

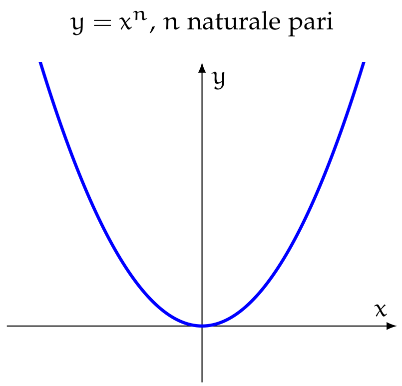
Se due funzioni f e g hanno limiti *finiti* per $x \to a$, l'operazione di limite si comporta «bene» rispetto alle ordinarie operazioni.



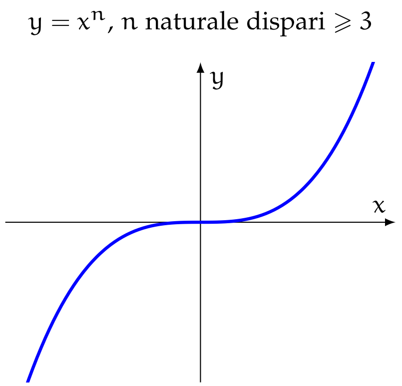
(a) $\lim_{x \to -\infty} c = c \qquad \lim_{x \to +\infty} c = c$



(b) $\lim_{x \to -\infty} x = -\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} x = +\infty$



(c) $\lim_{x \to -\infty} x^n = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$



(d) $\lim_{x \to -\infty} x^n = -\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$

Figura 18: Limiti della funzione costante e delle funzioni potenza agli estremi del dominio

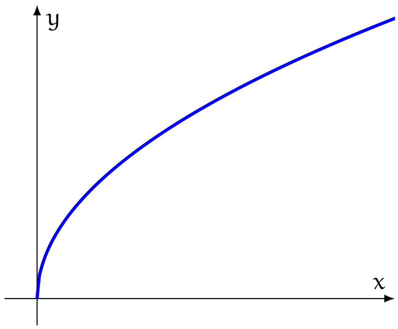
Proposizione 3. Supponiamo che le funzioni f e g siano entrambe definite vicino ad a (numero reale o $\pm\infty$), eccetto al più a, e che sia

$$\lim_{x \to a} f(x) = l_1 \qquad \lim_{x \to a} g(x) = l_2$$

dove l_1, l_2 sono numeri reali. Allora risulta:

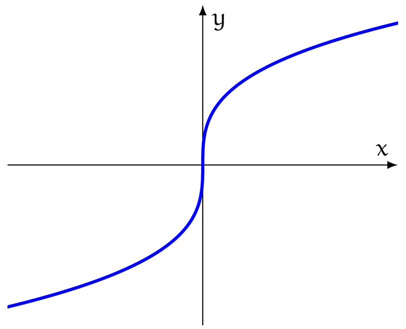
- $\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = l_1 \pm l_2$
- $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{l_1}{l_2}$, se $l_2 \neq 0$
- $\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = l_1 \cdot l_2$
- $\lim_{x \to a} \left[c \cdot f(x)\right] = c \cdot l_1$, per ogni $c \in \mathbb{R}$

$y = \sqrt{x}$



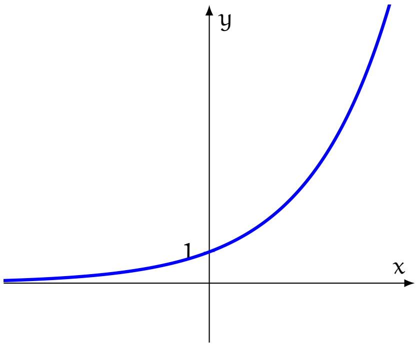
(a) $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

$y = \sqrt[3]{x}$



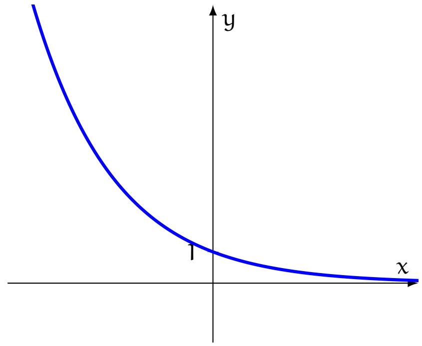
(b) $\lim_{x \to -\infty} \sqrt[3]{x} = -\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x} = +\infty$

$y = 2^x$



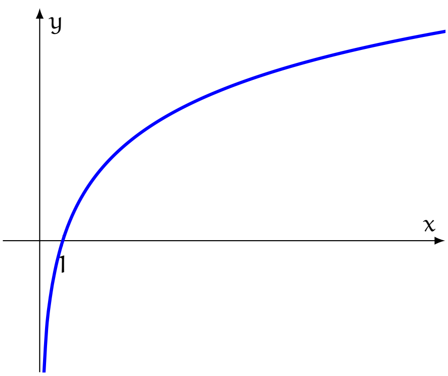
(c) $\lim_{x \to -\infty} 2^x = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} 2^x = +\infty$

$y = (1/2)^x$



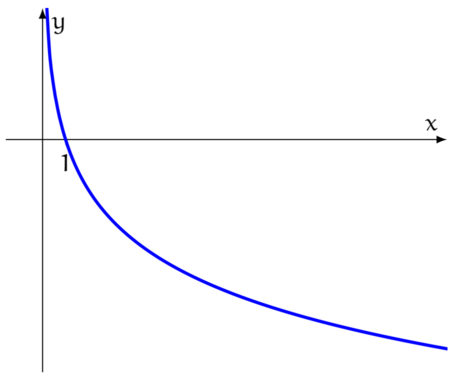
(d) $\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$

$y = \log_2 x$



(e) $\lim_{x \to 0^+} \log_2 x = -\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \log_2 x = +\infty$

$y = \log_{\frac{1}{2}} x$



(f) $\lim_{x \to 0^+} \log_{\frac{1}{2}} x = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \log_{\frac{1}{2}} x = -\infty$

Figura 19: Limiti di alcune funzioni elementari agli estremi del dominio

Esercizio 31. Calcola il limite $\lim_{x\to 2}(x^2+x^3)$.

Soluzione.
$$\lim_{x\to 2}(x^2+x^3) = \lim_{x\to 2}x^2 + \lim_{x\to 2}x^3 = 4+8 = 12$$
□

Esercizio 32. Calcola il limite $\lim_{x\to 3} 2x$.

Soluzione.
$$\lim_{x\to 3} 2x = 2\cdot\lim_{x\to 3} x = 2\cdot 3 = 6$$
□

Regole di calcolo nel caso in cui uno dei due limiti è infinito

La proposizione 3 non contempla i casi in cui uno dei due limiti l_1 o l_2 sia infinito, o se $l_2 = 0$ nel limite del quoziente tra $f(x)$ e $g(x)$. Valgono i risultati seguenti (a è un numero reale oppure ∞, che indica genericamente $+\infty$ oppure $-\infty$).

Tabella 2: Regole per la somma

Se $\lim_{x\to a} f(x)$ è	e $\lim_{x\to a} g(x)$ è	allora $\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)]$ è
$l\in\mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$
$l\in\mathbb{R}$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$

Tabella 3: Regole per il prodotto

Se $\lim_{x\to a} f(x)$ è	e $\lim_{x\to a} g(x)$ è	allora $\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]$ è
$l\in\mathbb{R}$ con $l\neq 0$	∞	∞
∞	∞	∞

Tabella 4: Regole per il quoziente

Se $\lim_{x\to a} f(x)$ è	e $\lim_{x\to a} g(x)$ è	allora $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ è
$l\in\mathbb{R}$	∞	0
$l\in\mathbb{R}$ con $l\neq 0$	0	∞
∞	$l\in\mathbb{R}$	∞

Nelle tabelle 3 e 4 il segno del limite del prodotto e del quoziente si trova con la consueta regola dei segni, tenendo conto che si attribuisce un segno anche a 0: lo 0 è considerato *positivo*, e indicato con 0^+, se una funzione tende a 0 *per eccesso*, cioè assumendo valori positivi, mentre è considerato *negativo*, e indicato con 0^-, se una funzione tende a 0 *per difetto*, cioè assumendo valori negativi. Per esempio:

$$\frac{2}{0^+} = +\infty \qquad \frac{+\infty}{0^-} = -\infty \qquad \frac{-\infty}{0^-} = +\infty$$

I casi esclusi dalla proposizione 3 e dalle tabelle precedenti sono chiamati *forme di indecisione* (o *forme indeterminate*) e si possono sintetizzare con le scritture compatte:

$$+\infty - \infty \qquad 0 \cdot \infty \qquad \infty/\infty \qquad 0/0$$

Si parla di forme di indecisione perché non si può stabilire una volta per tutte se il limite esista, sia finito o infinito, ma bisogna procedere caso per caso, in quanto il risultato dipende dalle particolari funzioni implicate.

Esercizio 33. Calcola $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2}$.

Soluzione.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{+\infty} = 0 \qquad \square$$

Esercizio 34. Calcola $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \left(x + \frac{1}{x-1}\right)$.

Soluzione. Tenendo conto che quando $x \to 1^+$ si ha che $x - 1 \to 0^+$ si ha:

$$\lim_{x\to 1^+} \left(x + \frac{1}{x-1}\right) = 1 + \frac{1}{0^+} = 1 + \infty = +\infty \qquad \square$$

Forme di indecisione di funzioni algebriche

Questo paragrafo presenta le più comuni forme di indecisione che si incontrano quando si lavora con funzioni *algebriche* intere e fratte.

Limiti di funzioni intere

Le funzioni intere sono definite in tutto $\mathbb{R}$, quindi si possono avere forme di indecisione solo nel calcolo dei limiti per $x \to \pm\infty$. In questo caso, si può avere una forma di indecisione del tipo $+\infty - \infty$. Per esempio, capita se si vuole calcolare:

$$\lim_{x\to+\infty} (x^3 - 3x)$$

La soluzione di questa forma di indecisione si basa sul seguente ragionamento. Raccogliendo x^3 si ha che:

$$\lim_{x \to +\infty} \left[x^3 \left(1 - \frac{3}{x^2} \right) \right]$$

Il termine dopo 1 dentro le parentesi tonde tende a 0 per $x \to +\infty$, quindi il fattore tra parentesi tende a 1. Ne segue che

$$\lim_{x \to +\infty} (x^3 - 3x) = \lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$$

Questo ragionamento può ripetersi similmente per qualsiasi polinomio; possiamo quindi concludere che: *per calcolare il limite di un polinomio per* $x \to \pm\infty$ *basta calcolare il limite del suo termine di grado massimo.*

Esercizio 35. Calcola $\lim_{x \to +\infty} (x^2 - 4x + 3)$.

Soluzione.

$$\lim_{x \to +\infty} (x^2 - 4x + 3) = \lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty \qquad \square$$

Esercizio 36. Calcola $\lim_{x \to -\infty} (x^4 - 2x^2)$.

Soluzione.

$$\lim_{x \to -\infty} (x^4 - 2x^2) = \lim_{x \to -\infty} x^4 = +\infty \qquad \square$$

Esercizio 37. Calcola $\lim_{x \to -\infty} (x^3 + x^2 + x + 1)$.

Soluzione.

$$\lim_{x \to -\infty} (x^3 + x^2 + x + 1) = \lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty \qquad \square$$

Funzioni fratte

Consideriamo ora una funzione fratta, cioè una funzione del tipo

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

dove P e Q sono polinomi. Le funzioni fratte hanno come dominio l'insieme $\mathbb{R}$ *privato* dei valori di x che annullano il denominatore. Nel calcolo dei limiti di queste funzioni si possono trovare due forme di indecisione: ∞/∞ nel calcolo dei limiti per $x \to \pm\infty$ oppure $0/0$ nel calcolo dei limiti per $x \to a$, dove $a \in R$ è un punto in cui la funzione non è definita. Analizziamo separatamente i due casi.

FORME DI INDECISIONE DEL TIPO ∞/∞ Per esempio, consideriamo il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x-4}{x-1}$$

Sia il numeratore che il denominatore tendono a $+\infty$ per $x \to +\infty$, quindi il limite ha la forma indeterminata ∞/∞. La soluzione della forma di indecisione si basa sul seguente ragionamento. Raccogliamo anzitutto al numeratore e al denominatore i termini di grado massimo:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x-4}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x\left(1-\frac{2}{x}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}$$

L'addendo dopo 1, sia all'interno delle parentesi al numeratore che all'interno delle parentesi al denominatore, tende a 0 per $x \to +\infty$, quindi i due fattori tra parentesi tendono a 1. Ne segue che:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x-4}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x} = \lim_{x\to+\infty} 2 = 2$$

Un ragionamento simile può ripetersi per tutti i limiti di funzioni fratte nella forma ∞/∞. *Per calcolare il limite del rapporto tra due polinomi per $x \to \pm\infty$ basta calcolare il limite del rapporto dei loro termini di grado massimo.*

Esercizio 38. Calcola $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x-1}$.

Soluzione.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$ □

Esercizio 39. Calcola $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2-1}$.

Soluzione.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$ □

Esercizio 40. Calcola $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+1}{2x^2-1}$.

Soluzione.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+1}{2x^2-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{2x^2}=\frac{3}{2}$$ □

I tre esempi precedenti mostrano i tre diversi casi che si possono presentare calcolando il limite $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}$, dove $P(x)$ e $Q(x)$ sono polinomi di gradi rispettivamente n ed m:

- se $n > m$, allora $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\pm\infty$
- se $n < m$, allora $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=0$
- se $n = m$, allora $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{\text{coefficiente di } x^n}{\text{coefficiente di } x^m}$

FORME DI INDECISIONE DEL TIPO $0/0$ Se il limite del rapporto di due polinomi P e Q ha la forma indeterminata $0/0$ per $x \to a \in \mathbb{R}$, deve essere $P(a) = Q(a) = 0$, quindi i due polinomi P e Q devono essere divisibili per $(x-a)$. L'indeterminazione si rimuove scomponendo P e Q in fattori e semplificando la frazione P/Q. Il limite della funzione ottenuta dopo la semplificazione del fattore $(x-a)$ coincide con quello della funzione originaria: infatti le due funzioni sono uguali se $x \neq a$ e, per il calcolo del limite, è ininfluente il valore della funzione in a.

Esercizio 41. Calcola $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2-4}$.

Soluzione. Osserviamo che

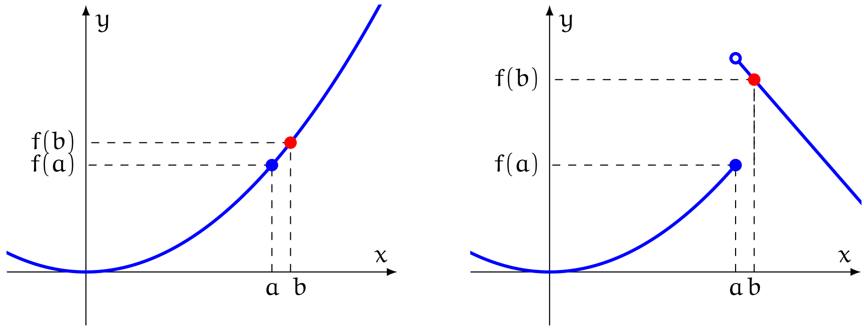
$$\lim_{x\to 2}(x^2-3x+2)=0 \qquad \lim_{x\to 2}(x^2-4)=0$$

quindi il limite si ha la forma $0/0$. Per risolvere la forma di indecisione scomponiamo il numeratore e il denominatore e semplifichiamo il fattore in comune:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-1}{x+2}=\frac{1}{4}$$ □

2.3 CONTINUITÀ

Intuitivamente, una funzione è *continua* se per tracciare il suo grafico «non si stacca mai la penna dal foglio». Il concetto di limite permette di definire questa nozione in modo preciso.



(a) La funzione $f(x)$ è continua in a: spostandoci di poco da a, per esempio in b, il valore $f(b)$ si discosta poco da $f(a)$

(b) La funzione $f(x)$ *non* è continua in a: spostandoci di poco da a, per esempio in b, il valore $f(b)$ si discosta molto da $f(a)$

Figura 20: Funzioni continue e discontinue

Continuità in un punto

Definizione 11. Sia f una funzione definita vicino ad $a \in \mathbb{R}$. Se $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, la funzione f è **continua in** a.

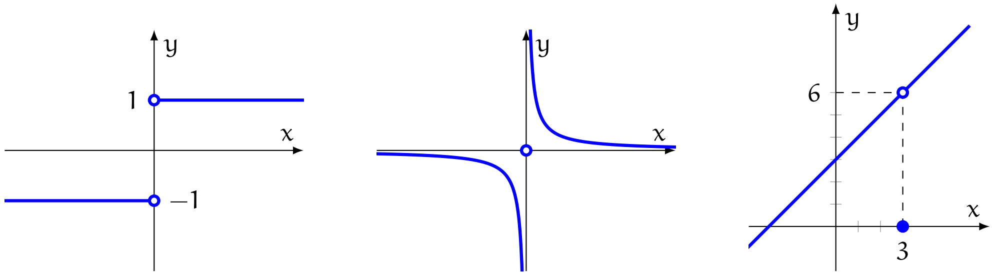
La condizione $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ si può interpretare dicendo che «se x è vicino ad a, allora $f(x)$ è vicino a $f(a)$» (figura 20a).

Funzioni continue

Definizione 12. Se una funzione f di dominio D è continua in tutti i punti di un insieme $A \subseteq D$, diremo che f è **continua in** A. Se f è continua in tutti i punti del suo dominio, diremo semplicemente che f è una **funzione continua**.

Per esempio:

- le funzioni potenza $y = x^n$ con $n \in \mathbb{N}$ sono continue in $\mathbb{R}$
- la funzione $y = 1/x$ è continua in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
- la funzione esponenziale $y = 2^x$ è continua in $\mathbb{R}$
- la funzione logaritmica $y = \log x$ è continua in $(0, +\infty)$



(a) Prima specie **(b)** Seconda specie **(c)** Terza specie

Figura 21: Punti di discontinuità

Punti di discontinuità e loro classificazione

Sia f una funzione definita vicino ad $a \in \mathbb{R}$. La condizione di continuità della funzione in a equivale alla seguente:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

quindi richiede che siano verificate tre condizioni:

1. i due limiti $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ devono esistere finiti
2. devono essere uguali tra loro
3. devono essere uguali a $f(a)$

Se almeno una di queste tre condizioni non è soddisfatta, diremo che a è un *punto di discontinuità* della funzione. Si possono allora avere tre tipi diversi di punti di discontinuità, a seconda di quale di queste tre condizioni viene a cadere. Analizziamo singolarmente ciascuno di questi casi.

Discontinuità di prima specie

Il primo tipo di discontinuità che analizziamo è relativo al caso in cui cade la condizione 2, cioè se i limiti $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ *esistono finiti* ma sono diversi tra loro.

Definizione 13. Un punto di discontinuità a per una funzione f è un **punto di discontinuità di prima specie** se i limiti di f per $x \to a^+$ e $x \to a^-$ esistono finiti, ma sono diversi tra loro.

Esercizio 42. Studia i punti di discontinuità della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Soluzione. La funzione è definita e continua in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (figura 21a). Si ha che

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1 \qquad \lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$$

Poiché i limiti dalla destra e dalla sinistra di f per $x \to 0$ esistono e sono finiti ma sono *diversi* tra loro, la funzione ha in $x = 0$ un punto di *discontinuità di prima specie*. □

Discontinuità di seconda specie

Un altro tipo di discontinuità si ha se cade la condizione 1, cioè quello in cui almeno uno dei due limiti $\lim_{x \to a^+} f(x)$ e $\lim_{x \to a^-} f(x)$ non esiste o è infinito.

Definizione 14. Un punto di discontinuità a per una funzione f è **di seconda specie** se almeno uno dei due limiti $\lim_{x \to a^+} f(x)$ e $\lim_{x \to a^-} f(x)$ non esiste o è infinito.

Esercizio 43. Studia i punti di discontinuità della funzione $1/x$.

Soluzione. La funzione è definita e continua in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (figura 21b). I limiti della funzione per $x \to 0^+$ e $x \to 0^-$ sono infiniti; precisamente

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$$

quindi $x = 0$ è un punto di discontinuità di seconda specie per la funzione. La retta $x = 0$ (cioè l'asse y) è un asintoto verticale per la funzione. □

Discontinuità di terza specie

L'ultimo caso da esaminare è quello in cui si verificano le condizioni 1 e 2, ma cade la 3, cioè quando esiste *finito* il limite $\lim_{x \to a} f(x)$, ma questo non è uguale a $f(a)$.

Definizione 15. Un punto di discontinuità a per una funzione f è **di terza specie** se esiste finito $\lim_{x \to a} f(x)$ ma f non è definita in a oppure il valore del limite è diverso da $f(a)$.

Esercizio 44. Studia i punti di discontinuità della funzione

$$f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{se } x \neq 3 \\ 0 & \text{se } x = 3 \end{cases}$$

Soluzione. La funzione è definita in tutto $\mathbb{R}$ ed è continua per $x \neq 3$ (figura 21c). Analizziamo il comportamento della funzione vicino a 3:

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 6$$

Quindi il limite della funzione per $x \to 3$ esiste ma è diverso da $f(3) = 0$. □

Si può modificare la definizione della funzione precedente *nel punto* 3 in modo da ottenere una nuova funzione continua anche in 3; precisamente, la funzione

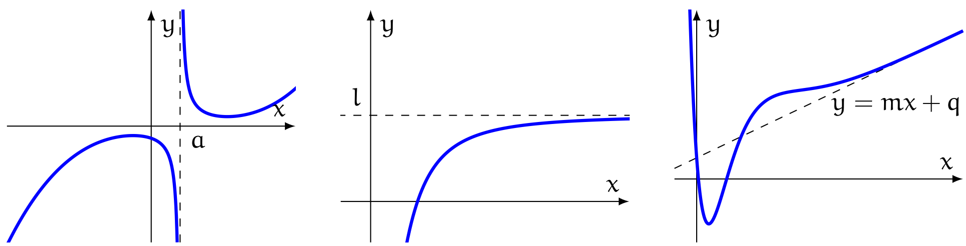
$$g(x) = \begin{cases} x+3 & \text{se } x \neq 3 \\ 6 & \text{se } x = 3 \end{cases}$$

che coincide con f eccetto che per $x = 3$, è continua in 3 perché $\lim_{x \to 3} g(x) = g(3)$.

2.4 ASINTOTI

Consideriamo i grafici di funzione nella figura 22: ciascuno di essi, per opportuni valori di x, «si avvicina sempre di più» alle rette tratteggiate.

Definizione 16. Una retta è un **asintoto** per il grafico di una funzione se il grafico «si avvicina sempre di più» alla retta per certi valori di x.



(a) Grafico di una funzione che ha la retta $x = a$ come asintoto verticale

(b) Grafico di una funzione che ha la retta $y = l$ come asintoto orizzontale

(c) Grafico di una funzione che ha la retta $y = mx + q$ come asintoto obliquo

Figura 22: Asintoti

Le funzioni intere non hanno asintoti; quelle fratte *possono* averne. Per cercare gli asintoti del grafico di una funzione bisogna analizzarne il comportamento agli estremi del dominio: al finito per gli asintoti verticali e all'infinito per gli altri.

Asintoti verticali

Proposizione 4. La retta di equazione $x = a$ è un *asintoto verticale* per una funzione se almeno uno dei limiti della funzione per $x \to a^+$ o per $x \to a^-$ è infinito.

Esercizio 45. Trova gli asintoti verticali della funzione $y = \dfrac{2x-4}{x-1}$.

Soluzione. Il dominio della funzione è $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Per trovare gli asintoti verticali calcoliamo i limiti della funzione agli estremi finiti degli intervalli del dominio:

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{2x-4}{x-1} = \frac{-2}{0^+} = -\infty \qquad \lim_{x \to 1^-} \frac{2x-4}{x-1} = \frac{-2}{0^-} = +\infty$$

quindi $x = 1$ è un asintoto verticale (figura 23d). □

Asintoti orizzontali

Proposizione 5. Una funzione fratta $y = P/Q$ ha un asintoto orizzontale di equazione $y = m$ se e solo se P ha lo stesso grado di Q. In questo caso $m = \lim_{x \to \infty} P/Q$.

Esercizio 46. Trova gli asintoti orizzontali della funzione $y = \dfrac{2x-4}{x-1}$.

Soluzione. Poiché il numeratore ha lo stesso grado del denominatore, la funzione ha un asintoto orizzontale.

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x-4}{x-1} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

quindi $y = 2$ è un asintoto orizzontale (figura 23d). □

Asintoti obliqui

Proposizione 6. Una funzione fratta $y = P/Q$ ha un asintoto obliquo di equazione $y = mx + q$ se e solo se il grado di P supera di 1 quello di Q. In questo caso:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad q = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx]$$

Esercizio 47. Trova gli asintoti obliqui della funzione $y = \dfrac{x^2}{x-1}$.

Soluzione. Il grado del numeratore supera di 1 il grado del denominatore, per cui la funzione ha un asintoto obliquo $y = mx + q$. Abbiamo:

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x(x-1)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x-1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x} = 1$$

Inoltre:

$$\begin{aligned} q = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - 1 \cdot x] &= \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - x \right) \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 - x(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 - x^2 + x}{x-1} = 1 \end{aligned}$$

Quindi l'asintoto obliquo ha equazione $y = x + 1$ (figura 23e). □

2.5 GRAFICO PROBABILE

Per affrontare lo studio di una funzione, i passi che abbiamo seguito finora sono nell'ordine:

- trovane il dominio
- trovane i punti di intersezione del suo grafico con gli assi
- studiarne il segno
- individuare le simmetrie

Ora possiamo arricchire la nostra analisi con altri due punti:

- calcolare i limiti agli estremi degli intervalli dove la funzione è definita

- trovane gli asintoti

Spesso a questo punto, pur non conoscendo nel dettaglio l'andamento della funzione, è già possibile tracciarne con sufficiente approssimazione un *grafico probabile*, come mostrano gli esempi seguenti.

Esercizio 48. Trova gli asintoti e traccia il grafico probabile delle funzioni

- $y = x^2 - 4x + 3$
- $y = x^3 - 3x$
- $y = x^4 - 2x^2$

Soluzione. Le funzioni sono intere: non ci sono asintoti (figure 23a-23b-23c). □

Esercizio 49. Trova gli asintoti e traccia il grafico probabile della funzione $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$.

Soluzione. La retta $x = 1$ è un asintoto verticale (vedi l'esercizio 45) e la retta $y = 2$ è un asintoto orizzontale (vedi l'esercizio 46). La figura 23d mostra le informazioni raccolte. □

Esercizio 50. Trova gli asintoti e traccia il grafico probabile della funzione $y = \dfrac{x^2}{x-1}$.

Soluzione. Calcoliamo i limiti agli estremi del dominio e troviamo gli asintoti.

- Per trovare gli asintoti verticali calcoliamo i limiti della funzione agli estremi finiti del dominio. In questo caso, quindi, calcoliamo i limiti per $x \to 1$:

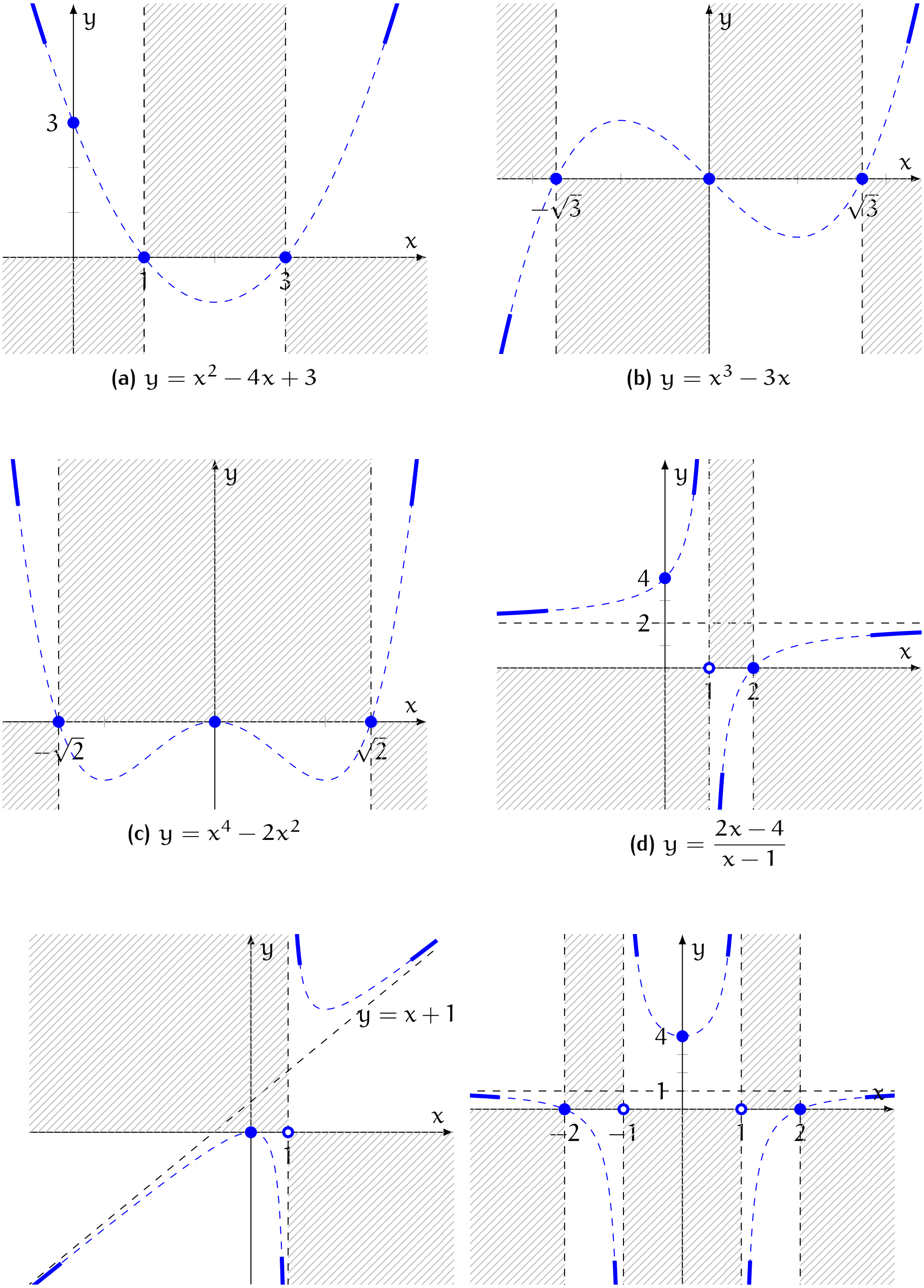
  $$\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2}{x-1} = \frac{1}{0^+} = +\infty \qquad \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2}{x-1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

  quindi $x = 1$ è un asintoto verticale.

- La funzione ha un asintoto obliquo di equazione $y = x + 1$ (vedi l'esercizio 47).

La figura 23e mostra le informazioni raccolte. □

Esercizio 51. Trova gli asintoti e traccia il grafico probabile della funzione $y = \dfrac{x^2-4}{x^2-1}$.



(a) $y = x^2 - 4x + 3$

(b) $y = x^3 - 3x$

(c) $y = x^4 - 2x^2$

(d) $y = \dfrac{2x - 4}{x - 1}$

(e) $y = \dfrac{x^2}{x - 1}$

(f) $y = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 1}$

Figura 23: Limiti di alcune funzioni algebriche

Soluzione. Calcoliamo i limiti agli estremi del dominio e troviamo gli asintoti.

- Per trovare gli asintoti verticali calcoliamo i limiti della funzione agli estremi finiti del dominio. In questo caso, quindi, calcoliamo i limiti per $x \to 1$ e per $x \to -1$.

  $$\lim_{x\to 1^\pm} \frac{x^2-4}{x^2-1} = \frac{-3}{0^\pm} = \mp\infty \qquad \lim_{x\to -1^\pm} \frac{x^2-4}{x^2-1} = \frac{-3}{0^\mp} = \pm\infty$$

  quindi $x = 1$ e $x = -1$ sono asintoti verticali.

- Per trovare gli asintoti orizzontali calcoliamo i limiti della funzione per $x \to \pm\infty$.

  $$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-4}{x^2-1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

  quindi $y = 1$ è un asintoto orizzontale.

La figura 23f mostra le nuove informazioni raccolte. □

2.6 ESERCIZI

Chi non risolve esercizi non impara la matematica.

1 Dal grafico della funzione $y = f(x)$ nella figura seguente deduci, se esistono, i limiti:

a. $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

b. $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

c. $\lim_{x\to0^+} f(x)$

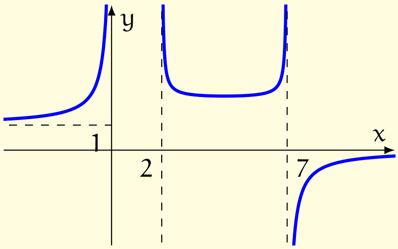
d. $\lim_{x\to0^-} f(x)$

e. $\lim_{x\to2^+} f(x)$

f. $\lim_{x\to2^-} f(x)$

g. $\lim_{x\to7^+} f(x)$

h. $\lim_{x\to7^-} f(x)$



2 Indica la risposta corretta.

a. Quanto vale $\lim_{x\to2} x^3$?

$\boxed{\text{A}}$ 2 $\boxed{\text{B}}$ 8 $\boxed{\text{C}}$ $-\infty$ $\boxed{\text{D}}$ $+\infty$

b. Quanto vale $\lim_{x\to+\infty} x^3$?

$\boxed{\text{A}}$ 0 $\boxed{\text{B}}$ 1 $\boxed{\text{C}}$ $-\infty$ $\boxed{\text{D}}$ $+\infty$

c. Quanto vale $\lim_{x\to-\infty} x^3$?

$\boxed{\text{A}}$ 0 $\boxed{\text{B}}$ 1 $\boxed{\text{C}}$ $-\infty$ $\boxed{\text{D}}$ $+\infty$

d. Quanto vale $\lim_{x\to+\infty} x^4$?

$\boxed{\text{A}}$ 0 $\boxed{\text{B}}$ 1 $\boxed{\text{C}}$ $-\infty$ $\boxed{\text{D}}$ $+\infty$

e. Quanto vale $\lim_{x\to-\infty} x^4$?

$\boxed{\text{A}}$ 0 $\boxed{\text{B}}$ 1 $\boxed{\text{C}}$ $-\infty$ $\boxed{\text{D}}$ $+\infty$

f. Quanto vale $\lim_{x\to+\infty} 10^x$?

$\boxed{\text{A}}$ 0 $\boxed{\text{B}}$ 1 $\boxed{\text{C}}$ $-\infty$ $\boxed{\text{D}}$ $+\infty$

g. Quanto vale $\lim_{x\to+\infty} 10^{-x}$?

$\boxed{\text{A}}$ 0 $\boxed{\text{B}}$ 1 $\boxed{\text{C}}$ $-\infty$ $\boxed{\text{D}}$ $+\infty$

h. Quanto vale $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x$?

$\boxed{\text{A}}$ 0 $\boxed{\text{B}}$ 1 $\boxed{\text{C}}$ $-\infty$ $\boxed{\text{D}}$ $+\infty$

i. Quanto vale $\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x$?

$\boxed{\text{A}}$ 0 $\boxed{\text{B}}$ 1 $\boxed{\text{C}}$ $-\infty$ $\boxed{\text{D}}$ $+\infty$

j. Quanto vale $\lim_{x\to0^+} \log_5 x$?

$\boxed{\text{A}}$ 0 $\boxed{\text{B}}$ 1 $\boxed{\text{C}}$ $-\infty$ $\boxed{\text{D}}$ $+\infty$

k. Quanto vale $\lim_{x\to0^+} \log_{\frac{1}{5}} x$?

$\boxed{\text{A}}$ 0 $\boxed{\text{B}}$ 1 $\boxed{\text{C}}$ $-\infty$ $\boxed{\text{D}}$ $+\infty$

l. Quanto vale $\lim_{x\to25} \log_5 x$?

$\boxed{\text{A}}$ 0 $\boxed{\text{B}}$ 2 $\boxed{\text{C}}$ $-\infty$ $\boxed{\text{D}}$ $+\infty$

[Due risposte A, due B, due C e sei D]

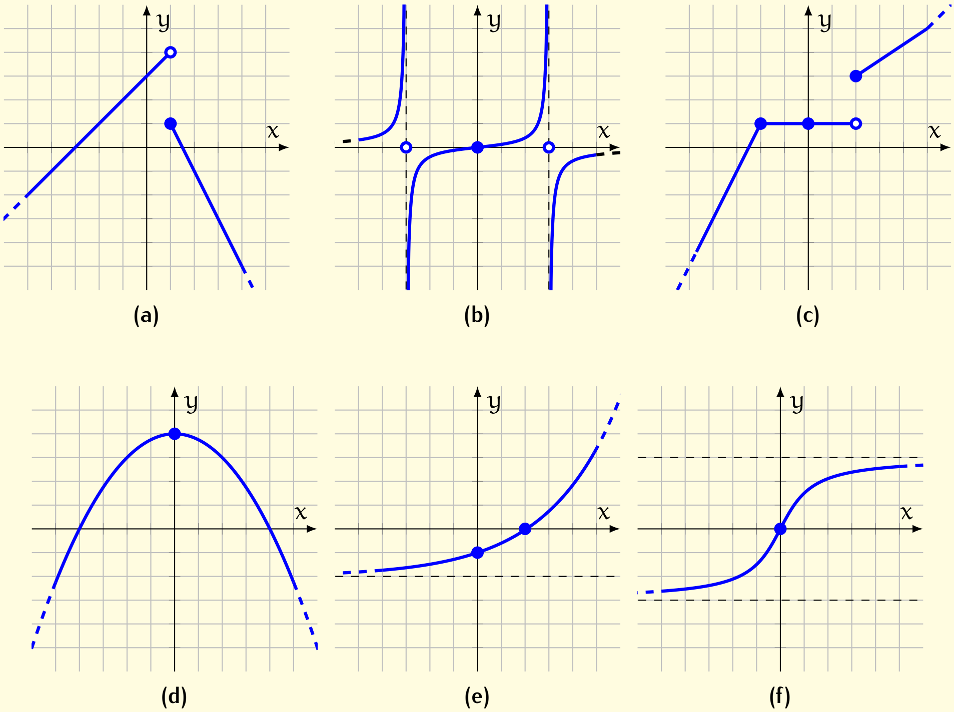


Figura 24: Approccio grafico al concetto di limite

3 Deduci dal grafico 24a il valore dei seguenti limiti:

a. $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ **c.** $\lim_{x\to 0} f(x)$ **e.** $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ **g.** $\lim_{x\to 3} f(x)$

b. $\lim_{x\to-3} f(x)$ **d.** $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ **f.** $\lim_{x\to 2} f(x)$ **h.** $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

4 Deduci dal grafico 24b il valore dei seguenti limiti:

a. $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ **c.** $\lim_{x\to-3^+} f(x)$ **e.** $\lim_{x\to 3^-} f(x)$ **g.** $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

b. $\lim_{x\to-3^-} f(x)$ **d.** $\lim_{x\to 0} f(x)$ **f.** $\lim_{x\to 3^+} f(x)$

5 Deduci dal grafico 24c il valore dei seguenti limiti:

a. $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ **c.** $\lim_{x\to-2} f(x)$ **e.** $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ **g.** $\lim_{x\to 5} f(x)$

b. $\lim_{x\to-3} f(x)$ **d.** $\lim_{x\to 0} f(x)$ **f.** $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ **h.** $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

6 Deduci dal grafico 24d il valore dei seguenti limiti:

a. $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ **b.** $\lim_{x\to 0} f(x)$ **c.** $\lim_{x\to 4} f(x)$ **d.** $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

7 Deduci dal grafico 24e il valore dei seguenti limiti:

a. $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ **b.** $\lim_{x\to 0} f(x)$ **c.** $\lim_{x\to 2} f(x)$ **d.** $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

8 Deduci dal grafico 24f il valore dei seguenti limiti:

a. $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ **b.** $\lim_{x\to 0} f(x)$ **c.** $\lim_{x\to 2} f(x)$ **d.** $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

Calcola i seguenti limiti che non hanno forme di indecisione.

9 $\lim_{x\to 0} \frac{5}{x^2}$ $[+\infty]$

10 $\lim_{x\to+\infty} (x^2+x^3)$ $[+\infty]$

11 $\lim_{x\to-\infty} \left(x^2+\frac{1}{x}\right)$ $[+\infty]$

12 $\lim_{x\to-\infty} \left(3+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)$ $[3]$

13 $\lim_{x\to 5^-} \frac{5}{x-5}$ $[-\infty]$

14 $\lim_{x\to 1} \frac{2x^2-1}{x^3+1}$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

15 $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2+2}\right)$ $[0]$

16 $\lim_{x\to-\infty} \frac{2^x}{x}$ $[0]$

Calcola i seguenti limiti che hanno forme di indecisione ∞/∞.

17 $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{x+1}$ $[+\infty]$

18 $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2-1}{x^2+x}$ $[2]$

19 $\lim_{x\to-\infty} \frac{1-x^2}{2x+1}$ $[+\infty]$

20 $\lim_{x\to+\infty} \frac{1-x^3}{2x^4+1}$ $[0]$

21 $\lim_{x\to+\infty} \frac{1-x^2}{x}$ $[-\infty]$

22 $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-x+1}{x^2-3x+2}$ $[1]$

23 $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+6x+5}{x+4}$ $[-\infty]$

24 $\lim_{x\to+\infty} \frac{10x^4-x^3+1}{5x^4-x-1}$ $[2]$

25 $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4+6x+5}{x^2+4}$ $[+\infty]$

26 $\lim_{x\to-\infty} \frac{6x^2-x+1}{4x^2-x-1}$ $\left[\frac{3}{2}\right]$

27 $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-16}{5x^3+1}$ $[0]$

28 $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+6x+5}{x+4}$ $[+\infty]$

29 $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+6x+5}{x^5+4}$ $[0]$

30 $\lim_{x\to+\infty} \frac{1-10x^2}{4x^2-1}$ $\left[-\frac{5}{2}\right]$

31 $\lim_{x\to+\infty} \frac{(x+1)^2}{x+4}$ $[+\infty]$

Calcola i seguenti limiti che hanno forme di indecisione $0/0$.

32 $\lim_{x\to 5} \frac{x^2-25}{x^2-5x}$ $[2]$

33 $\lim_{x\to 2} \frac{4x-x^3}{x-2}$ $[-8]$

34 $\lim_{x\to -2} \frac{2x^2+4x}{x^2+4x+4}$ $[\infty]$

35 $\lim_{x\to -3} \frac{9-x^2}{x^2+3x}$ $[-2]$

36 $\lim_{x\to 4} \frac{x^2-16}{x^2-8x+16}$ $[\infty]$

37 $\lim_{x\to 9} \frac{x^2-81}{x-9}$ $[18]$

38 $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$ $[4]$

39 $\lim_{x\to -1} \frac{x^2-x-2}{x^2-1}$ $\left[\frac{3}{2}\right]$

40 $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-x-6}{x^2-2x-3}$ $\left[\frac{5}{4}\right]$

41 $\lim_{x\to 5} \frac{x^3-25x}{x-5}$ $[50]$

42 $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4x+4}{x^2+4x-12}$ $[0]$

43 $\lim_{x\to 1} \frac{x^7-x^6}{x^5-x^4}$ $[1]$

44 $\lim_{x\to 2} \frac{x^4-16}{x^2-2x}$ $[16]$

45 $\lim_{x\to 0} \frac{3x^2+2x^3+x^4}{4x^2-x^4-x^6}$ $\left[\frac{3}{4}\right]$

46 $\lim_{x\to 0} \frac{x^3+10x^5}{4x+x^2+5x^3}$ $[0]$

47 $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^4-1}$ $\left[\frac{3}{4}\right]$

48 $\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{2x^2+3x+1}$ $[2]$

49 $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$ $\left[\frac{2}{3}\right]$

50 $\lim_{x\to -1} \frac{3x^2+x-2}{2x^2+x-1}$ $\left[\frac{5}{3}\right]$

51 $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}$ $[-1]$

52 $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-3x+2}{x^2+x-6}$ $\left[\frac{1}{5}\right]$

53 $\lim_{x\to 3} \frac{x^3-3x^2+x-3}{x^2-2x-3}$ $\left[\frac{5}{2}\right]$

54 $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-3x+2}{1-x^2}$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

55 Indica la risposta corretta.

a. Quanto vale $\lim_{x\to 0} \frac{x^2-3x+3}{x^2-2x+1}$?

A 1 B 3 C $+\infty$ D $-\infty$

b. Quanto vale $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2-3x+3}{x^2-2x+1}$?

A 1 B 3 C $+\infty$ D $-\infty$

c. Quanto vale $\lim_{x\to +\infty} (-3x^3+5x^2-1)$?

A 0 B 1 C $+\infty$ D $-\infty$

d. Quanto vale $\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+1}{x+6}$?

A 0 B 1 C $+\infty$ D $-\infty$

e. Quanto vale $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+1}{x+6}$?

A 0 B 1 C $+\infty$ D $-\infty$

f. Quanto vale $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2-25}{x^2+x-30}$?

A 1 B 10 C $\frac{10}{11}$ D $\frac{11}{10}$

g. Quanto vale $\lim_{x\to -\infty} 6^x$?

A 0 B 1 C $+\infty$ D $-\infty$

h. Quanto vale $\lim_{x\to 0} 6^x$?

A 0 B 1 C $+\infty$ D $-\infty$

i. Quanto vale $\lim_{x\to +\infty} 6^x$?

A 0 B 1 C $+\infty$ D $-\infty$

j. Quanto vale $\lim_{x\to +\infty} \frac{x+6}{x^2+1}$?

A 0 B 1 C $+\infty$ D $-\infty$

[Quattro risposte A, due B, due C e due D]

56 Vero o falso?

a. $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^x = 0$ V F

b. $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^x = -\infty$ V F

c. $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x} = +\infty$ V F

d. $\lim_{x\to+\infty}\log_{\frac{1}{2}} x = +\infty$ V F

e. $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x}$ non ha senso V F

f. $\lim_{x\to0^-} x^{10} = 0^-$ V F

g. $\lim_{x\to0^+} x^{-10} = +\infty$ V F

h. $\lim_{x\to-\infty} x^{10} = +\infty$ V F

i. $\lim_{x\to+\infty} x^{10} = +\infty$ V F

j. $\lim_{x\to1}\log x = 0$ V F

[7 uguaglianze vere e 3 false]

Calcola i seguenti limiti.

57 $\lim_{x\to+\infty}(x^2-48x-100)$ $[+\infty]$

58 $\lim_{x\to-\infty}(x^3-5x-1)$ $[-\infty]$

59 $\lim_{x\to+\infty}(x^4-5x^2-1)$ $[+\infty]$

60 $\lim_{x\to+\infty}(x^2-5x^3-1)$ $[-\infty]$

61 $\lim_{x\to1^+}\frac{1}{1-x}$ $[-\infty]$

62 $\lim_{x\to3}\frac{x^2-6x+9}{2x^2-6x}$ $[0]$

63 $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{3x^2}$ $\left[\frac{1}{3}\right]$

64 $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)$ $[0]$

65 $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^x$ $[0]$

66 $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^x$ $[+\infty]$

67 $\lim_{x\to0}\frac{x^2+x+1}{x^2+2x+3}$ $\left[\frac{1}{3}\right]$

68 $\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x^2+6}$ $[0]$

69 $\lim_{x\to3}\frac{2x-6}{x^2+3x-18}$ $\left[\frac{2}{9}\right]$

70 $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^5+x^2}{x^3+1}$ $[+\infty]$

71 $\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x^2+3x-4}$ $\left[\frac{2}{5}\right]$

72 $\lim_{x\to+\infty}(2x^2-x-1)$ $[+\infty]$

73 $\lim_{x\to3}\frac{x^2-9}{x^2+x-12}$ $\left[\frac{6}{7}\right]$

74 $\lim_{x\to+\infty}\frac{x-x^2}{2x^2+x+1}$ $\left[-\frac{1}{2}\right]$

75 $\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^4+1}{x^3-1}$ $[-\infty]$

76 Vero o falso?

a. Se $f(0)=0$ e $\lim_{x\to0^-} f(x)=1$, si può affermare che per $x=0$ la funzione f ha un punto di discontinuità di terza specie. V F

b. Se $\lim_{x\to0^-} f(x) = -1$ e che $\lim_{x\to0^+} f(x) = 1$, allora per $x=0$ la funzione f ha un punto di discontinuità di prima specie. V F

c. Una funzione che ha una discontinuità nel punto $x=a$ può sempre essere ridefinita in $x=a$, in modo da renderla continua in $x = a$. V F

d. Se una funzione ha una discontinuità nel punto $x = 0$, allora $\lim_{x \to 0^-} f(x)$ è diverso da $\lim_{x \to 0^+} f(x)$. V F

e. Se la retta di equazione $x = a$ è un asintoto per la funzione f, allora il punto a è un punto di discontinuità di seconda specie per la funzione. V F

[2 affermazioni vere e 3 false]

77 Indica la risposta corretta.

a. A che cosa è uguale $\lim_{x \to +\infty} (x^3 - 4x^2 - 10x + 1)$?

A $\lim_{x \to +\infty} x^3$ B $\lim_{x \to +\infty} -4x^2$ C $\lim_{x \to +\infty} -10x$ D $-\infty$

b. A che cosa è uguale $\lim_{x \to +\infty} (x^3 - 4x^4 + 10x^2 + 1)$?

A $\lim_{x \to +\infty} x^3$ B $\lim_{x \to +\infty} -4x^4$ C $\lim_{x \to +\infty} 10x^2$ D $+\infty$

c. A che cosa è uguale $\lim_{x \to -\infty} \frac{1 - 10x^2 + 2x^4}{4x^2 + 3}$?

A $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{4x^2}$ B $\lim_{x \to -\infty} \frac{10x^2}{3}$ C $\lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{4x^2}$ D $\frac{5}{2}$

d. Se $P(x)$ è un polinomio di grado 4 e $Q(x)$ è un polinomio di grado 5, quanto vale $\lim_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$?

A 0 B $+\infty$ C $-\infty$ D non si sa

e. Se $P(x)$ è un polinomio di grado 4 e $Q(x)$ è un polinomio tale che $\lim_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = +\infty$, allora il grado di $Q(x)$ è:

A maggiore di 4 B uguale a 4 C minore di 4 D non si sa

[Due risposte A, una B, una C e una D]

78 Vero o falso?

a. $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 + 1}{x^2 + 1} = 2$ V F

b. $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 + 1}{x^3 + 1} = +\infty$ V F

c. $\lim_{x \to +\infty} \frac{10x^3}{x^5 + 1} = 0$ V F

d. Il limite $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$, che hanno la forma di indecisione $0/0$, si può risolvere scomponendo numeratore e denominatore e semplificando il fattore $(x - 1)$. V F

e. Il limite $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 4}{x - 2}$ ha la forma di indecisione $0/0$. V F

f. Se $P(x)$ è un polinomio di grado 2 e $Q(x)$ è un polinomio di grado 3, allora $\lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = 1$. V F

g. Se $P(x)$ è un polinomio di grado 2 e $Q(x)$ è un polinomio di grado 3, allora $\lim_{x\to-\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = 0$. V F

[4 affermazioni vere e 3 false]

79 Indica la risposta corretta.

a. Quanto vale $\lim_{x\to+\infty} x^4$?

A 0 B 1 C $+\infty$ D $-\infty$

b. Quanto vale $\lim_{x\to-1} x^4$?

A 0 B 1 C $+\infty$ D $-\infty$

c. Quanto vale $\lim_{x\to-\infty} x^4$?

A 0 B 1 C $+\infty$ D $-\infty$

d. Quanto vale $\lim_{x\to 0} \frac{x^2-3x}{x^2-2x+1}$?

A 0 B 1 C $+\infty$ D $-\infty$

e. Quanto vale $\lim_{x\to 0} \frac{x+1}{x^2+1}$?

A 0 B 1 C $+\infty$ D $-\infty$

f. Quanto vale $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x+1}$?

A 0 B 1 C $+\infty$ D $-\infty$

g. Quanto vale $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-1}{x+1}$?

A 0 B 1 C $+\infty$ D $-\infty$

[Due risposte A, due B, due C e una D]

Trova gli asintoti verticali e orizzontali delle seguenti funzioni.

80 $y = x^3$ [non ci sono asintoti]

81 $y = \frac{1}{x}$ [$x = 0, y = 0$]

82 $y = \frac{1}{x^2+1}$ [$y = 0$]

83 $y = \frac{x}{x^2-1}$ [$x = \pm 1, y = 0$]

84 $y = \frac{2}{2-x}$ [$x = 2, y = 0$]

85 $y = \frac{3x+3}{x-1}$ [$x = 1, y = 3$]

86 $y = \frac{3-x}{x}$ [$x = 0, y = -1$]

87 $y = \frac{2-2x}{x-2}$ [$x = 2, y = -2$]

88 $y = \frac{2-x}{1-x}$ [$x = 1, y = 1$]

89 $y = \frac{4}{x^2+4}$ [$y = 0$]

90 $y = \frac{4}{x^2-4}$ [$x = \pm 2, y = 0$]

91 $y = \frac{4}{x^2-4x+4}$ [$x = 2, y = 0$]

92 $y = \frac{2}{x^2-3x}$ [$x = 0, x = 3, y = 0$]

93 $y = \frac{x}{x^2-4}$ [$x = \pm 2, y = 0$]

94 $y = \frac{x+1}{x^2}$ [$x = 0, y = 0$]

95 $y = \frac{4x}{x^2+1}$ [$y = 0$]

96 $y = \frac{2x}{x^2-1}$ [$x = \pm 1, y = 0$]

97 $y = \frac{x-1}{x^2+x+1}$ [$y = 0$]

98 $y = \frac{x^2-4}{(x+1)^2}$ [$x = -1, y = 1$]

99 $y = \frac{1-x^2}{x^2+1}$ [$y = -1$]

100 $y = \frac{12x-3x^2}{x^2-2x+1}$ [$x = 1, y = -3$]

101 $y = \dfrac{x^2 + x + 1}{x^2 - 1}$ $[x = \pm 1, y = 1]$

102 $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$ $[x = 0, y = 1]$

103 $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - x}$ $[x = 0, x = 1, y = 1]$

104 $y = \dfrac{x^2}{(x-1)^2}$ $[x = 1, y = 1]$

105 $y = \dfrac{1}{x^3}$ $[x = 0, y = 0]$

106 $y = \dfrac{x}{x^3 - 1}$ $[x = 1, y = 0]$

107 $y = \dfrac{x^3}{x^3 - 1}$ $[x = 1, y = 1]$

108 $y = \dfrac{(x+1)^3}{x^3}$ $[x = 0, y = 1]$

109 $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^2}$ $[x = 0, y = 1]$

110 $y = \dfrac{x^2}{x^3 - 1}$ $[x = 1, y = 0]$

Trova gli asintoti verticali e obliqui delle seguenti funzioni.

111 $y = \dfrac{x^2 - 7x + 10}{x - 1}$ $[x = 1, y = x - 6]$

112 $y = \dfrac{x^2 + x + 1}{x - 1}$ $[x = 1, y = x + 2]$

113 $y = \dfrac{x^2 - 10x + 21}{x - 5}$ $[x = 5, y = x - 5]$

114 $y = \dfrac{2x^2 - 8}{x - 1}$ $[x = 1, y = 2x + 2]$

115 $y = \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x - 5}$ $[x = 5, y = x]$

116 $y = \dfrac{(x^2 - 1)^2}{x^3}$ $[x = 0, y = x]$

117 $y = \dfrac{x^3}{x^2 + x + 1}$ $[y = x - 1]$

118 $y = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$ $[x = 1, y = x + 2]$

119 $y = \dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$ $[x = 1, y = x + 5]$

120 $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$ $[x = \pm 1, y = x]$

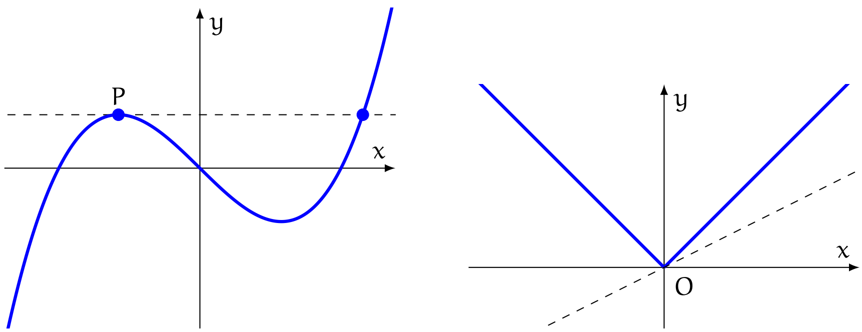
3 DERIVATE

3.1 CONCETTO DI DERIVATA

In questo capitolo introdurremo il concetto di derivata e lo impiegheremo per completare lo studio di funzione. Avviciniamoci al concetto di derivata partendo da un problema che storicamente ha condotto alla sua nascita.

Problema della retta tangente

Nello studio della geometria la *retta tangente* a una circonferenza in un suo punto è l'unica retta passante per quel punto che non interseca la circonferenza in altri punti. Ma che cos'è la retta tangente a una curva in un suo punto P? Come primo tentativo, potremmo essere portati a rispondere: è l'unica retta passante per P che non interseca la curva in altri punti. Tuttavia questa definizione non si adatta, per esempio, alle curve disegnate nelle figure 25a e 25b.



(a) La retta tangente alla curva in P interseca la curva in un altro punto

(b) Ci sono infinite rette passanti per O che intersecano la curva in un solo punto, ma intuitivamente tali rette non sono tangenti alla curva

Figura 25: Retta tangente a una curva in un punto

Abbandonata la speranza di poter definire il concetto di retta tangente in base al numero dei punti d'intersezione con la curva, ci rendiamo conto che, per risolvere il problema, dobbiamo introdurre qualche idea nuova. L'elemento chiave per fare

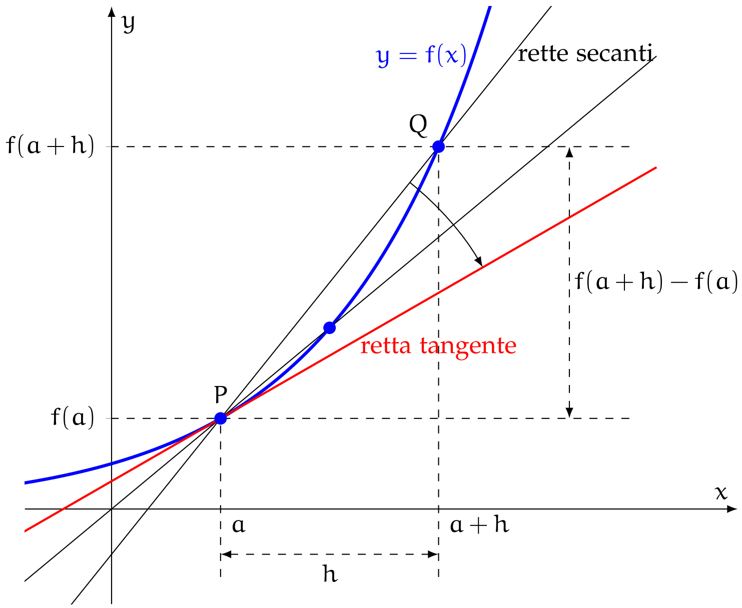


Figura 26: Retta tangente al grafico di una funzione in un punto

emergere queste nuove idee è guardare il problema della retta tangente da un punto di vista *dinamico*.

Data la funzione $y = f(x)$ e un punto $P(a, f(a))$ appartenente al suo grafico, per definire la retta tangente al grafico di f in P consideriamo innanzitutto una retta passante per P e *secante* la curva in un ulteriore punto Q, di ascissa $a+h$, «vicino» a P (figura 26).

Sappiamo che il coefficiente angolare della retta PQ è espresso dalla formula:

$$m_{PQ} = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Immaginiamo ora che h tenda a 0. Il punto Q si muove sul grafico di f e si avvicina a P, fino a sovrapporsi a esso quando $h = 0$. Contestualmente, la *retta secante* ruota intorno a P, fino ad avvicinarsi a una posizione «limite» che intuitivamente possiamo identificare con quella della *retta tangente*. Consideriamo allora il limite cui tende il coefficiente angolare della retta PQ quando h tende a 0:

$$\lim_{h \to 0} m_{PQ} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Se questo limite tende a un valore finito, possiamo definire la retta tangente come la retta passante per P e avente questo coefficiente angolare.

Grazie al concetto di limite, siamo così finalmente riusciti a trovare una buona definizione di retta tangente a una curva.

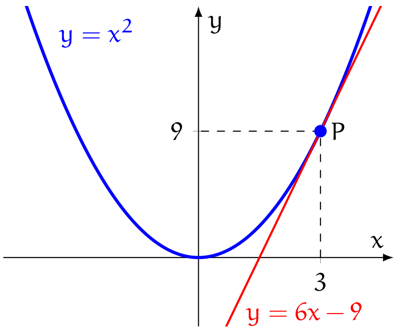


Figura 27: Il coefficiente angolare della tangente alla funzione $f(x) = x^2$ in $x = 3$ è $f'(2) = 6$

Derivata in un punto

Nel problema precedente abbiamo considerato il rapporto

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

tra l'incremento subito dalla funzione $f(x)$ quando la variabile indipendente passa dal valore a al valore $a+h$ e l'incremento h. Questo rapporto è detto *rapporto incrementale* della funzione nel punto a, relativo all'incremento h. Siamo stati indotti a considerare il limite di questo rapporto quando $h \to 0$: la derivata è precisamente questo limite.

Definizione 17. Una funzione $y = f(x)$ è **derivabile** in un punto a appartenente al suo dominio se

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{1}$$

esiste ed è finito. Questo limite prende il nome di *derivata prima* (o semplicemente *derivata*) di f in a e si indica con il simbolo $f'(a)$.

Come abbiamo visto nel paragrafo precedente analizzando il problema della retta tangente, il rapporto incrementale rappresenta il coefficiente angolare di una retta secante, mentre la derivata della funzione in un punto rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente al grafico della funzione in quel punto.

Esercizio 52. Calcola la derivata della funzione $f(x) = x^2$ nel punto $a = 3$ con la definizione.

Soluzione. Dobbiamo calcolare il limite 1 con $a = 3$ e $f(x) = x^2$. Abbiamo:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(3+h)^2 - 3^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{9 + h^2 + 6h - 9}{h} = \lim_{h \to 0} (h+6) = 6$$

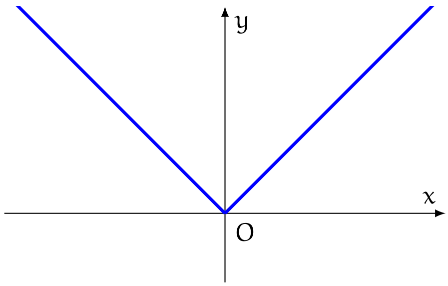


Figura 28: Non c'è alcuna retta tangente al grafico della funzione $f(x) = |x|$ nell'origine

Dunque la funzione è derivabile in $a = 3$ e risulta $f'(3) = 6$. Ne possiamo dare l'interpretazione grafica riportata nella figura 27. □

Continuità e derivabilità

Un risultato importante è che la derivabilità implica la continuità, come espresso dalla seguente proposizione.

Proposizione 7. Se f è una funzione *derivabile* in a, allora f è *continua* in a.

La proposizione precedente *non* è invertibile: non è vero cioè che se una funzione è continua in a allora è ivi derivabile.

Esercizio 53. Prova che la funzione $f(x) = |x|$ è continua ma non derivabile in $x = 0$.

Soluzione. La funzione $f(x) = |x|$ è continua in tutto $\mathbb{R}$, quindi in particolare in $x = 0$. Tuttavia non è derivabile in 0; infatti:

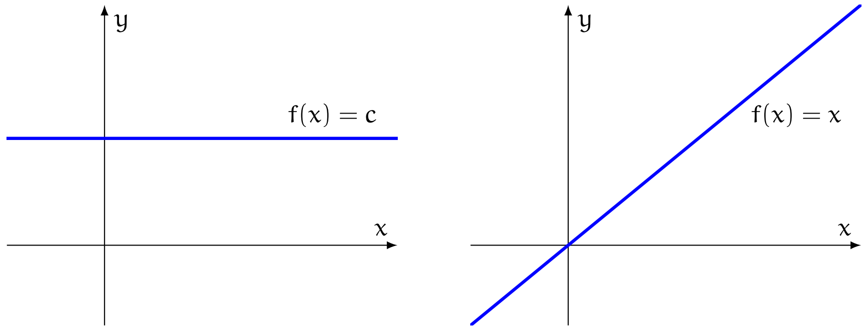
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h| - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h}$$

e quest'ultimo limite non esiste perché

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = 1 \quad \text{mentre} \quad \lim_{h \to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$ □

Vedi la figura 28.

In generale, se una funzione è derivabile in un punto, allora esiste la retta tangente al grafico della funzione in quel punto.



(a) La derivata di una funzione costante $f(x) = c$ è $f'(x) = 0$

(b) La derivata della funzione $f(x) = x$ è $f'(x) = 1$

Figura 29: Derivate di funzioni elementari

Funzione derivata

Definizione 18. Data una funzione f, la funzione f', indicata anche con Df e detta **funzione derivata (prima)** di f, associa a ogni punto in cui f è derivabile la sua derivata.

Esercizio 54. Calcola la derivata della funzione costante $f(x) = c$, con $c \in \mathbb{R}$, con la definizione.

Soluzione.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

Quindi la derivata della funzione costante è 0 per ogni $x \in \mathbb{R}$. □

Potevamo intuire il risultato precedente dal significato geometrico della derivata: la retta tangente al grafico di una funzione costante coincide in ogni punto con il grafico stesso, quindi ha coefficiente angolare uguale a 0, dunque $f'(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (figura 29a).

Esercizio 55. Calcola la derivata della funzione $f(x) = x$ con la definizione.

Soluzione.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h) - x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \to 0} 1 = 1$$

Quindi la derivata della funzione $f(x) = x$ è 1 per ogni $x \in \mathbb{R}$. □

Anche questa volta potevamo intuire il risultato precedente dal significato geometrico della derivata: la retta tangente al grafico della funzione $f(x) = x$ coincide in ogni punto con il grafico stesso, quindi ha coefficiente angolare uguale a 1, dunque $f'(x) = 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (figura 29b).

Esercizio 56. Calcola la derivata della funzione $f(x) = x^2$ con la definizione.

Soluzione. Calcoliamo la derivata della funzione f nel generico punto di ascissa $x \in \mathbb{R}$. Abbiamo:

$$
\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + h^2 + 2hx - x^2}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{h^2 + 2hx}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} (h + 2x) \\
&= 2x
\end{aligned}
$$

Dunque la funzione è derivabile per ogni $x \in \mathbb{R}$ e risulta: $f'(x) = 2x$. □

Derivata seconda

Una volta calcolata la funzione f', derivata di una funzione f, possiamo trovare l'insieme dove f' è a sua volta derivabile e calcolare la derivata di f', che si chiama *derivata seconda* di f e che indicheremo con il simbolo f''. Una funzione si dice *derivabile due volte in* a se f e f' sono derivabili in a.

3.2 DERIVATE DELLE FUNZIONI ELEMENTARI

In pratica, il calcolo delle derivate non viene effettuato con la definizione (come limite del rapporto incrementale), perché sarebbe troppo laborioso. Si ricorre invece alla tabella delle derivate delle funzioni elementari e ad alcune regole di derivazione, che saranno oggetto del prossimo paragrafo.

La derivata delle funzioni potenza

La funzione potenza $f(x) = x^n$ è derivabile per ogni $x \in \mathbb{R}$ e per ogni n intero. Risulta:

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

Tabella 5: Derivate di funzioni elementari

(a) Formule generali

Funzione	Derivata
c (costante), $c \in \mathbb{R}$	0
x^n, n intero	nx^{n-1}
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$

(b) Alcuni casi particolari

Funzione	Derivata
1	0
x	1
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
x^4	$4x^3$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$

Per esempio:

- la derivata di $f(x) = x^2$ è $f'(x) = 2x^{2-1}$, cioè $f'(x) = 2x$
- la derivata di $f(x) = x^3$ è $f'(x) = 3x^{3-1}$, cioè $f'(x) = 3x^2$
- la derivata di $f(x) = x^4$ è $f'(x) = 4x^{4-1}$, cioè $f'(x) = 4x^3$

La tabella 5a riporta le derivate delle funzioni elementari più usate, mentre la tabella 5b mette in evidenza alcuni casi particolari che si usano di frequente.

Esercizio 57. Calcola la derivata della funzione $f(x) = x^{10}$.

Soluzione.

$$f'(x) = 10x^{10-1} = 10x^9$$

□

3.3 ALGEBRA DELLE DERIVATE

In questo paragrafo esaminiamo le relazioni tra l'operazione di derivazione e le operazioni algebriche tra funzioni. L'obiettivo sarà quello di stabilire delle regole di derivazione che, note le derivate di due funzioni f e g, ci consentano di dedurre le derivate delle funzioni:

$$f \pm g \qquad f \cdot g \qquad f/g$$

Linearità della derivata

L'operazione di derivazione si comporta «bene» rispetto all'addizione di due funzioni e alla moltiplicazione per una costante. Valgono infatti le seguenti proposizioni.

Proposizione 8. Siano f e g due funzioni derivabili in x; allora anche la funzione $f+g$ è derivabile in x e vale la formula:

$$D[f(x) \pm g(x)] = f'(x) \pm g'(x)$$

Proposizione 9. Sia f una funzione derivabile in x, e sia c una costante; allora anche la funzione $c \cdot f$ è derivabile in x e risulta:

$$D[c \cdot f(x)] = c \cdot f'(x)$$

Ciò si esprime dicendo che l'operazione di derivazione è *lineare*.

Esercizio 58. Calcola la derivata di $f(x) = x^2 + x^3$.

Soluzione. Basta ricordare le derivate delle funzioni elementari e applicare la proposizione 8.

$$f'(x) = D(x^2 + x^3) = D(x^2) + D(x^3) = 2x + 3x^2 \qquad \square$$

Esercizio 59. Calcola la derivata di $f(x) = 3x^2$.

Soluzione. Basta ricordare le derivate delle funzioni elementari e applicare la proposizione 9.

$$f'(x) = D(3x^2) = 3 \cdot D(x^2) = 3 \cdot 2x = 6x \qquad \square$$

Esercizio 60. Calcola la derivata di $f(x) = 2x^3 + 3x^2$.

Soluzione. Basta ricordare le derivate delle funzioni elementari e applicare la proprietà di linearità della derivata.

$$\begin{aligned} f'(x) &= D(2x^3 + 3x^2) \\ &= D(2x^3) + D(3x^2) = 2 \cdot D(x^3) + 3 \cdot D(x^2) = 2 \cdot 3x^2 + 3 \cdot 2x = 6x^2 + 6x \end{aligned} \qquad \square$$

Derivata del prodotto di due funzioni

Rispetto al prodotto di funzioni l'operazione di derivazione non si comporta bene come rispetto alla somma: la derivata del prodotto di due funzioni, infatti, *non* è il prodotto delle derivate dei due fattori, come ci si può rendere conto considerando le due funzioni $f(x) = g(x) = x$. Abbiamo infatti $f(x) \cdot g(x) = x^2$, quindi

$$D[f(x) \cdot g(x)] = D(x^2) = 2x \quad \text{mentre} \quad f'(x) \cdot g'(x) = 1 \cdot 1 = 1$$

Il legame fra la derivata del prodotto e le derivate dei fattori è espresso nella seguente proposizione.

Proposizione 10. Siano f e g due funzioni derivabili in x; allora la funzione $f \cdot g$ è derivabile in x e vale la formula:

$$D[f(x) \cdot g(x)] = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

In parole povere: «la derivata del prodotto di due funzioni è uguale alla derivata della prima funzione moltiplicata per la seconda, più la prima funzione moltiplicata per la derivata della seconda».

Esercizio 61. Calcola la derivata di $f(x) = x^3 \ln x$.

Soluzione.

$$f'(x) = (x^3)' \cdot \ln x + x^3 \cdot (\ln x)' = (3x^2) \cdot \ln x + x^3 \cdot \frac{1}{x} = 3x^2 \ln x + x^2 \qquad \square$$

Derivata del quoziente di due funzioni

Anche la derivata del *quoziente* di due funzioni *non* è il quoziente delle derivate (sai trovare un controesempio?).

Il legame tra le derivate di f e di g e la derivata di f/g è espresso nella prossima proposizione.

Proposizione 11. Siano f e g due funzioni derivabili in x e sia $g(x) \neq 0$; allora la funzione f/g è derivabile in x e risulta:

$$D\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

Esercizio 62. Calcola la derivata di $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$.

Soluzione.

$$f'(x) = \frac{x' \cdot (x-1) - x \cdot (x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{1 \cdot (x-1) - x \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{x-1-x}{(x-1)^2} = -\frac{1}{(x-1)^2} \qquad \square$$

Derivata della potenza di una funzione

Consideriamo la funzione:

$$y = (x^3 + 1)^4$$

Le regole di derivazione che abbiamo imparato finora non permettono di calcolarne la derivata in modo semplice. Per calcolare la derivata è utile la seguente formula, che generalizza la regola di derivazione di una potenza nel caso in cui la base è diversa da x:

$$D[f(x)]^n = n \cdot [f(x)]^{n-1} \cdot f'(x)$$

La derivata della funzione si calcola dunque nel modo seguente:

$$\underbrace{D[(x^3+1)^4]}_{\substack{\text{derivata della}\\ \text{potenza di una funzione}}} = \underbrace{4 \cdot (x^3+1)^3}_{\substack{\text{derivata della potenza}\\ \text{valutata nella base}}} \cdot \underbrace{3x^2}_{\substack{\text{derivata}\\ \text{della base}}} = 12x^2(x^3+1)^3$$

Esercizio 63. Calcola la derivata della funzione $f(x) = (x^2 + 1)^3$.

Soluzione.

$$D[(x^2+1)^3] = 3 \cdot (x^2+1)^2 \cdot (x^2+1)' = 3 \cdot (x^2+1)^2 \cdot 2x = 6x(x^2+1)^2 \qquad \square$$

Riepilogo

Con la regole di derivazione della potenza di una funzione abbiamo concluso la presentazione delle regole di calcolo delle derivate. La tabella 6 riassume tutte le formule e le regole di derivazione che abbiamo incontrato.

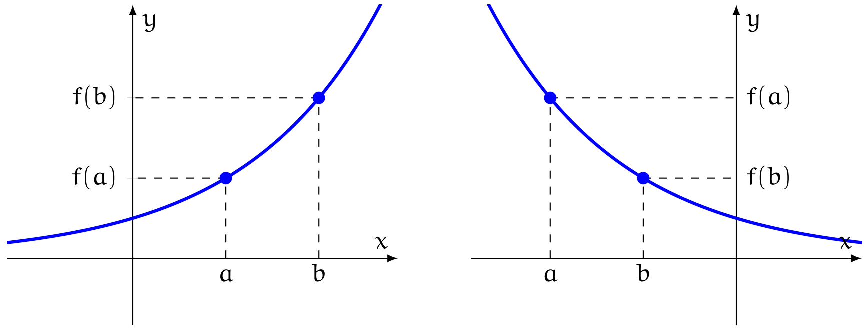
Tabella 6: Riepilogo sulle derivate

(a) Derivate fondamentali

Funzione	**Derivata**
c (costante), $c \in \mathbb{R}$	0
x^n, n intero	nx^{n-1}
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
e^x	e^x
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$

(b) Principali regole di derivazione

Funzione	**Derivata**
$f(x) + g(x)$	$f'(x) + g'(x)$
$c \cdot f(x)$	$c \cdot f'(x)$
$f(x) \cdot g(x)$	$f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
$\dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$
$[f(x)]^n$	$n \cdot [f(x)]^{n-1} \cdot f'(x)$



(a) Una funzione crescente: per ogni $a < b$ risulta che $f(a) < f(b)$

(b) Una funzione decrescente: per ogni $a < b$ risulta che $f(a) > f(b)$

Figura 30: Funzioni crescenti e decrescenti

3.4 FUNZIONI CRESCENTI E DECRESCENTI

Questo paragrafo mette in luce alcune relazioni che legano le proprietà della derivata prima di una funzione alle caratteristiche del grafico della funzione.

Definizione 19. Sia I un sottoinsieme del dominio della funzione $y = f(x)$:

- f è **crescente** in I se $a < b$ implica $f(a) < f(b)$ per ogni $a, b \in I$
- f è **decrescente** in I se $a < b$ implica $f(a) > f(b)$ per ogni $a, b \in I$

Vedi la figura 30. Cominciamo a evidenziare un legame tra il segno della derivata di una funzione e gli intervalli in cui la funzione cresce o decresce.

Proposizione 12. Sia f una funzione derivabile in un intervallo I:

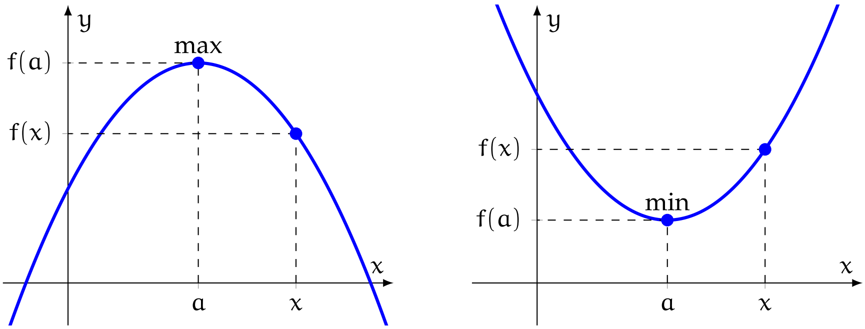
- se $f'(x) > 0$ per ogni $x \in I$, allora f è crescente in I
- se $f'(x) < 0$ per ogni $x \in I$, allora f è decrescente in I

La proposizione precedente è lo strumento comunemente impiegato per individuare gli intervalli in cui una funzione è crescente o decrescente: basta calcolare la derivata prima e studiarne il segno, risolvendo la disequazione $f'(x) \geqslant 0$.

Esercizio 64. Data la funzione $f(x) = x^3 - 3x$ trova gli intervalli in cui è crescente e quelli in cui è decrescente.

Soluzione. Calcoliamo la derivata della funzione:

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$



(a) La funzione ha un massimo in a **(b)** La funzione ha un minimo in a

Figura 31: Massimi e minimi

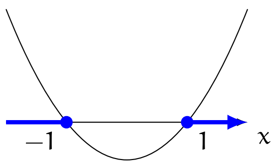
Studiamo il segno della derivata:

$$3x^2 - 3 \geqslant 0$$

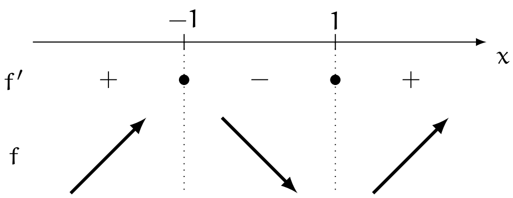
Risolviamo l'equazione associata:

$$3x^2 - 3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad 3x^2 = 3 \quad \Longrightarrow \quad x^2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad x = \pm 1$$

Disegniamo la parabola associata.



Costruiamo la tabella dei segni della derivata:



dove abbiamo indicato con una freccia rivolta verso l'alto gli intervalli in cui la funzione è crescente e con una freccia rivolta verso il basso l'intervallo in cui la funzione è decrescente. Quindi la funzione:

- cresce se $x < -1 \vee x > 1$
- decresce se $-1 < x < 1$

Vedi la figura 32b. $\square$

Definizione 20.

- Una funzione ha un **massimo** in un punto a del proprio dominio se in un intorno I di a si ha che $f(a) \geqslant f(x)$ per ogni $x \in I$.
- Una funzione ha un **minimo** in un punto a del proprio dominio se in un intorno I di a si ha che $f(a) \leqslant f(x)$ per ogni $x \in I$.

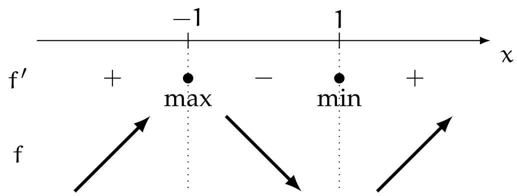
Vedi la figura 32. Dalla proposizione 12 segue un importante criterio per la ricerca dei massimi e dei minimi di una funzione.

Proposizione 13. Sia f una funzione derivabile in un intorno di a:

- se ci sono un intorno sinistro di a in cui $f' > 0$ e un intorno destro in cui $f' < 0$, allora a è un punto di massimo per f
- se ci sono un intorno sinistro di a in cui $f' < 0$ e un intorno destro in cui $f' > 0$, allora a è un punto di minimo per f

Esercizio 65. Trova i massimi e i minimi della funzione $f(x) = x^3 - 3x$.

Soluzione. Riprendiamo l'esercizio 64 e la tabella dei segni della derivata. Per la proposizione precedente, si ha che -1 è un punto di massimo, mentre 1 è un punto di minimo per la funzione.



Calcoliamo l'ordinata del punto di massimo e del punto di minimo:

$$f(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) = -1 + 3 = 2 \qquad f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 = 1 - 3 = -2$$

La figura 32b riporta il grafico della funzione con le nuove informazioni. □

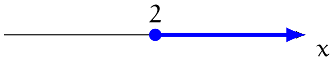
Esercizio 66. Data la funzione $f(x) = x^2 - 4x + 3$ trova gli intervalli in cui è crescente e quelli in cui è decrescente, i massimi e minimi.

Soluzione. Calcoliamo la derivata della funzione:

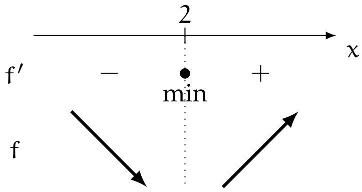
$$f'(x) = 2x - 4$$

Studiamo il segno della derivata:

$$2x - 4 \geqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad x \geqslant 2$$



Costruiamo la tabella dei segni della derivata.



Quindi la funzione:

- decresce se $x < 2$
- cresce se $x > 2$
- ha un minimo in $x = 2$

Calcoliamo l'ordinata del punto di minimo:

$$f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = 4 - 8 + 3 = -1$$

La figura 32a riporta il grafico della funzione con le nuove informazioni. □

Esercizio 67. Data la funzione $f(x) = x^3 - 3x$ trova gli intervalli in cui è crescente e quelli in cui è decrescente, e i massimi e minimi.

Soluzione. Vedi gli esercizi 64 e 65, e la figura 32b. □

Esercizio 68. Data la funzione $f(x) = x^4 - 2x^2$ trova gli intervalli in cui è crescente e quelli in cui è decrescente, e i massimi e minimi.

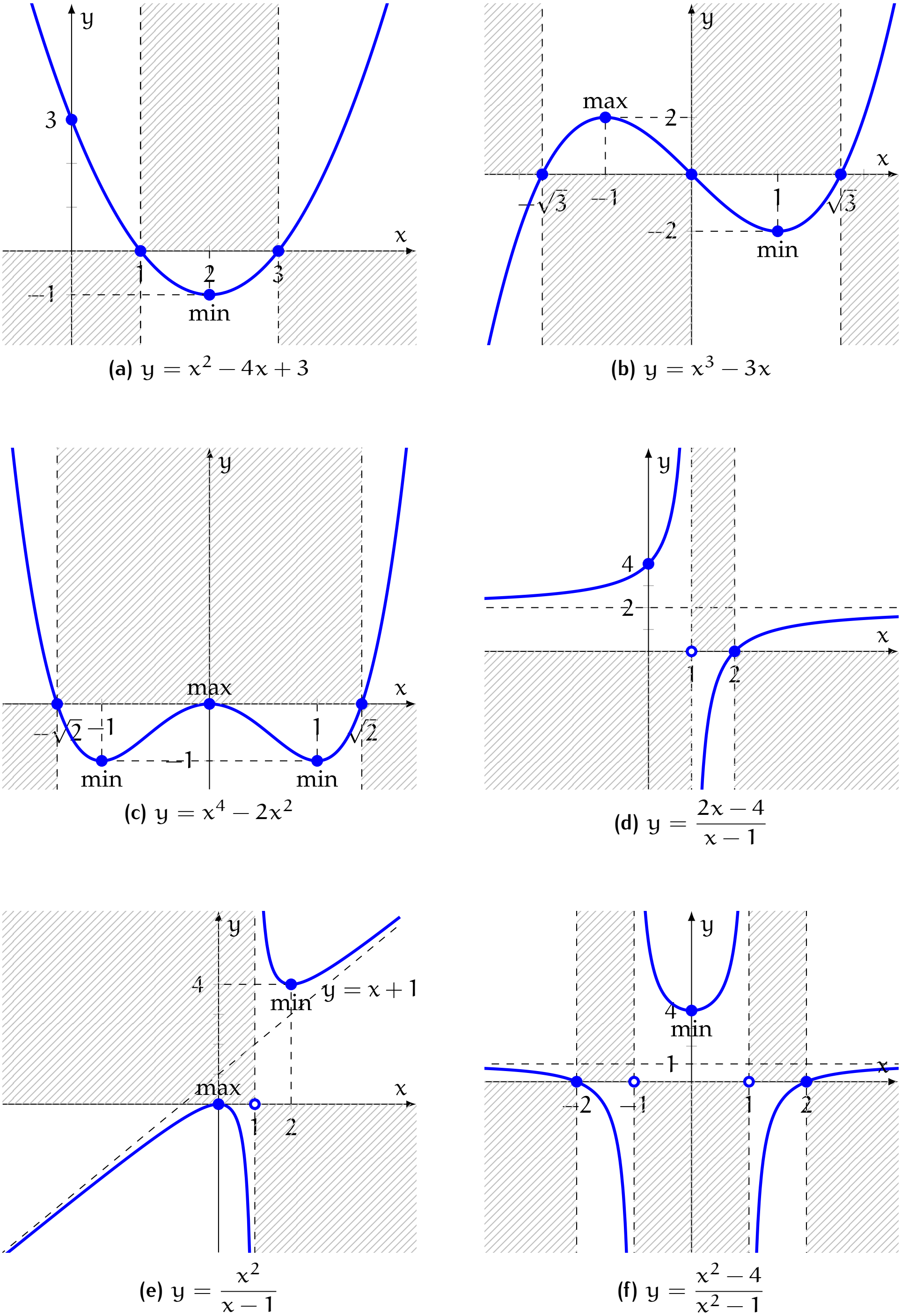
Soluzione. Calcoliamo la derivata della funzione:

$$f'(x) = 4x^3 - 4x$$

Studiamo il segno della derivata:

$$4x^3 - 4x \geqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad x^3 - x \geqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad x(x-1)(x+1) \geqslant 0$$

Studiamo il segno di ciascun fattore.



(a) $y = x^2 - 4x + 3$

(b) $y = x^3 - 3x$

(c) $y = x^4 - 2x^2$

(d) $y = \dfrac{2x - 4}{x - 1}$

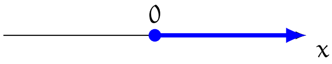
(e) $y = \dfrac{x^2}{x - 1}$

(f) $y = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 1}$

Figura 32: Massimi e minimi di alcune funzioni algebriche

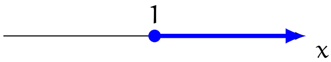
- Primo fattore:

$$x \geqslant 0$$



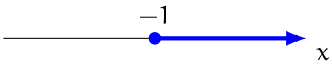
- Secondo fattore:

$$x - 1 \geqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad x \geqslant 1$$

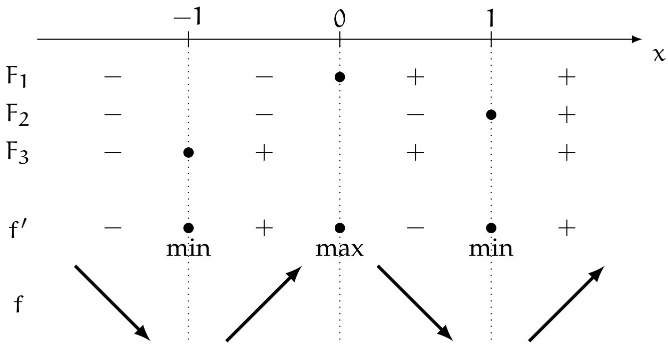


- Terzo fattore:

$$x + 1 \geqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad x \geqslant -1$$



Costruiamo la tabella dei segni della derivata.



Quindi la funzione:

- decresce se $x < -1 \vee 0 < x < 1$
- cresce se $-1 < x < 0 \vee x > 1$
- ha due minimi, uno in $x = -1$ e l'altro in $x = 1$
- ha un massimo in $x = 0$

Calcoliamo l'ordinata dei punti di minimo e del punto di massimo:

$$f(\pm 1) = (\pm 1)^4 - 2 \cdot (\pm 1)^2 = 1 - 2 = -1 \qquad f(0) = 0^4 - 2 \cdot 0^2 = 0$$

La figura 32c riporta il grafico della funzione con le nuove informazioni. □

Esercizio 69. Data la funzione $f(x) = \dfrac{2x-4}{x-1}$ trova gli intervalli in cui è crescente e quelli in cui è decrescente, e i massimi e minimi.

Soluzione. Calcoliamo la derivata della funzione:

$$f'(x) = \frac{2 \cdot (x-1) - (2x-4) \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{2x-2-2x+4}{(x-1)^2} = \frac{2}{(x-1)^2}$$

Studiamo il segno della derivata:

$$\frac{2}{(x-1)^2} \geqslant 0$$

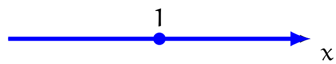
Studiamo il segno di numeratore e denominatore.

- Numeratore:

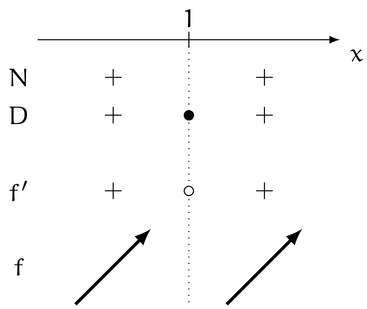
$$2 \geqslant 0$$

- Denominatore:

$$(x-1)^2 \geqslant 0$$



Costruiamo la tabella dei segni della derivata.



Quindi la funzione:

- cresce se $x < 1 \lor x > 1$
- non è definita in $x = 1$

La figura 32d riporta il grafico della funzione con le nuove informazioni. □

Esercizio 70. Data la funzione $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$ trova gli intervalli in cui è crescente e quelli in cui è decrescente, e i massimi e minimi.

Soluzione. Calcoliamo la derivata della funzione:

$$f'(x) = \frac{2x \cdot (x-1) - x^2 \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

Studiamo il segno della derivata:

$$\frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} \geqslant 0$$

Studiamo il segno di numeratore e denominatore.

- Numeratore:

  $$x^2 - 2x \geqslant 0$$

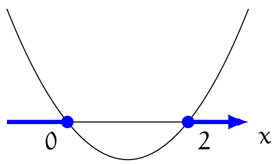
  Risolviamo l'equazione associata:

  $$x^2 - 2x = 0 \implies x(x-2) = 0$$

  da cui

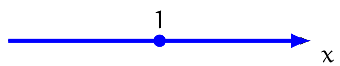
  $$x = 0 \quad \vee \quad x = 2$$

  Disegniamo la parabola associata.

- Denominatore:

  $$(x-1)^2 \geqslant 0$$

Costruiamo la tabella dei segni della derivata.

		0		1		2		x
N	+	•	−		−	•	+	
D	+		+	•	+		+	
f′	+	• max	−	∘	−	• min	+	
f	↗		↘		↘		↗	

Quindi la funzione:

- cresce se $x < 0 \vee x > 2$
- decresce se $0 < x < 1 \vee 1 < x < 2$
- ha un massimo in $x = 0$
- ha un minimo in $x = 2$
- non è definita in $x = 1$

Calcoliamo l'ordinata del punto di massimo e del punto di minimo:

$$f(0) = \frac{0^2}{0-1} = 0 \qquad f(2) = \frac{2^2}{2-1} = 4$$

La figura 32e riporta il grafico della funzione con le nuove informazioni. □

Esercizio 71. Data la funzione $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2-1}$ trova gli intervalli in cui è crescente e quelli in cui è decrescente, e i massimi e minimi.

Soluzione. Calcoliamo la derivata della funzione:

$$f'(x) = \frac{2x \cdot (x^2-1) - (x^2-4) \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{2x^3 - 2x - 2x^3 + 8x}{(x^2-1)^2} = \frac{6x}{(x^2-1)^2}$$

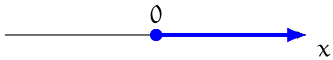
Studiamo il segno della derivata:

$$\frac{6x}{(x^2-1)^2} \geqslant 0$$

Studiamo il segno di numeratore e denominatore.

- Numeratore:

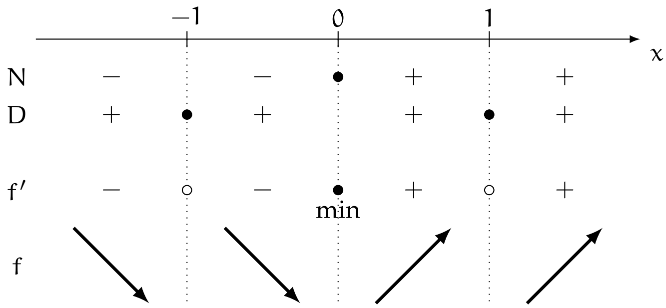
$$6x \geqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad x \geqslant 0$$



- Denominatore:

$$(x^2-1)^2 \geqslant 0$$

Costruiamo la tabella dei segni della derivata.



Quindi la funzione:

- decresce se $x < -1 \vee -1 < x < 0$
- cresce se $0 < x < 1 \vee x > 1$
- ha un minimo in $x = 0$
- non è definita in $x = \pm 1$

Calcoliamo l'ordinata del punto di minimo:

$$f(0) = \frac{0^2 - 4}{0^2 - 1} = 4$$

La figura 32f riporta il grafico della funzione con le nuove informazioni. □

3.5 FUNZIONI CONVESSE E CONCAVE

Nel paragrafo precedente abbiamo visto quali legami ci sono tra il grafico di una funzione e la sua derivata *prima*. In questo paragrafo mostreremo i legami tra il grafico di una funzione e la sua derivata *seconda*. Introduciamo innanzitutto le seguenti definizioni.

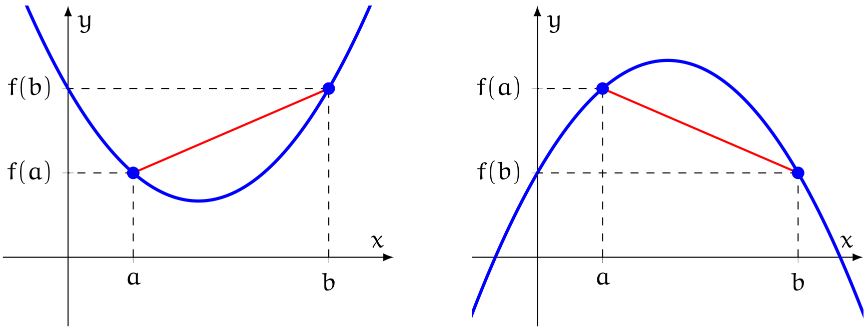
Definizione 21. Una funzione è **convessa** in un intervallo I se per ogni coppia di punti $a, b \in I$ il segmento che congiunge i punti $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ è *sopra* il grafico di f.

Definizione 22. Una funzione è **concava** in un intervallo I se per ogni coppia di punti $a, b \in I$ il segmento che congiunge i punti $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ è *sotto* il grafico di f.

Vedi la figura 33. La proposizione seguente, che enunciamo solo, fornisce una condizione sufficiente per stabilire se una funzione è concava o convessa in un intervallo studiandone il segno della derivata seconda.

Proposizione 14. Sia f una funzione derivabile due volte in un intervallo I:

- se $f''(x) > 0$ per ogni $x \in I$, allora f è convessa in I
- se $f''(x) < 0$ per ogni $x \in I$, allora f è concava in I



(a) Una funzione convessa **(b)** Una funzione concava

Figura 33: Funzioni concave e convesse

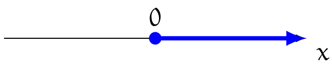
Esercizio 72. Data la funzione $y = x^3 - 3x$, trova gli intervalli in cui è convessa o concava.

Soluzione. La funzione è derivabile infinite volte nell'insieme dove è definita, quindi possiamo usare il criterio espresso dalla proposizione precedente. Calcoliamo la derivata seconda:

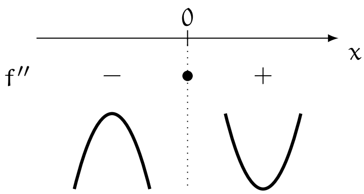
$$f'(x) = 3x^2 - 3 \qquad f''(x) = 6x$$

Studiamo il segno della derivata seconda:

$$6x \geqslant 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x \geqslant 0$$



Costruiamo la tabella dei segni della derivata seconda:



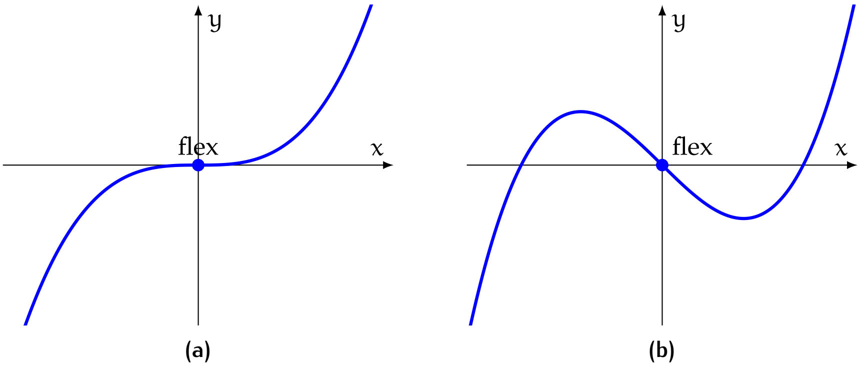


Figura 34: Le funzioni hanno entrambe un flesso nell'origine

dove abbiamo indicato con una parabola con la concavità rivolta verso l'alto l'intervallo in cui la funzione è convessa e con una parabola con la concavità rivolta verso il basso l'intervallo in cui la funzione è concava. Quindi la funzione:

- è concava se $x < 0$
- è convecssa se $x > 0$

Vedi la figura 35b. □

I concetti di funzione convessa e concava appena introdotti permettono di definire la nozione di *flesso*.

Definizione 23. Una funzione ha un **flesso** in un punto a del proprio dominio se in quel punto il grafico *cambia la concavità*.

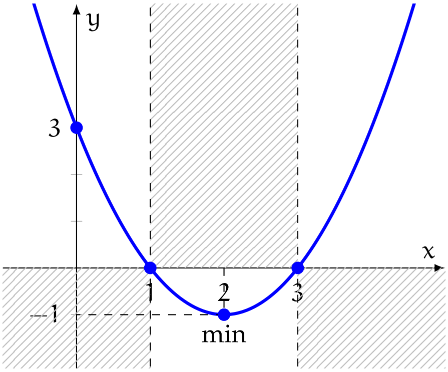
Dalla proposizione 14 segue un importante criterio per la ricerca dei flessi di una funzione.

Proposizione 15. Se a è un punto in cui f'' cambia segno, allora a è un punto di flesso.

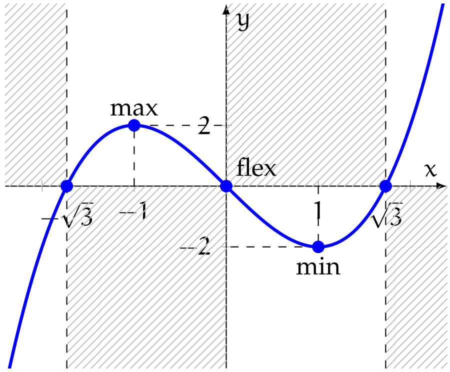
Quindi per trovare i punti di flesso di una funzione è sufficiente trovare gli intervalli in cui la funzione è convessa o concava risolvendo la disequazione $f''(x) \geqslant 0$: se esistono dei punti intorno ai quali f'' cambia segno, questi sono punti di flesso.

Esercizio 73. Trova i flessi della funzione $f(x) = x^3 - 3x$.

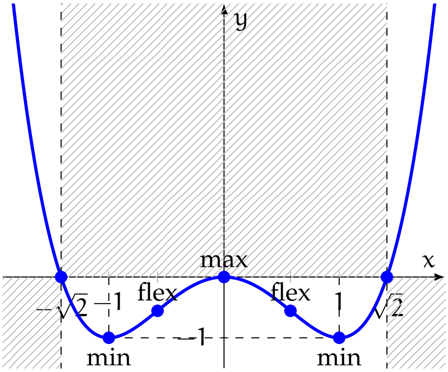
Soluzione. Riprendiamo l'esercizio 72 e la tabella dei segni della derivata seconda.



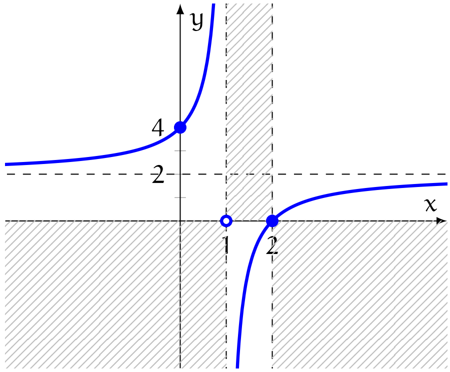
(a) $y = x^2 - 4x + 3$



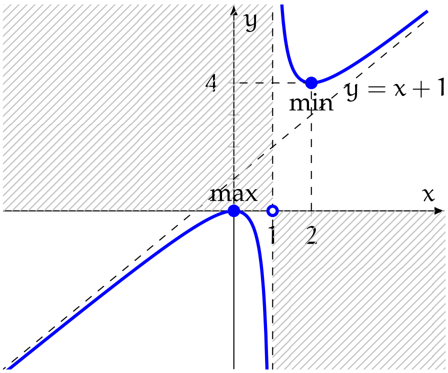
(b) $y = x^3 - 3x$



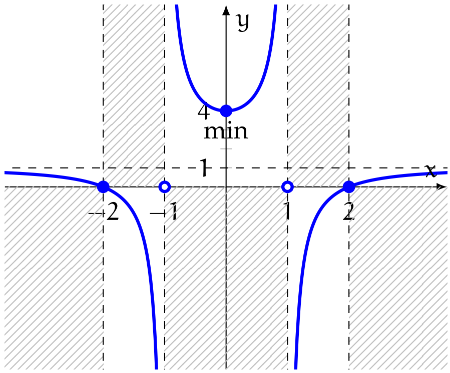
(c) $y = x^4 - 2x^2$



(d) $y = \dfrac{2x-4}{x-1}$

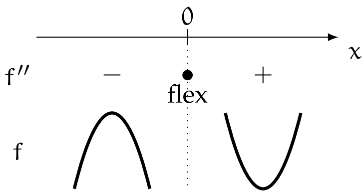


(e) $y = \dfrac{x^2}{x-1}$



(f) $y = \dfrac{x^2-4}{x^2-1}$

Figura 35: Flessi di alcune funzioni algebriche



Per la proposizione precedente, si ha che 0 è un punto di flesso per la funzione. Calcoliamo l'ordinata del flesso:

$$f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0 = 0$$

La figura 35b riporta il grafico della funzione con le nuove informazioni. □

Esercizio 74. Data la funzione $y = x^2 - 4x + 3$, trova gli intervalli in cui è convessa o concava, e i flessi.

Soluzione. Calcoliamo la derivata seconda:

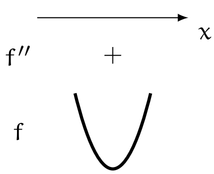
$$f' = 2x - 4 \qquad f'' = 2$$

Studiamo il segno della derivata seconda:

$$2 \geqslant 0$$

che è sempre verificata.

Costruiamo la tabella dei segni della derivata seconda.



Quindi la funzione:

- è sempre convessa
- non ha flessi

Vedi la figura 35a. □

Esercizio 75. Data la funzione $y = x^3 - 3x$, trova gli intervalli in cui è convessa o concava, e i flessi.

Soluzione. Vedi gli esercizi 72 e 73, e la figura 35b. □

Esercizio 76. Data la funzione $y = x^4 - 2x^2$, trova gli intervalli in cui è convessa o concava, e i flessi.

Soluzione. Calcoliamo la derivata seconda:

$$f' = 4x^3 - 4x \qquad f'' = 12x^2 - 4$$

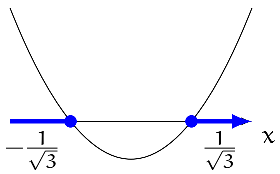
Studiamo il segno della derivata seconda:

$$12x^2 - 4 \geqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad 3x^2 - 1 \geqslant 0$$

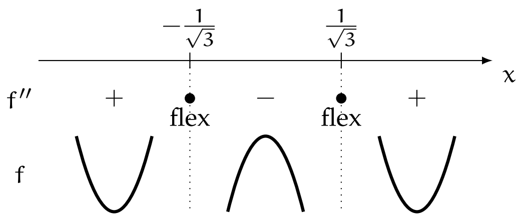
Risolviamo l'equazione associata:

$$3x^2 - 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x^2 = \frac{1}{3} \quad \Longrightarrow \quad x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Disegniamo la parabola associata.



Costruiamo la tabella dei segni della derivata seconda.



Quindi la funzione:

- è convessa se $x < -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \vee x > \dfrac{1}{\sqrt{3}}$
- è cobcava se $-\dfrac{1}{\sqrt{3}} < x < \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

- ha due flessi, uno in $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ e l'altro in $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Calcoliamo l'ordinata dei flessi:

$$f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4-2\cdot\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{1}{9}-2\cdot\frac{1}{3}=\frac{1-6}{9}=-\frac{5}{9}$$

La figura 35c riporta il grafico della funzione con le nuove informazioni. □

Esercizio 77. Data la funzione $y=\dfrac{2x-4}{x-1}$, trova gli intervalli in cui è convessa o concava, e i flessi.

Soluzione. Calcoliamo la derivata seconda:

$$f'=\frac{2}{(x-1)^2}\qquad\text{(vedi l'esercizio 69)}$$

$$f''=\frac{0\cdot(x-1)^2-2\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{-4(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{-4}{(x-1)^3}$$

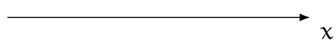
Studiamo il segno della derivata seconda:

$$\frac{-4}{(x-1)^3}\geqslant 0$$

Studiamo il segno di numeratore e denominatore.

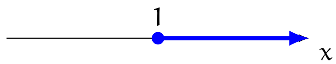
- Numeratore:

$$-4\geqslant 0$$

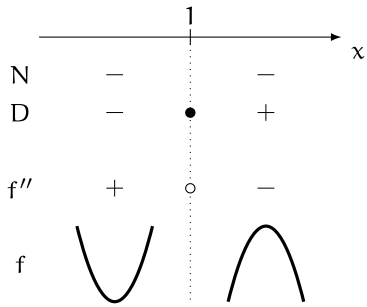


- Denominatore:

$$(x-1)^3\geqslant 0\quad\Longrightarrow\quad x-1\geqslant 0\quad\Longrightarrow\quad x\geqslant 1$$



Costruiamo la tabella dei segni della derivata seconda.



Quindi la funzione:

- è convessa se $x < 1$
- è concava se $x > 1$
- non ha flessi

Vedi la figura 35d. □

Esercizio 78. Data la funzione $y = \dfrac{x^2}{x-1}$, trova gli intervalli in cui è convessa o concava, e i flessi.

Soluzione. Calcoliamo la derivata seconda:

$$f' = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} \qquad \text{(vedi l'esercizio 70)}$$

$$\begin{aligned} f'' &= \frac{(2x-2)\cdot(x-1)^2 - (x^2-2x)\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} \\ &= \frac{2(x-1)\cdot(x-1)^2 - (x^2-2x)\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} \\ &= \frac{2(x-1)\cdot\left[(x-1)^2 - (x^2-2x)\right]}{(x-1)^4} \\ &= \frac{2(x-1)(x^2-2x+1-x^2+2x)}{(x-1)^4} = \frac{2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{2}{(x-1)^3} \end{aligned}$$

Studiamo il segno della derivata seconda:

$$\frac{2}{(x-1)^3} \geqslant 0$$

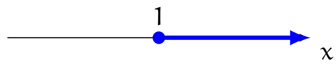
Studiamo il segno di numeratore e denominatore.

- Numeratore:

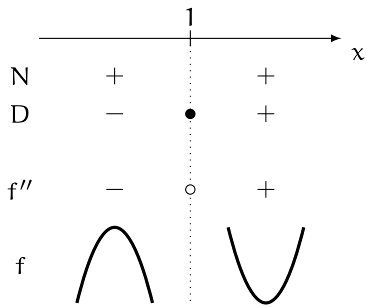
$$2 \geqslant 0$$

- Denominatore:

$$(x-1)^3 \geqslant 0 \implies x-1 \geqslant 0 \implies x \geqslant 1$$



Costruiamo la tabella dei segni della derivata seconda.



Quindi la funzione:

- è concava se $x < 1$
- è convessa se $x > 1$
- non ha flessi

Vedi la figura 35e. □

Esercizio 79. Data la funzione $y = \dfrac{x^2-4}{x^2-1}$, trova gli intervalli in cui è convessa o concava, e i flessi.

Soluzione. Calcoliamo la derivata seconda:

$$f' = \frac{6x}{(x^2-1)^2} \qquad \text{(vedi l'esercizio 71)}$$

$$\begin{aligned}
f'' &= \frac{6 \cdot (x^2-1)^2 - 6x \cdot 2(x^2-1)2x}{(x^2-1)^4} \\
&= \frac{6(x^2-1)^2 - 24x^2(x^2-1)}{(x^2-1)^4} \\
&= \frac{(x^2-1) \cdot \left[6(x^2-1) - 24x^2\right]}{(x^2-1)^4} \\
&= \frac{6(x^2-1) - 24x^2}{(x^2-1)^3} = \frac{6x^2 - 6 - 24x^2}{(x^2-1)^3} = \frac{-18x^2-6}{(x^2-1)^3}
\end{aligned}$$

Studiamo il segno della derivata seconda:

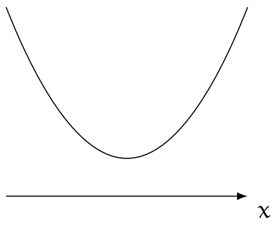
$$\frac{-18x^2-6}{(x^2-1)^3} \geqslant 0$$

Studiamo il segno di numeratore e denominatore.

- Numeratore:

  $$-18x^2 - 6 \geqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad 18x^2 + 6 \leqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad 3x^2 + 1 \leqslant 0$$

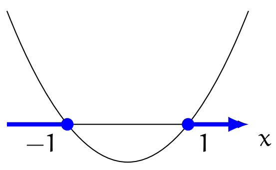
  Disegniamo la parabola associata.

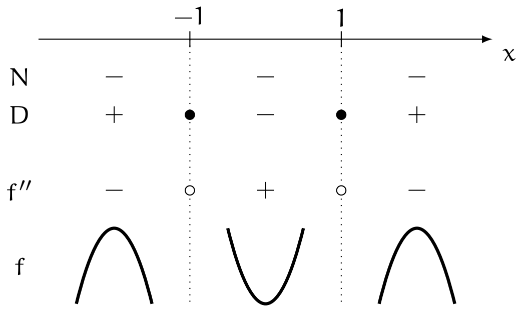
- Denominatore:

  $$(x^2-1)^3 \geqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad x^2 - 1 \geqslant 0$$

  Disegniamo la parabola associata.

Costruiamo la tabella dei segni della derivata seconda.



Quindi la funzione:

- è concava se $x < -1 \vee x > 1$
- è convessa se $-1 < x < 1$
- non è definita se $x = \pm 1$
- non ha flessi

Vedi la figura 35f. $\square$

3.6 ESERCIZI

Chi non risolve esercizi non impara la matematica.

1 Vero o falso?

a. In ogni punto in cui la funzione è definita esiste la derivata. V F

b. La derivata di una funzione in un punto non può essere zero. V F

c. Se una funzione è continua in a, allora è derivabile in a. V F

d. Se una funzione è derivabile in a, allora è continua in a. V F

e. La derivata della somma di due funzioni derivabili è la somma delle derivate. V F

f. La derivata della differenza di due funzioni derivabili è la differenza delle derivate. V F

g. La derivata del prodotto di due funzioni derivabili è il prodotto delle derivate. V F

h. La derivata del quoziente di due funzioni derivabili è il quoziente delle derivate. V F

i. La derivata del prodotto di una costante per una funzione derivabile è il prodotto della costante per la derivata della funzione. V F

j. La derivata di una funzione in un punto è il coefficiente angolare della retta tangente al grafico della funzione in quel punto. V F

[5 affermazioni vere e 5 false]

2 Indica la risposta corretta.

a. Per calcolare in base alla definizione la derivata della funzione $y = f(x)$ nel punto $a = 2$, quale dei seguenti limiti occorre calcolare?

A $\lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h}$

B $\lim_{h\to 0} \frac{f(2-h)-f(2)}{h}$

C $\lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(h)}{h}$

D $\lim_{h\to 0} \frac{f(2-h)-f(h)}{h}$

b. Per calcolare in base alla definizione la derivata della funzione $y = f(x)$ nel punto $a = 0$, quale dei seguenti limiti occorre calcolare?

A $\lim_{h\to 0} \frac{f(h)+f(0)}{h}$ B $\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h}$ C $\lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h}$ D $\lim_{h\to 0} \frac{f(-h)}{h}$

c. Per calcolare in base alla definizione la derivata della funzione $y = x^2$ nel punto $a = -2$, quale dei seguenti limiti occorre calcolare?

A $\lim_{h\to 0} \frac{h^2+4}{h}$ C $\lim_{h\to 0} \frac{(-2+h)^2-4}{h}$

B $\lim_{h\to 0} \frac{(-2+h)^2+4}{h}$ D $\lim_{h\to 0} \frac{h^2-4}{h}$

d. Per calcolare in base alla definizione la derivata nel punto $x = 0$ di una funzione $y = f(x)$ tale che $f(0) = 0$, quale dei seguenti limiti occorre calcolare?

A $\lim_{h\to 0} \frac{f(-h)}{h}$ B $\lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{-h}$ C $\lim_{h\to 0} \frac{-f(h)}{h}$ D $\lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h}$

[Una risposta A, una B, una C e una D]

3 Ciascuno dei limiti riportati nella prima colonna rappresenta la derivata di una funzione f in un punto a indicato. Fai le associazioni corrette.

a. $\lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^3-8}{h}$ A. $f(x) = x^2$, $a = 4$

b. $\lim_{h\to 0} \frac{(-2+h)^3+8}{h}$ B. $f(x) = x^2$, $a = -4$

c. $\lim_{h\to 0} \frac{(4+h)^2-16}{h}$ C. $f(x) = x^3$, $a = 2$

d. $\lim_{h\to 0} \frac{(-4+h)^2-16}{h}$ D. $f(x) = x^3$, $a = -2$

4 Vero o falso?

a. La derivata di $y = x^2$ è $2x$ V F

b. La derivata di $y = 5x$ è 5 V F

c. La derivata di $y = 5$ è $5x$ V F

d. La derivata di $y = 2x$ è x^2 V F

e. La derivata di $y = 2$ è 0 V F

f. La derivata di $y = \frac{1}{x}$ è $\frac{1}{x^2}$ V F

g. La derivata di $y = x$ è 0 V F

[3 affermazioni vere e 4 false]

Calcola la derivata delle seguenti funzioni, usando la proprietà di linearità della derivata.

5 $y = x^3 + 1$ $[3x^2]$

6 $y = x + x^2$ $[1 + 2x]$

7 $y = -3x^2 + x^4$ $[-6x + 4x^3]$

8 $y = 4x^3 - 3x^2$ $[12x^2 - 6x]$

9 $y = \ln x + x$ $\left[\frac{1}{x} + 1\right]$

10 $y = x^2 - 2\ln x + e^x$ $\left[2x - \frac{2}{x} + e^x\right]$

11 $y = x^3 - 2\ln x$ $\left[3x^2 - \frac{2}{x}\right]$

12 $y = e^x - \ln x$ $\left[e^x - \frac{1}{x}\right]$

Calcola la derivata delle seguenti funzioni, usando la formula della derivata del prodotto.

13 $y = (x^2+1)(x+1)$ $[3x^2+2x+1]$

14 $y = (x^2-1)(x^2+3)$ $[4x^3+4x]$

15 $y = (x+2)(x^2-1)$ $[3x^2+4x-1]$

16 $y = (e^x+1)e^x$ $[(2e^x+1)e^x]$

17 $y = x^2 \ln x$ $[x(1+2\ln x)]$

18 $y = x^2 \ln x$ $[x(1+2\ln)]$

19 $y = xe^x$ $[(x+1)e^x]$

20 $y = x\ln x$ $[\ln x+1]$

21 $y = x^2e^x$ $[(x^2+2x)e^x]$

22 $y = e^x(x^2-2x+3)$ $[e^x(x^2+1)]$

Calcola la derivata delle seguenti funzioni, usando la formula della derivata del quoziente.

23 $y = \dfrac{x+1}{x-1}$ $\left[-\dfrac{2}{(x-1)^2}\right]$

24 $y = \dfrac{x}{x-2}$ $\left[-\dfrac{2}{(x-2)^2}\right]$

25 $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-4}$ $\left[-\dfrac{10x}{(x^2-4)^2}\right]$

26 $y = \dfrac{1}{x^2+1}$ $\left[-\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}\right]$

27 $y = \dfrac{x^3}{x^2+1}$ $\left[-\dfrac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2}\right]$

28 $y = \dfrac{2x-1}{x+3}$ $\left[\dfrac{7}{(x+3)^2}\right]$

29 $y = \dfrac{x^2}{x+3}$ $\left[\dfrac{x^2+6x}{(x+3)^2}\right]$

30 $y = \dfrac{x^3+1}{x-2}$ $\left[\dfrac{2x^3-6x^2-1}{(x-2)^2}\right]$

31 $y = \dfrac{2x^2-3}{3x^2-1}$ $\left[\dfrac{14x}{(3x^2-1)^2}\right]$

32 $y = \dfrac{2x^3}{x^2+1}$ $\left[\dfrac{2x^4+6x^2}{(x^2+1)^2}\right]$

33 $y = \dfrac{\ln x}{x^3}$ $\left[\dfrac{1-3\ln x}{x^4}\right]$

34 $y = \dfrac{e^x}{e^x-1}$ $\left[-\dfrac{e^x}{(e^x-1)^2}\right]$

35 $y = \dfrac{x^2}{x+e^x}$ $\left[\dfrac{x^2-xe^x(x-2)}{(x+e^x)^2}\right]$

36 $y = \dfrac{e^x}{\ln x-1}$ $\left[\dfrac{e^x(x\ln x-x-1)}{x(\ln x-1)^2}\right]$

Calcola la derivata delle seguenti funzioni, usando la formula della derivata della potenza di una funzione.

37 $y = (x^2+3)^2$ $[4x(x^2+3)]$

38 $y = (3x^2-1)^2$ $[12x(3x^2-1)]$

39 $y = (x^3+1)^3$ $[9x^2(x^3+1)^2]$

40 $y = (3x^2-1)^5$ $[30x(3x^2-1)^4]$

Calcola la derivata delle seguenti funzioni.

41 $y = 3x^2(x^3+1)$ $[15x^4+6x]$

42 $y = \dfrac{3x-1}{2x+5}$ $\left[\dfrac{17}{(2x+5)^2}\right]$

43 $y = \dfrac{x^2}{2x-1}$ $\left[\dfrac{2x^2-2x}{(2x-1)^2}\right]$

44 $y = \dfrac{x^3+1}{x^3-1}$ $\left[-\dfrac{6x^2}{(x^3-1)^2}\right]$

45 $y = (x-1)^2(x+1)$ $[3x^2-2x-1]$

46 $y = (1-e^x)x^2$ $[2x-xe^x(x+2)]$

47 $y = \dfrac{\ln x+1}{x^2}$ $\left[-\dfrac{1+2\ln x}{x^3}\right]$

48 $y = xe^x+x^2$ $[e^x(x+1)+2x]$

49 $y = \dfrac{e^x}{x^2+1}$ $\left[\dfrac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2}\right]$

50 $y = x^2(x^3+1)$ $[5x^4+2x]$

51 $y = \dfrac{x^2+x^3}{x^4}$ $\left[-\dfrac{x+2}{x^3}\right]$

52 $y = e^x(x+1)^2$ $[e^x(x+1)(x+3)]$

53 $y = \dfrac{\ln x}{x^2}$ $\left[\dfrac{1-2\ln x}{x}\right]$

54 $y = \dfrac{x^2}{2x+1}$ $\left[\dfrac{2x^2+2x}{(2x+1)^2}\right]$

55 $y = x^3(x^2+2)$ $[5x^4+6x^2]$

56 $y = \dfrac{x^3+1}{2x}$ $\left[\dfrac{2x^3-1}{2x^2}\right]$

Trova gli intervalli dove le seguenti funzioni sono crescenti o decrescenti, e i massimi e minimi (nelle risposte sono indicati gli intervalli in cui ciascuna funzione è crescente e le ascisse dei massimi e minimi).

57 $y = x^2-3x+2$ $\left[x > \dfrac{3}{2}\text{; minimo per } x = \dfrac{3}{2}\right]$

58 $y = x^3-3x$ $[x < -1 \vee x > 1\text{; massimo per } x = -1 \text{ e minimo per } x = 1]$

59 $y = x^4-2x^2$ $[-1 < x < 0 \vee x > 1\text{; minimi per } x = \pm 1\text{, massimo per } x = 0]$

60 $y = 2x^3+3x^2+6x$ $[\text{crescente per ogni } x \in \mathbb{R}]$

61 $y = \dfrac{2}{3}x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 - x$ $\left[x < -\dfrac{1}{2} \vee x > 1\text{; massimo per } x = -\dfrac{1}{2} \text{ e minimo per } x = 1\right]$

62 $y = -x^4-2x^2$ $[x < 0\text{; massimo per } x = 0]$

63 $y = 4x^3-x^4$ $[x < 3\text{; massimo per } x = 3]$

64 $y = x^3-3x^2+3x$ $[\text{crescente per ogni } x \in \mathbb{R}]$

65 $y = \dfrac{1}{4}x^4 - 2x^2$ $[-2 < x < 0 \vee x > 2\text{; minimi per } x = \pm 2\text{, massimo per } x = 0]$

66 $y = \dfrac{x^3}{x^2-4}$ $\left[x < -2\sqrt{3} \vee x > 2\sqrt{3}\text{; massimo per } x = -2\sqrt{3}\text{, minimo per } x = 2\sqrt{3}\right]$

67 $y = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ $[x > 0\text{; minimo per } x = 0]$

68 $y = \dfrac{x^2-4}{x^2-1}$ $[x > 0\text{, con } x \neq 1\text{; minimo per } x = 0]$

69 $y = \dfrac{1}{x^2-3x}$ $\left[x < 0 \vee 0 < x < \dfrac{3}{2}\text{; massimo per } x = \dfrac{3}{2}\right]$

70 $y = \dfrac{1-x^2}{x^3}$ $\left[x < -\sqrt{3} \vee x > \sqrt{3}\text{; massimo per } x = -\sqrt{3}\text{, minimo per } x = \sqrt{3}\right]$

71 $y = \dfrac{x}{x^2+9}$ $[-3 < x < -3\text{; massimo per } x = 3\text{, minimo per } x = -3]$

72 $y = \dfrac{2x+3}{x^2+4}$ $[-4 < x < 1\text{; minimo per } x = -4\text{, massimo per } x = 1]$

73 $y = \dfrac{x^2-4}{(x+1)^2}$ $[x < -4 \vee x > -1\text{; massimo per } x = -4]$

74 $y = \dfrac{x^3}{x^2-1}$ $\left[x < -\sqrt{3} \vee x > \sqrt{3}\text{; massimo per } x = -\sqrt{3}\text{, minimo per } x = \sqrt{3}\right]$

75 $y = x^4-4x^3$ $[x > 3\text{; minimo per } x = 3]$

76 $y = \dfrac{(x-1)^2}{(x+1)^3}$ $[1 < x < 5\text{; minimo per } x = 1\text{; massimo per } x = 5]$

77 $y = \dfrac{x}{x^2+4}$ $[-2 < x < 2\text{; massimo per } x = 2\text{; minimo per } x = -2]$

78 $y = \dfrac{x^2}{x+3}$ $\qquad [x < -6 \vee x > 0;\ \text{minimo per } x = 0;\ \text{massimo per } x = -6]$

79 $y = x(x-1)^2$ $\qquad \left[x < \dfrac{1}{3} \vee x > 1;\ \text{massimo per } x = \dfrac{1}{3},\ \text{minimo per } x = 1\right]$

80 $y = x^3(x-1)$ $\qquad \left[x > \dfrac{3}{4};\ \text{minimo per } x = \dfrac{3}{4}\right]$

81 $y = 4x^3 - x^2 - 14x$ $\qquad \left[x < -1 \vee x > \dfrac{7}{6};\ \text{massimo per } x = -1 \text{ e minimo per } x = \dfrac{7}{6}\right]$

Studia la concavità delle seguenti funzioni e trovane i flessi (nelle risposte sono indicati gli intervalli in cui ciascuna funzione è convessa e le ascisse dei flessi).

82 $y = x^3 - 3x^2$ $\qquad [x > 1;\ \text{flesso per } x = 1]$

83 $y = x^3 + 2x + 1$ $\qquad [x > 0;\ \text{flesso per } x = 0]$

84 $y = x^3 - 6x^2$ $\qquad [x > 2;\ \text{flesso per } x = 2]$

85 $y = 6x^2 - x^4$ $\qquad [-1 < x < 1;\ \text{flessi per } x = \pm 1]$

86 $y = x(x-1)^3$ $\qquad \left[x < -\dfrac{1}{2} \vee x > 1;\ \text{flessi per } x = \dfrac{1}{2} \vee x = 1\right]$

87 $y = x^4 - 4x^3$ $\qquad [x < 0 \vee x > 2;\ \text{flessi per } x = 0 \vee x = 2]$

88 $y = 3x^5 + 5x^4 - 20x^3$ $\qquad [-2 < x < 0 \vee x > 1;\ \text{flessi per } x = -2 \vee x = 0 \vee x = 1]$

89 $y = \dfrac{1}{12}x^4 - \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2$ $\qquad [\text{convessa per ogni } x \in \mathbb{R}]$

90 $y = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ $\qquad \left[-\dfrac{1}{\sqrt{3}} < x < \dfrac{1}{\sqrt{3}};\ \text{flessi per } x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right]$

91 $y = x^4 - 6x^2$ $\qquad [x < -1 \vee x > 1;\ \text{flessi per } x = \pm 1]$

92 $y = x^3 + 3x^2 - 1$ $\qquad [x > -1;\ \text{flesso per } x = -1]$

93 $y = x^4 - 12x^2$ $\qquad \left[x < -\sqrt{2} \vee x > \sqrt{2};\ \text{flessi per } x = \pm\sqrt{2}\right]$

94 $y = (x-2)^3$ $\qquad [x > 2;\ \text{flesso per } x = 2]$

95 $y = \dfrac{x^2-1}{2x}$ $\qquad [x < 0;\ \text{non ci sono flessi}]$

96 $y = 4x^3 - x^2 - 14x$ $\qquad \left[x > \dfrac{1}{12};\ \text{flesso per } x = \dfrac{1}{12}\right]$

97 Indica la risposta corretta.

a. Sia f una funzione derivabile due volte in $\mathbb{R}$. Quale delle seguenti affermazioni è *falsa*?

- A Se la funzione è decrescente in $\mathbb{R}$, non può essere positiva in tutto $\mathbb{R}$.
- B Se la derivata prima è positiva in $\mathbb{R}$, la funzione è crescente in $\mathbb{R}$.
- C Se in un punto si annulla la derivata, allora quel punto può essere di flesso.
- D Se la derivata seconda è negativa in $\mathbb{R}$, la funzione è concava in $\mathbb{R}$.

Quale dei seguenti è un punto di massimo per la funzione $y = 3x - 2x^2$?

A $x = \frac{3}{4}$ B $x = \frac{4}{3}$ C $x = -\frac{3}{4}$ D $x = -\frac{4}{3}$

La funzione $y = \frac{x^2+2}{x^2-4}$ presenta per $x = 0$:

A un minimo B un massimo C un flesso D uno zero

Quale dei seguenti è un punto di flesso per la funzione $y = f(x) = 2x^2 - \frac{1}{3}x^3$?

A $x = 0$ B $x = 1$ C $x = 2$ D f non ha flessi

Quale dei seguenti è un punto di flesso per la funzione $y = f(x) = x^4 + 6x^2$?

A $x = -1$ B $x = 0$ C $x = 1$ D f non ha flessi

[Due risposte A, una B, una C e una D]

98 Data la funzione $y = x^3 + x^2 + x + 1$, verifica che è crescente e che ha un flesso, che devi trovare. [$x = -1/3$]

99 Data la funzione $y = \frac{x}{x-2}$, verifica che è decrescente nei due intervalli $(-\infty, 2)$ e $(2, +\infty)$, studiane la concavità e stabilisci se ha flessi. [convessa per $x > 2$; non ha flessi]

100 Vero o falso?

a. La funzione $f(x) = -x^2$ è sempre concava in $\mathbb{R}$. V F

b. La funzione $f(x) = x^2$ ha un minimo per $x = 0$. V F

c. La funzione $f(x) = x^3$ è sempre crescente in $\mathbb{R}$. V F

d. La funzione $f(x) = x^3$ è sempre convessa in $\mathbb{R}$. V F

e. La funzione $f(x) = x^3 + x^2$ ha un massimo per $x = 0$. V F

[3 affermazioni vere e 2 false]

4 STUDIO DI FUNZIONE

Il nostro corso di matematica si è sviluppato attorno al concetto di funzione. Abbiamo introdotto varie classi di funzioni e ci siamo via via occupati di alcuni aspetti che riguardano lo studio di una funzione: la determinazione del dominio e dei punti di intersezione con gli assi, lo studio del segno e il riconoscimento di simmetrie (nel capitolo 1); lo studio del comportamento agli estremi del dominio e la ricerca degli asintoti (nel capitolo 2); la ricerca degli intervalli dove una funzione cresce o decresce e dove è concava o convessa (nel capitolo 3).

Questi capitolo non introduce concetti nuovi, ma affronta lo studio di funzione con gli strumenti introdotti nei capitoli precedenti. Affronteremo in modo completo due funzioni che ci hanno accompagnati fin qui.

4.1 FUNZIONI INTERE

Esercizio 80. Studia la funzione $y = x^4 - 2x^2$.

Dominio

Si tratta di una funzione intera, quindi il suo dominio è $\mathbb{R}$. Vedi la figura 36a.

Intersezioni con gli assi

- Troviamo le intersezioni con l'asse x:

  $$x^4 - 2x^2 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x^2(x^2 - 2) = 0$$

  Uguagliamo a zero i fattori:

  $$x^2 = 0 \quad \vee \quad x^2 - 2 = 0$$

  da cui

  $$x = 0 \quad \vee \quad x = \pm\sqrt{2}$$

  Quindi il grafico della funzione interseca l'asse x nei punti:

  $$(-\sqrt{2}, 0) \qquad (0, 0) \qquad (\sqrt{2}, 0)$$

- Troviamo le intersezioni con l'asse y.

$$f(0) = 0^4 - 2 \cdot 0^2 = 0$$

Quindi il grafico della funzione interseca l'asse y nel punto $(0, 0)$.

Vedi la figura 36b.

Segno

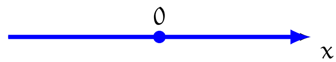
Per studiare il segno della funzione risolviamo la disequazione:

$$x^4 - 2x^2 \geqslant 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x^2(x^2 - 2) \geqslant 0$$

Studiamo il segno di ciascun fattore.

- Primo fattore:

$$x^2 \geqslant 0$$



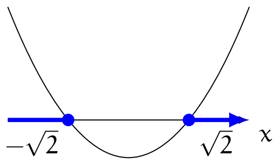
- Secondo fattore:

$$x^2 - 2 \geqslant 0$$

Risolviamo l'equazione associata:

$$x^2 - 2 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x = \pm\sqrt{2}$$

Disegniamo la parabola associata.



Costruiamo la tabella dei segni della funzione.

x		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$	
F_1	$+$		$+$	$\bullet$	$+$		$+$
F_2	$+$	$\bullet$	$-$		$-$	$\bullet$	$+$
f	$+$	$\bullet$	$-$	$\bullet$	$-$	$\bullet$	$+$

Quindi la funzione:

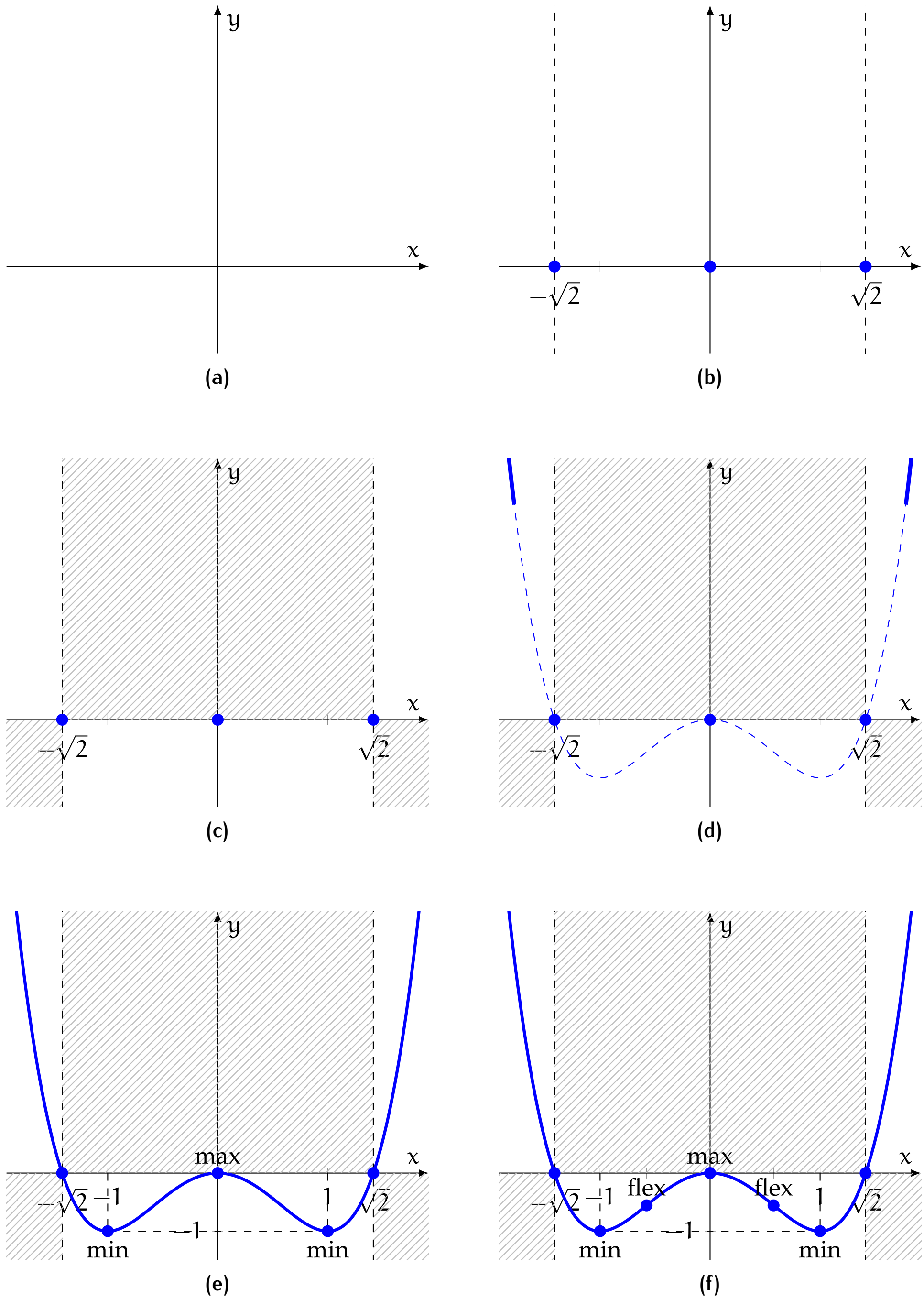


Figura 36: La funzione $y = x^4 - 2x^2$

- è positiva se $x < -\sqrt{2} \vee x > \sqrt{2}$
- è nulla se $x = -\sqrt{2} \vee x = 0 \vee x = \sqrt{2}$
- è negativa altrimenti

Vedi la figura 36c.

Simmetrie

Sostituiamo $-x$ al posto di x in $f(x)$:

$$f(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2 = x^4 - 2x^2 = f(x)$$

Concludiamo che la funzione è pari.

Limiti, asintoti e grafico probabile

Calcoliamo i limiti agli estremi del dominio.

$$\lim_{x \to \pm\infty} (x^4 - 2x^2) = \lim_{x \to \pm\infty} x^4 = +\infty$$

Poiché la funzione è intera non ci sono asintoti. Vedi la figura 36d.

Massimi e minimi

Calcoliamo la derivata della funzione:

$$f'(x) = 4x^3 - 4x$$

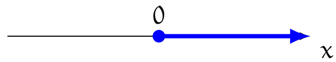
Studiamo il segno della derivata:

$$4x^3 - 4x \geqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad x^3 - x \geqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad x(x-1)(x+1) \geqslant 0$$

Studiamo il segno di ciascun fattore.

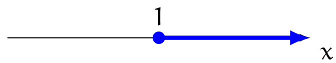
- Primo fattore:

$$x \geqslant 0$$



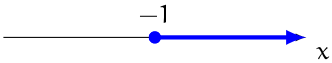
- Secondo fattore:

$$x - 1 \geqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad x \geqslant 1$$



- Terzo fattore:

$$x + 1 \geqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad x \geqslant -1$$



Costruiamo la tabella dei segni della derivata.

		-1		0		1		x
F_1	$-$		$-$	$\bullet$	$+$		$+$	
F_2	$-$		$-$		$-$	$\bullet$	$+$	
F_3	$-$	$\bullet$	$+$		$+$		$+$	
f'	$-$	$\bullet$ min	$+$	$\bullet$ max	$-$	$\bullet$ min	$+$	
f	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Quindi la funzione:

- decresce se $x < -1 \vee 0 < x < 1$
- cresce se $-1 < x < 0 \vee x > 1$
- ha due minimi, in $x = \pm 1$
- ha un massimo in $x = 0$

Calcoliamo l'ordinata dei punti di minimo e del punto di massimo:

$$f(\pm 1) = (\pm 1)^4 - 2 \cdot (\pm 1)^2 = 1 - 2 = -1 \qquad f(0) = 0^4 - 2 \cdot 0^2 = 0$$

Vedi la figura 36e.

Concavità e flessi

Calcoliamo la derivata seconda:

$$f' = 4x^3 - 4x \qquad f'' = 12x^2 - 4$$

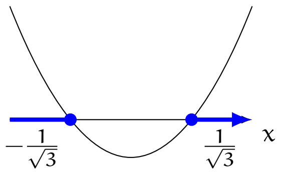
Studiamo il segno della derivata seconda:

$$12x^2 - 4 \geqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad 3x^2 - 1 \geqslant 0$$

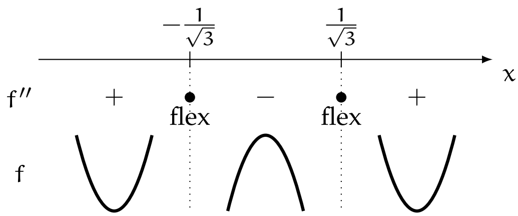
Risolviamo l'equazione associata:

$$3x^2 - 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x^2 = \frac{1}{3} \quad \Longrightarrow \quad x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Disegniamo la parabola associata.



Costruiamo la tabella dei segni della derivata seconda.



Quindi la funzione:

- volge la concavità verso l'alto se $x < -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \vee x > \dfrac{1}{\sqrt{3}}$
- volge la concavità verso il basso se $-\dfrac{1}{\sqrt{3}} < x < \dfrac{1}{\sqrt{3}}$
- ha due flessi, uno in $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ e l'altro in $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Calcoliamo l'ordinata dei flessi:

$$f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4 - 2\cdot\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{1}{9} - 2\cdot\frac{1}{3} = \frac{1-6}{9} = -\frac{5}{9}$$

Le figure 36f e 37 riportano il grafico della funzione con tutte le informazioni trovate.

4.2 FUNZIONI FRATTE

Esercizio 81. Studia la funzione $y = \dfrac{x^2}{x-1}$.

Dominio

È una funzione fratta, definita purché il suo denominatore sia diverso da zero:

$$x - 1 \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad x \neq 1$$

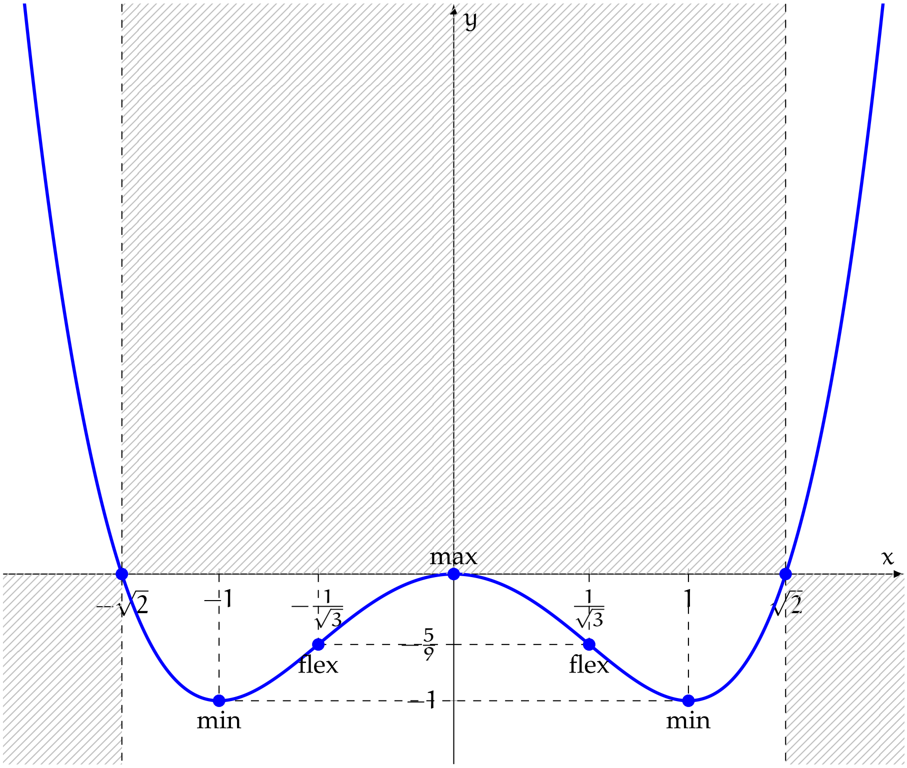


Figura 37: La funzione $y = x^4 - 2x^2$

Il dominio della funzione è perciò

$$\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{ 1 \}$$

Vedi la figura 38a.

Intersezioni con gli assi

- Troviamo le intersezioni con l'asse x:

$$\frac{x^2}{x-1} = 0$$

  da cui, eliminando il denominatore,

$$x^2 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x = 0$$

  valore accettabile in quanto appartiene al dominio della funzione. Quindi il grafico della funzione interseca l'asse x nel punto $(0, 0)$.

- Troviamo le intersezioni con l'asse y.

$$f(0) = \frac{0^2}{0-1} = 0$$

  Quindi il grafico della funzione interseca l'asse y nel punto $(0, 0)$.

Vedi la figura 38b.

Segno

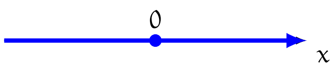
Per studiare il segno della funzione risolviamo la disequazione:

$$\frac{x^2}{x-1} \geqslant 0$$

Studiamo il segno del numeratore e del denominatore.

- Numeratore:

$$x^2 \geqslant 0$$



- Denominatore:

$$x - 1 \geqslant 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x \geqslant 1$$

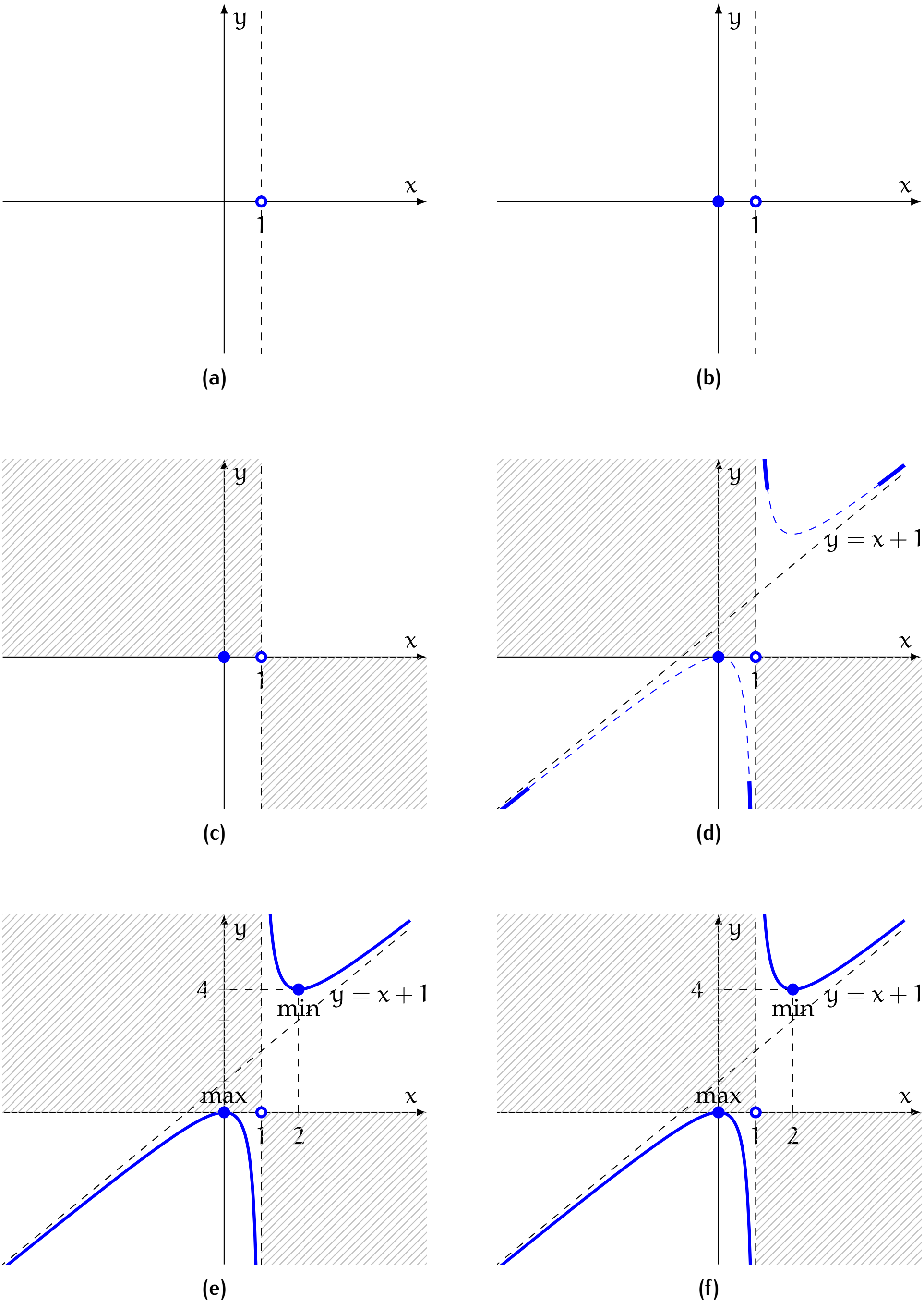
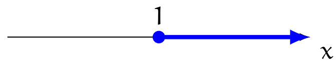
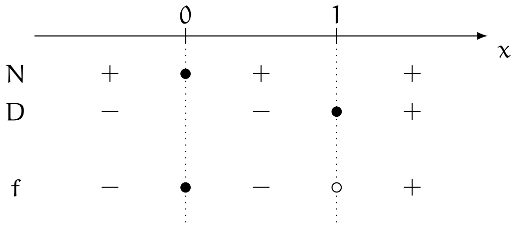


Figura 38: La funzione $y = \dfrac{x^2}{x-1}$



Costruiamo la tabella dei segni della funzione.



Quindi la funzione:

- è positiva se $x > 1$
- è nulla se $x = 0$
- non è definita se $x = 1$
- è negativa altrimenti

Vedi la figura 38c.

Limiti, asintoti e grafico probabile

- Calcoliamo i limiti agli estremi del dominio. Cominciamo dai limiti per $x \to \infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x-1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to +\infty} x = +\infty$$

- Poiché il dominio della funzione è $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, calcoliamo i limiti per $x \to 1$:

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2}{x-1} = \frac{1}{0^+} = +\infty \qquad \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2}{x-1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

quindi $x = 1$ è un asintoto verticale.

- Poiché il grado del numeratore supera di 1 il grado del denominatore, la funzione ha un asintoto obliquo $y = mx + q$:

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{x(x-1)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{x-1} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{x} = 1$$

Inoltre:

$$\begin{aligned} q = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - mx] &= \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - 1 \cdot x] = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - x \right) \\ &= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - x(x-1)}{x-1} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - x^2 + x}{x-1} = 1 \end{aligned}$$

Quindi l'asintoto obliquo ha equazione $y = x + 1$ (figura 38d).

Massimi e minimi

Calcoliamo la derivata della funzione:

$$f'(x) = \frac{2x \cdot (x-1) - x^2 \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

Studiamo il segno della derivata:

$$\frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} \geqslant 0$$

Studiamo il segno di numeratore e denominatore.

- Numeratore:

  $$x^2 - 2x \geqslant 0$$

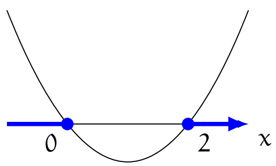
  Risolviamo l'equazione associata:

  $$x^2 - 2x = 0 \quad \Longrightarrow \quad x(x-2) = 0$$

  da cui

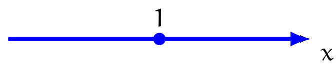
  $$x = 0 \quad \vee \quad x = 2$$

  Disegniamo la parabola associata.

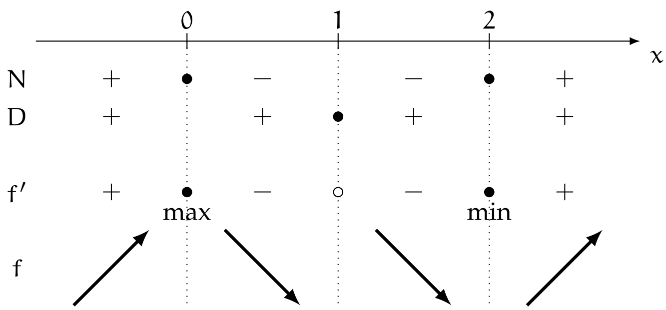


- Denominatore:

  $$(x-1)^2 \geqslant 0$$



Costruiamo la tabella dei segni della derivata.



Quindi la funzione:

- cresce se $x < 0 \vee x > 2$
- decresce se $0 < x < 1 \vee 1 < x < 2$
- ha un massimo in $x = 0$
- ha un minimo in $x = 2$
- non è definita in $x = 1$

Calcoliamo l'ordinata del punto di massimo e del punto di minimo:

$$f(0) = \frac{0^2}{0-1} = 0 \qquad f(2) = \frac{2^2}{2-1} = 4$$

La figura 38e riporta il grafico della funzione con tutte le informazioni trovate.

Concavità e flessi

Calcoliamo la derivata seconda:

$$f' = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$$

$$\begin{aligned} f'' &= \frac{(2x-2)\cdot(x-1)^2-(x^2-2x)\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} \\ &= \frac{2(x-1)\cdot(x-1)^2-(x^2-2x)\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} \\ &= \frac{2(x-1)\cdot\left[(x-1)^2-(x^2-2x)\right]}{(x-1)^4} \\ &= \frac{2(x-1)(x^2-2x+1-x^2+2x)}{(x-1)^4} = \frac{2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{2}{(x-1)^3} \end{aligned}$$

Studiamo il segno della derivata seconda:

$$\frac{2}{(x-1)^3} \geqslant 0$$

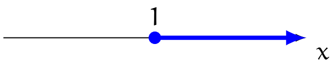
Studiamo il segno di numeratore e denominatore.

- Numeratore:

$$2 \geqslant 0$$

- Denominatore:

$$(x-1)^3 \geqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad x-1 \geqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad x \geqslant 1$$



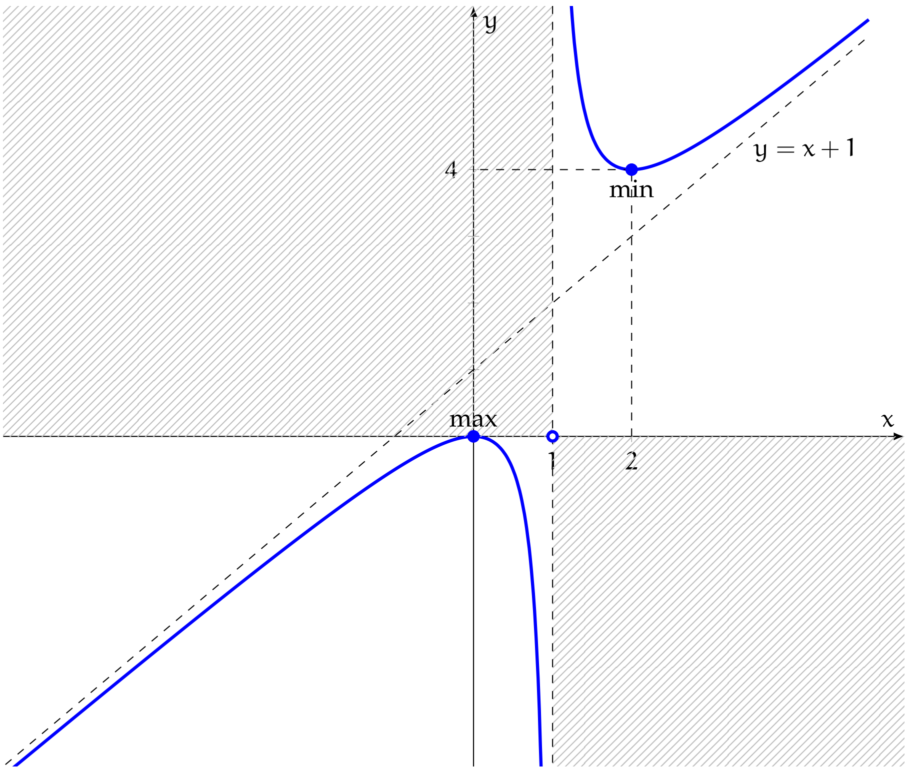
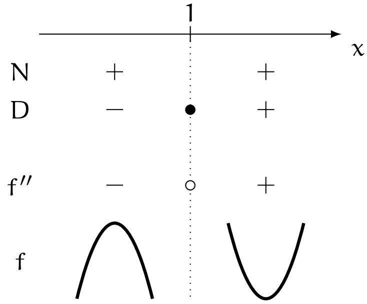


Figura 39: La funzione $y = \dfrac{x^2}{x-1}$

Costruiamo la tabella dei segni della derivata seconda.



Quindi la funzione:

- volge la concavità verso il basso se $x < 1$
- volge la concavità verso l'alto se $x > 1$
- non ha flessi

Vedi le figure 38f e 39.

4.3 ESERCIZI

Chi non risolve esercizi non impara la matematica.

1 Traccia, se possibile, il grafico di una funzione che soddisfi le seguenti proprietà:

a. è definita in $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

b. ha come asintoti verticali $x = \pm 1$

c. ha come asintoto orizzontale $y = 3$

d. ha un minimo di coordinate $(0, 2)$

2 Traccia, se possibile, il grafico di una funzione che soddisfi le seguenti proprietà:

a. è definita in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

b. interseca l'asse x in $(-1, 0)$

c. è concava e decrescente per $x < 0$

d. ha come asintoto obliquo $y = x$

3 Traccia, se possibile, il grafico di una funzione che soddisfi le seguenti proprietà:

a. è definita in $\mathbb{R}$

b. interseca gli assi in $(0, 0)$

c. è sempre crescente

d. ha come asintoti orizzontali $y = \pm 1$

Studia le seguenti funzioni intere e fratte.

4 $y = 2x - 4$ (figura 40a)

5 $y = x^3$ (figura 40b)

6 $y = x^4$ (figura 40c)

7 $y = \dfrac{1}{x}$ (figura 40d)

8 $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ (figura 40e)

9 $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$ (figura 40f)

Studia le seguenti funzioni intere.

10 $y = x^2 + 3x - 4$

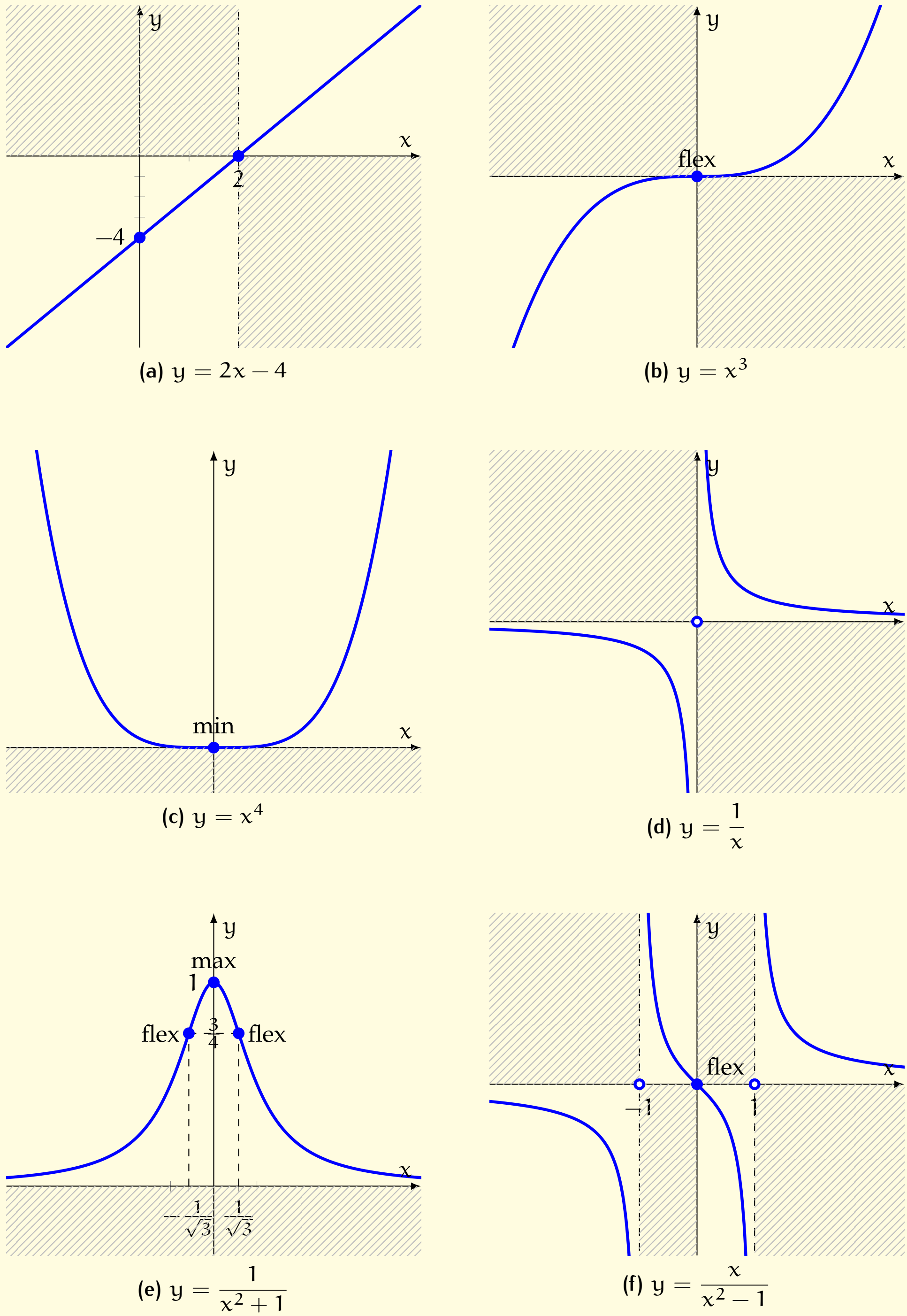
$$\left[\begin{array}{l}\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \\ \text{intersezioni con gli assi: } (-4, 0),\ (1, 0),\ (0, -4) \\ \text{è positiva per } x < -4 \vee x > 1 \\ \min\left(-\dfrac{3}{2}, -\dfrac{25}{4}\right)\text{, non ha né massimi né flessi}\end{array}\right]$$

11 $y = x^2 - 3x + 2$

$$\left[\begin{array}{l}\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \\ \text{intersezioni con gli assi: } (1, 0),\ (2, 0),\ (0, 2) \\ \text{è positiva per } x < 1 \vee x > 2 \\ \min\left(\dfrac{3}{2}, -\dfrac{1}{4}\right)\text{, non ha né massimi né flessi}\end{array}\right]$$

12 $y = -x^2 + 6x$

$$\left[\begin{array}{l}\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \\ \text{intersezioni con gli assi: } (0, 0),\ (6, 0) \\ \text{è positiva per } 0 < x < 6 \\ \max(3, 9)\text{, non ha né minimi né flessi}\end{array}\right]$$



(a) $y = 2x - 4$

(b) $y = x^3$

(c) $y = x^4$

(d) $y = \dfrac{1}{x}$

(e) $y = \dfrac{1}{x^2+1}$

(f) $y = \dfrac{x}{x^2-1}$

Figura 40: Grafici di alcune funzioni intere e fratte

13 $y = -x^2 + 4x - 3$

$$\left[\begin{array}{l} \text{dom } f = \mathbb{R} \\ \text{intersezioni con gli assi: } (3,0),\ (1,0),\ (0,-3) \\ \text{è positiva per } 1 < x < 3 \\ \max(2,1), \text{ non ha né minimi né flessi} \end{array}\right]$$

14 $y = x^3 - 4x$

$$\left[\begin{array}{l} \text{dom } f = \mathbb{R} \\ \text{intersezioni con gli assi: } (0,0),\ (\pm 2,0) \\ \text{è positiva per } -2 < x < 0 \vee x > 2 \\ \max\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{16}{3\sqrt{3}}\right), \min\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{16}{3\sqrt{3}}\right), \text{flex}(0,0) \end{array}\right]$$

15 $y = 9x(x-1)^2$

$$\left[\begin{array}{l} \text{dom } f = \mathbb{R} \\ \text{intersezioni con gli assi: } (0,0),\ (1,0) \\ \text{è positiva per } x > 0 \wedge x \neq 1 \\ \max\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right), \min(1,0), \text{flex}\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \end{array}\right]$$

16 $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$

$$\left[\begin{array}{l} \text{dom } f = \mathbb{R} \\ \text{intersezioni con gli assi: } (1,0),\ (4,0),\ (0,-4) \\ \text{è positiva per } x > 4 \\ \max(1,0), \min(3,-4), \text{flex}(2,-2) \end{array}\right]$$

17 $y = x^3 - 3x^2 - 9x - 5$

$$\left[\begin{array}{l} \text{dom } f = \mathbb{R} \\ \text{intersezioni con gli assi: } (-1,0),\ (5,0),\ (0,-5) \\ \text{è positiva per } x > 5 \\ \max(-1,0), \min(3,-32), \text{flex}(1,-16) \end{array}\right]$$

18 $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 20$

$$\left[\begin{array}{l} \text{dom } f = \mathbb{R} \\ \text{intersezioni con gli assi: } (2,0),\ (5,0),\ (0,-20) \\ \text{è positiva per } x > 5 \\ \max(2,0), \min(4,-4), \text{flex}(3,-2) \end{array}\right]$$

19 $y = \frac{1}{2}x^3 - x^2 - 2x + 4$

$$\left[\begin{array}{l} \text{dom } f = \mathbb{R} \\ \text{intersezioni con gli assi: } (\pm 2,0),\ (0,4) \\ \text{è positiva per } x > -2 \wedge x \neq 2 \\ \max\left(-\frac{2}{3}, \frac{128}{27}\right), \min(2,0), \text{flex}\left(\frac{2}{3}, \frac{64}{27}\right) \end{array}\right]$$

20 $y = x^3(x+1)$

$$\left[\begin{array}{l} \text{dom } f = \mathbb{R} \\ \text{intersezioni con gli assi: } (0,0),\ (-1,0) \\ \text{è positiva per } x < -1 \vee x > 0 \\ \text{non ha massimi, max}\left(-\frac{3}{4}, -\frac{27}{256}\right), \text{flex}\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{16}\right), \text{flex}(0,0) \end{array}\right]$$

21 $y = (x^2 - 4)^2$

$$\left[\begin{array}{l} \text{dom } f = \mathbb{R} \\ \text{intersezioni con gli assi: } (\pm 2,0),\ (0,16) \\ \text{è positiva per } x \neq \pm 2, \text{ è pari} \\ \max(0,16), \min(\pm 2,0), \text{flex}\left(\pm\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{64}{9}\right) \end{array}\right]$$

22 $y = x^4 - 2x^2 - 8$

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{dom} f = \mathbb{R} \\ \text{intersezioni con gli assi: } (\pm 2, 0) \\ \text{è positiva per } x < -2 \vee x > 2\text{, è pari} \\ \max(0, -8),\ \min(\pm 1, -9),\ \text{flex}\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{77}{9}\right) \end{array}\right]$$

23 $y = 25x^3(x-1)^2$

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{dom} f = \mathbb{R} \\ \text{intersezioni con gli assi: } (0, 0),\ (1, 0) \\ \text{è positiva per } x > 0 \wedge x \neq 1 \\ \max\left(\frac{3}{5}, \frac{108}{125}\right),\ \min(1, 0),\ \text{flex}(0, 0) \end{array}\right]$$

Studia le seguenti funzioni fratte.

24 $y = \dfrac{2}{2-x}$

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{2\} \\ \text{intersezioni con gli assi: } (0, 1) \\ \text{è positiva per } x < 2 \\ \text{asintoti: } x = 2,\ y = 0 \\ \text{non ha né massimi né minimi né flessi} \end{array}\right]$$

25 $y = \dfrac{3x+3}{x-1}$

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{1\} \\ \text{intersezioni con gli assi: } (-1, 0),\ (0, -3) \\ \text{è positiva per } x < -1 \vee x > 1 \\ \text{asintoti: } x = 1,\ y = 3 \\ \text{non ha né massimi né minimi né flessi} \end{array}\right]$$

26 $y = \dfrac{3-x}{x}$

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ \text{intersezioni con gli assi: } (3, 0) \\ \text{è positiva per } 0 < x < 3 \\ \text{asintoti: } x = 0,\ y = -1 \\ \text{non ha né massimi né minimi né flessi} \end{array}\right]$$

27 $y = \dfrac{2-2x}{x-2}$

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{2\} \\ \text{intersezioni con gli assi: } (1, 0),\ (0, -1) \\ \text{è positiva per } 1 < x < 2 \\ \text{asintoti: } x = 2,\ y = -2 \\ \text{non ha né massimi né minimi né flessi} \end{array}\right]$$

28 $y = \dfrac{2-x}{1-x}$

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{1\} \\ \text{intersezioni con gli assi: } (2, 0),\ (0, 2) \\ \text{è positiva per } x < 1 \vee x > 2 \\ \text{asintoti: } x = 1,\ y = 1 \\ \text{non ha né massimi né minimi né flessi} \end{array}\right]$$

29 $y = \dfrac{1}{x^2}$

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ \text{non interseca gli assi} \\ \text{è positiva per ogni } x \in \operatorname{dom} f \\ \text{asintoti: } x = 0,\ y = 0 \\ \text{non ha né massimi né minimi né flessi} \end{array}\right]$$

30 $y = \dfrac{4}{x^2+4}$

$$\left[\begin{array}{l} \text{dom } f = \mathbb{R} \\ \text{intersezioni con gli assi: } (0,1) \\ \text{è sempre positiva, è pari} \\ \text{asintoti: } y = 0 \\ \max(0,1), \text{ non ha minimi, flex}\left(\pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}, \dfrac{3}{4}\right) \end{array}\right]$$

31 $y = \dfrac{4}{x^2-4}$

$$\left[\begin{array}{l} \text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\} \\ \text{intersezioni con gli assi: } (0,-1) \\ \text{è positiva per } x < -2 \vee x > 2 \\ \text{asintoti: } x = \pm 2,\ y = 0 \\ \max(0,-1), \text{ non ha né minimi né flessi} \end{array}\right]$$

32 $y = \dfrac{4}{x^2-4x+4}$

$$\left[\begin{array}{l} \text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{2\} \\ \text{intersezioni con gli assi: } (0,1) \\ \text{è positiva per ogni } x \in \text{dom } f \\ \text{asintoti: } x = 2,\ y = 0 \\ \text{non ha né massimi né minimi né flessi} \end{array}\right]$$

33 $y = \dfrac{2}{x^2-3x}$

$$\left[\begin{array}{l} \text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{0, 3\} \\ \text{non interseca gli assi} \\ \text{è positiva per } x < 0 \vee x > 3 \\ \text{asintoti: } x = 0,\ x = 3,\ y = 0 \\ \max\left(\dfrac{3}{2}, -\dfrac{8}{9}\right), \text{ non ha né minimi né flessi} \end{array}\right]$$

34 $y = \dfrac{x+1}{x^2}$

$$\left[\begin{array}{l} \text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ \text{intersezioni con gli assi: } (-1,0) \\ \text{è positiva per } x > -1 \text{ e } x \neq 0 \\ \text{asintoti: } x = 0,\ y = 0 \\ \max\left(-2, -\dfrac{1}{4}\right), \text{ non ha minimi, flex}\left(-3, -\dfrac{2}{9}\right) \end{array}\right]$$

35 $y = \dfrac{4x}{x^2+1}$

$$\left[\begin{array}{l} \text{dom } f = \mathbb{R} \\ \text{intersezioni con gli assi: } (0,0) \\ \text{è positiva per } x > 0, \text{ è dispari} \\ \text{asintoti: } y = 0 \\ \max(1,2), \min(-1,-2), \text{flex}(0,0), \text{flex}(\pm\sqrt{3}, \pm\sqrt{3}) \end{array}\right]$$

36 $y = \dfrac{3-x}{(x+1)^2}$

$$\left[\begin{array}{l} \text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{-1\} \\ \text{intersezioni con gli assi: } (3,0),\ (0,3) \\ \text{è positiva per } x < -1 \vee -1 < x < 3 \\ \text{asintoti: } x = -1,\ y = 0 \\ \min\left(7, -\dfrac{1}{16}\right), \text{ flex}\left(11, -\dfrac{1}{18}\right) \end{array}\right]$$

37 $y = \dfrac{x^2-7x+10}{x-1}$

$$\left[\begin{array}{l} \text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{1\} \\ \text{intersezioni con gli assi: } (2,0),\ (5,0),\ (0,-10) \\ \text{è positiva per } 1 < x < 2 \vee x > 5 \\ \text{asintoti: } x = 1,\ y = x - 6 \\ \max(-1,-9), \min(3,-1), \text{ non ha flessi} \end{array}\right]$$

38 $y = \dfrac{2x^2 - 8}{x - 1}$

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{1\} \\ \text{intersezioni con gli assi: } (\pm 2, 0),\ (0, 8) \\ \text{è positiva per } -2 < x < 1 \vee x > 2 \\ \text{asintoti: } x = 1,\ y = 2x + 2 \\ \text{non ha né massimi né minimi né flessi} \end{array}\right]$$

39 $y = \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x - 5}$

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{5\} \\ \text{intersezioni con gli assi: } (1, 0),\ (4, 0),\ \left(0, -\dfrac{4}{5}\right) \\ \text{è positiva per } 1 < x < 4 \vee x > 5 \\ \text{asintoti: } x = 5,\ y = x \\ \max(3, 1),\ \min(7, 9),\ \text{non ha flessi} \end{array}\right]$$

40 $y = \dfrac{x^2 - 4}{(x + 1)^2}$

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{-1\} \\ \text{intersezioni con gli assi: } (\pm 2, 0),\ (0, -4) \\ \text{è positiva per } x < -2 \vee x > 2 \\ \text{asintoti: } x = -1,\ y = 1 \\ \max\left(-4, \dfrac{4}{3}\right),\ \text{flex}\left(-\dfrac{11}{2}, \dfrac{35}{27}\right) \end{array}\right]$$

41 $y = \dfrac{1 - x^2}{x^2 + 1}$

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{dom} f = \mathbb{R} \\ \text{intersezioni con gli assi: } (\pm 1, 0),\ (0, 1) \\ \text{è positiva per } -1 < x < 1,\ \text{è pari} \\ \text{asintoti: } y = -1 \\ \max(0, 1),\ \text{flex}\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{2}\right) \end{array}\right]$$

42 $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ \text{intersezioni con gli assi: } (\pm 1, 0) \\ \text{è positiva per } x < -1 \vee x > 1,\ \text{è pari} \\ \text{asintoti: } x = 0,\ y = 1 \\ \text{non ha né massimi né minimi né flessi} \end{array}\right]$$

43 $y = \dfrac{x^2}{(x - 1)^2}$

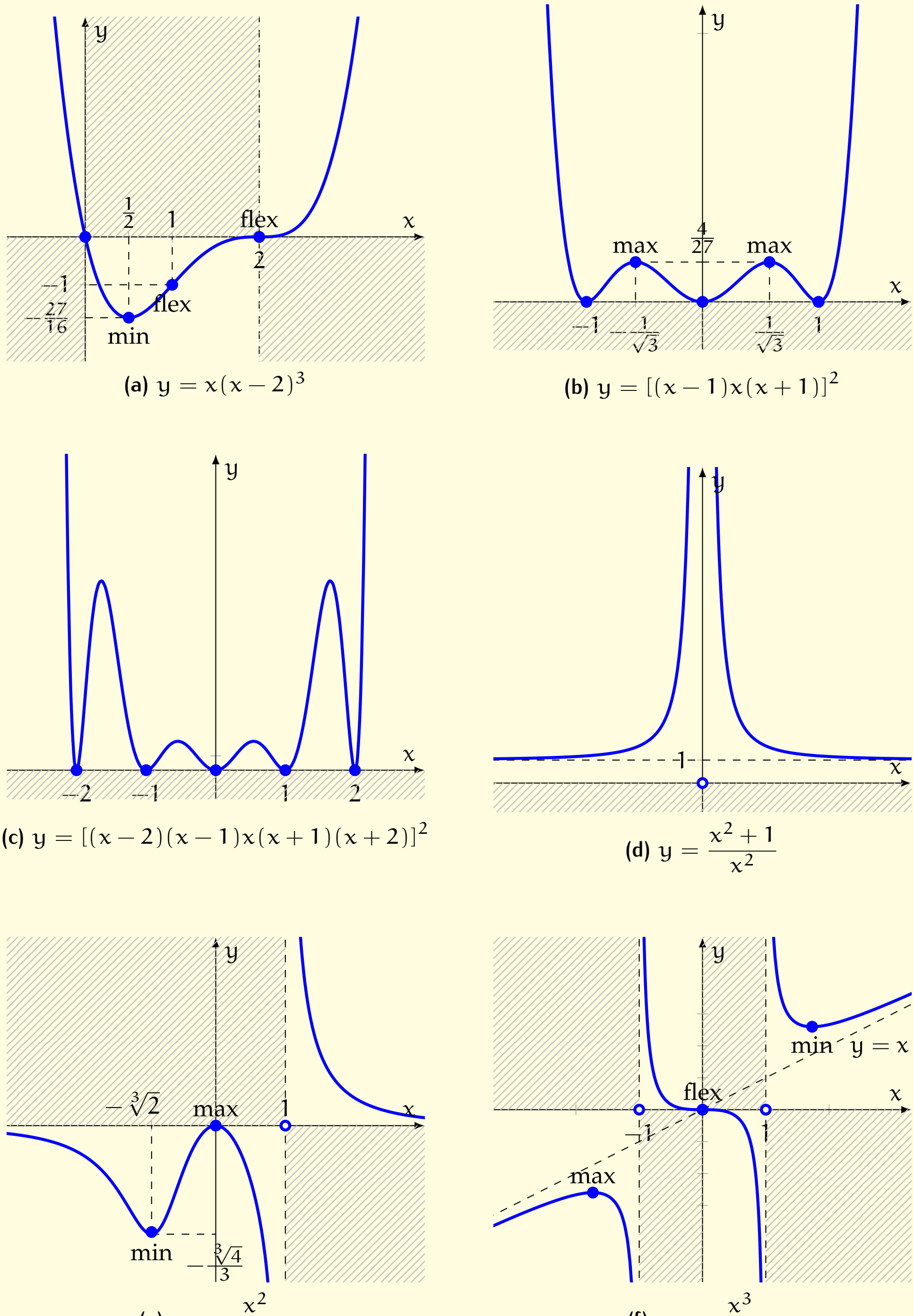
$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ \text{intersezioni con gli assi: } (0, 0) \\ \text{è positiva per } x \neq 0 \wedge x \neq 1 \\ \text{asintoti: } x = 1,\ y = 1 \\ \text{non ha massimi, } \min(0, 0),\ \text{flex}\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{9}\right) \end{array}\right]$$

44 $y = \dfrac{1}{x^3}$

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ \text{non interseca gli assi} \\ \text{è positiva per } x > 0, è dispari \\ \text{asintoti: } x = 0,\ y = 0 \\ \text{non ha né massimi né minimi né flessi} \end{array}\right]$$

45 $y = \dfrac{(x^2 - 1)^2}{x^3}$

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ \text{intersezioni con gli assi: } (\pm 1, 0) \\ \text{è positiva per } x > 0,\ \text{è dispari} \\ \text{asintoti: } x = 0,\ y = x \\ \max(-1, 0),\ \min(1, 0),\ \text{flex}\left(\pm\sqrt{3}, \pm\dfrac{4}{9}\sqrt{3}\right) \end{array}\right]$$



(a) $y = x(x-2)^3$

(b) $y = [(x-1)x(x+1)]^2$

(c) $y = [(x-2)(x-1)x(x+1)(x+2)]^2$

(d) $y = \dfrac{x^2+1}{x^2}$

(e) $y = \dfrac{x^2}{x^3-1}$

(f) $y = \dfrac{x^3}{x^2-1}$

Figura 41: Grafici di alcune funzioni intere e fratte

46 $y = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$

$\left[\begin{array}{l} \text{dom}\, f = \mathbb{R} \setminus \{1\} \\ \text{intersezioni con gli assi: } (0,0) \\ \text{è positiva per } x > 0 \wedge x \neq 1 \\ \text{asintoti: } x = 1,\ y = x + 2 \\ \text{non ha massimi, min}\left(3, \dfrac{27}{4}\right)\text{, flex}(0,0) \end{array}\right]$

47 $y = \dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$

$\left[\begin{array}{l} \text{dom}\, f = \mathbb{R} \setminus \{1\} \\ \text{intersezioni con gli assi: } (-1,0),\ (0,1) \\ \text{è positiva per } x > -1 \wedge x \neq 1 \\ \text{asintoti: } x = 1,\ y = x + 5 \\ \text{non ha massimi, min}\left(5, \dfrac{27}{2}\right)\text{, flex}(-1,0) \end{array}\right]$

48 $y = \dfrac{(x+1)^3}{x^3}$

$\left[\begin{array}{l} \text{dom}\, f = \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ \text{intersezioni con gli assi: } (-1,0) \\ \text{è positiva per } x < -1 \vee x > 0 \\ \text{asintoti: } x = 0,\ y = 1 \\ \text{non ha né massimi né minimi, flex}(-1,0)\text{, flex}\left(-2, \dfrac{1}{8}\right) \end{array}\right]$

Studia le seguenti funzioni intere e fratte.

49 $y = x(x-2)^3$ (figura 41a)

50 $y = [(x-1)x(x+1)]^2$ (figura 41b)

51 $y = [(x-2)(x-1)x(x+1)(x+2)]^2$ (figura 41c)

52 $y = \dfrac{x^2+1}{x^2}$ (figura 41d)

53 $y = \dfrac{x^2}{x^3-1}$ (figura 41e)

54 $y = \dfrac{x^3}{x^2-1}$ (figura 41f)

Studia le seguenti funzioni irrazionali, usando la formula $D\sqrt{g(x)} = \dfrac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$.

55 $y = \sqrt{4-x^2}$ (figura 42a)

56 $y = \sqrt{x^2-4}$ (figura 42b)

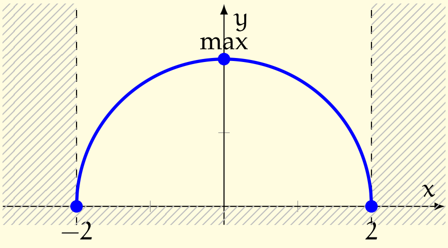
Studia le seguenti funzioni trascendenti.

57 $y = e^{-x}$ (figura 42c)

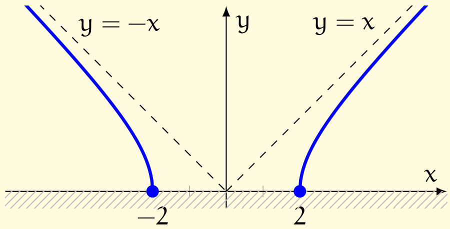
58 $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ (figura 42d)

59 $y = e^{-\frac{1}{x^2}}$ (figura 42e)

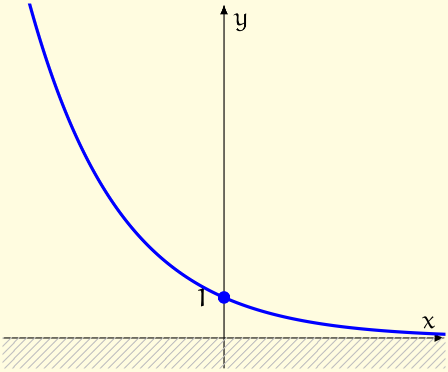
60 $y = x \ln x$ (figura 42f)



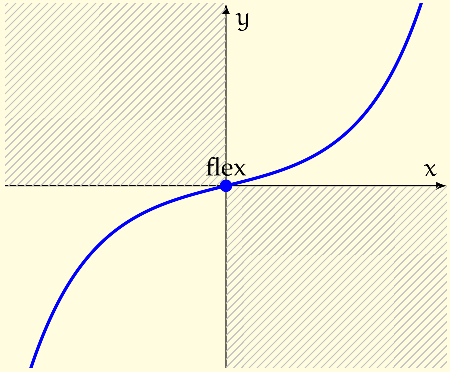
(a) $\sqrt{4-x^2}$



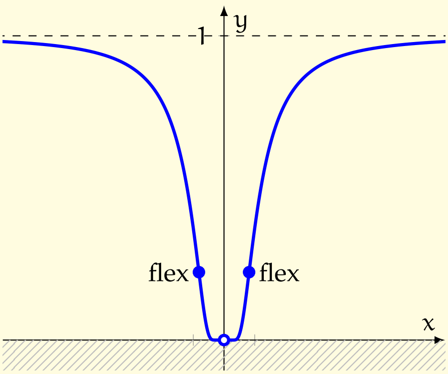
(b) $y = \sqrt{x^2-4}$



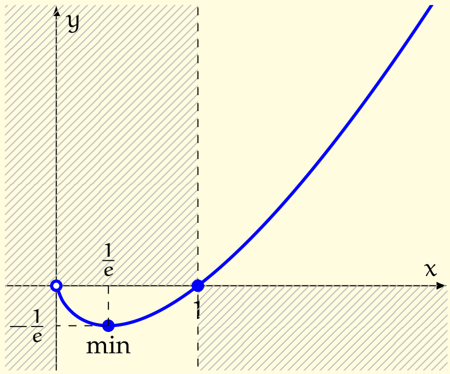
(c) $y = e^{-x}$



(d) $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$



(e) $y = e^{-\frac{1}{x^2}}$



(f) $y = x \ln x$

Figura 42: Grafici di alcune funzioni irrazionali e trascendenti

5 PROVE INVALSI

Le prove Invalsi (Istituto Nazionale per la VALutazione del Sistema di Istruzione e formazione), che nelle scuole superiori coinvolgono le classi seconde e quinte, valutano l'apprendimento degli studenti italiani. Questo capitolo, rivolto alle classi quinte, contiene esercizi di preparazione alle prove Invalsi di matematica.

5.1 ALGEBRA

Esercizio 82. A Roma alle 11:20 del 23 settembre l'altezza di un palo è di 1,12 m e la sua ombra misura 1,26 m. Nello stesso istante un albero, verticale rispetto al terreno, proietta vicino al palo un'ombra che misura 8,1 m. Qual è l'altezza dell'albero?

A 6,8 m B 7,0 m C 7,2 m D 9,1 m

Soluzione. Se x è l'altezza dell'albero in metri, allora:

$$1{,}12 : 1{,}26 = x : 8{,}1 \quad \Longrightarrow \quad 1{,}26\,x = 1{,}12 \cdot 8{,}1 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{1{,}12 \cdot 8{,}1}{1{,}26} = 7{,}2$$

La risposta esatta è la C. □

Esercizio 83. Baseball e softball hanno campi da gioco simili (vedi la figura seguente), ma con misure diverse. L'area di un campo da softball è circa 3/5 di quella di un campo da baseball. L'area di un campo da baseball misura circa $12\,000\,\text{m}^2$. Quanto misura circa l'area di un campo da softball?

A $2400\,\text{m}^2$ B $4800\,\text{m}^2$ C $7200\,\text{m}^2$ D $9600\,\text{m}^2$

Campo da baseball

Campo da softball

Soluzione. Per rispondere alla domanda basta fare una moltiplicazione:

$$\frac{3}{5} \cdot 12\,000\,\text{m}^2 = 7200\,\text{m}^2$$

La risposta esatta è la C. □

Esercizio 84. In una piazza rettangolare di lunghezza 100 m e larghezza 50 m ci sono circa 3 persone per ogni m^2. Quante persone in tutto ci sono circa nella piazza?

A 10 000 B 15 000 C 20 000 D 25 000

Soluzione. L'area della piazza è:

$$100\,\text{m} \cdot 50\,\text{m} = 5000\,\text{m}^2$$

Per trovare il numero di persone presenti nella piazza basta una moltiplicazione:

$$5000 \cdot 3 = 15\,000$$

La risposta esatta è la B. □

Esercizio 85. Una popolazione di batteri, inizialmente composta da un milione di individui, è coltivata in laboratorio. La legge $N(t) = 2^{2t}$ fornisce il numero N di batteri in milioni, in funzione del tempo t, espresso in ore. Dopo quante ore la popolazione di batteri sarà composta da 256 milioni di individui?

$\boxed{\text{A}}$ due $\boxed{\text{B}}$ quattro $\boxed{\text{C}}$ otto $\boxed{\text{D}}$ sedici

Soluzione. Uguagliamo la popolazione $N(t)$ a 256:

$$2^{2t} = 256 = 2^8 \quad \Longrightarrow \quad 2t = 8 \quad \Longrightarrow \quad t = 4$$

La risposta esatta è la B. □

Esercizio 86. Una linea di produzione automatizzata lavora con orario continuato dalle 6 alle 20 e produce pezzi meccanici. Per realizzare ogni pezzo ci vogliono:

- 20 secondi per caricare i materiali;
- 90 secondi per lavorarli;
- 15 secondi per scaricare il pezzo e pulirlo.

Quanti pezzi si possono produrre al massimo in un giorno?

$\boxed{\text{A}}$ 400 $\boxed{\text{B}}$ 401 $\boxed{\text{C}}$ 402 $\boxed{\text{D}}$ 403

Soluzione. Dalle 6 alle 20 ci sono 14 ore, che corrispondono a

$$14 \text{ ore} = 14 \cdot 60 \text{ minuti} = 14 \cdot 60 \cdot 60 \text{ secondi} = 50\,400 \text{ secondi}$$

Per realizzare ogni pezzo occorrono

$$(20 + 90 + 15) \text{ secondi} = 125 \text{ secondi}$$

Per calcolare quanti pezzi si possono produrre al massimo in un giorno facciamo la divisione:

$$50\,400 : 125 = 403{,}2$$

La risposta esatta è la D. □

Esercizio 87. Alberto e Carlo lavorano in un bar della loro città. Oggi Alberto ha servito 16 tavoli e Carlo 24. Al termine del servizio hanno incassato 20 euro di mance. Il proprietario del bar ha stabilito che i 20 euro di mancia vengano suddivisi tra Alberto e Carlo in parti direttamente proporzionali al numero di tavoli serviti. Quanto spetta ad Alberto?

A 4 € B 5 € C 8 € D 10 €

Soluzione. I tavoli serviti da Alberto e Carlo sono in tutto $16 + 24 = 40$. Se x sono gli euro che spettano ad Alberto, allora:

$$16 : 40 = x : 20 \quad \Longrightarrow \quad 40x = 16 \cdot 20 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{16 \cdot 20}{40} = 8$$

La risposta esatta è la C. □

Esercizio 88. Un negozio di articoli per la casa vende dei vassoi rettangolari di diverse dimensioni. Il prezzo (in euro) di un vassoio dipende dalle sue dimensioni L_1 e L_2 (in cm) secondo la formula:

$$p = \frac{L_1 \cdot L_2}{20}$$

Il prezzo di un vassoio è 20 euro e $L_1 = 40$ cm. Quanto misura L_2?

A 10 cm B 15 cm C 20 cm D 25 cm

Soluzione. Usiamo la formula inversa e sostituiamo i valori:

$$p = \frac{L_1 \cdot L_2}{20} \quad \Longrightarrow \quad L_2 = \frac{20p}{L_1} = \frac{20 \cdot 20}{40}\,\text{cm} = 10\,\text{cm}$$

La risposta esatta è la A. □

Esercizio 89. La distanza media tra la Terra e il Sole è circa $1{,}5 \cdot 10^{11}$ m, mentre la distanza media tra la Terra e la Luna è circa $3{,}8 \cdot 10^{8}$ m. La distanza media tra la Terra e il Sole è quindi circa:

A il doppio della distanza media tra la Terra e la Luna

B il triplo della distanza media tra la Terra e la Luna

C 1000 volte la distanza media tra la Terra e la Luna

D 400 volte la distanza media tra la Terra e la Luna

Soluzione. Il rapporto tra la distanza media Terra-Sole e la distanza media Terra-Luna è:

$$\frac{1{,}5 \cdot 10^{11}}{3{,}8 \cdot 10^{8}} = \frac{15 \cdot 10^{10}}{3{,}8 \cdot 10^{8}} \approx 4 \cdot 10^{10-8} = 400$$

La risposta esatta è la D. □

Esercizio 90. Nel parcheggio di un aeroporto la sosta è soggetta alle tariffe seguenti:

- 13 euro fino a due giorni;
- 5 euro al giorno, dal terzo giorno fino al ventesimo;
- 3 euro al giorno, dal ventunesimo giorno in poi.

Rosa deve fare un viaggio all'estero e parcheggia l'auto per 22 giorni. Quale espressione permette di calcolare in euro quanto spende?

A $13 + 5 \cdot 18 + 3 \cdot 2$

B $5 \cdot 20 + 3 \cdot 2$

C $3 \cdot 22$

D $13 + 3 \cdot 20 + 3 \cdot 2$

Soluzione. La spesa di Rosa è pari a 13 euro (per i primi due giorni) più 5 euro per 18 (i giorni dal terzo al ventesimo) più 3 euro per 2 (il ventunesimo e il ventiduesimo giorno). La risposta esatta è la A. □

Esercizio 91. Ogni esame universitario ha un "peso" dato dal numero di CFU (Crediti Formativi Universitari). La media pesata dei voti degli esami sostenuti si calcola nel modo seguente:

- si moltiplica il voto di ciascun esame per il relativo numero di CFU;
- si sommano tutti i prodotti così ottenuti;
- si divide il risultato per il numero totale di CFU.

La tabella seguente riporta i voti dei primi tre esami sostenuti da Giovanna. Quale voto deve prendere Giovanna nel prossimo esame (esame 4) per avere una media pesata uguale a 25?

A 20 B 23 C 25 D 28

Esame	Voto	Numero di CFU
Esame 1	25	12
Esame 2	20	6
Esame 3	23	3
Esame 4	?	12

Soluzione. Se x è il voto del quarto esame, scriviamo la media pesata dei voti degli esami e poniamola uguale a 25:

$$\frac{25 \cdot 12 + 20 \cdot 6 + 23 \cdot 3 + x \cdot 12}{12 + 6 + 3 + 12} = 25$$

Risolviamo l'equazione nell'incognita x:

$$\frac{489 + 12x}{33} = 25 \quad \Longrightarrow \quad 489 + 12x = 825 \quad \Longrightarrow \quad 12x = 336 \quad \Longrightarrow \quad x = 28$$

La risposta esatta è la D. □

Esercizio 92. Qual è la soluzione dell'equazione $2x = 5$?

A 3 B $2/5$ C $5/2$ D 10

Soluzione. Basta dividere entrambi i membri dell'equazione per 2:

$$2x = 5 \quad \Longrightarrow \quad \frac{2x}{2} = \frac{5}{2} \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{5}{2}$$

La risposta esatta è la C. □

Esercizio 93. Se n è un qualunque numero dispari, quale delle seguenti affermazioni relative a $3(n+1)$ è corretta?

$\boxed{\text{A}}$ $3(n+1)$ è dispari, perché $n+1$ è dispari.

$\boxed{\text{B}}$ $3(n+1)$ è dispari, perché è il prodotto di due numeri dispari.

$\boxed{\text{C}}$ $3(n+1)$ può essere pari o dispari, per esempio $3 \cdot 2 = 6$ e $3 \cdot 5 = 15$.

$\boxed{\text{D}}$ $3(n+1)$ è pari, perché il successivo di un numero dispari è pari.

Soluzione. Se n è un numero dispari, allora $n+1$ è pari. Quindi $3(n+1)$ è pari, perché ha un numero pari tra i suoi fattori. La risposta esatta è la D. □

Esercizio 94. La pasta che normalmente è acquistato da Giovanna ha lo stesso prezzo in due negozi A e B. Questa settimana il negozio A fa uno sconto del 25% e il negozio B fa l'offerta «compri tre e paghi due». In quale negozio le conviene comprare la pasta se deve acquistarne 6 confezioni?

Soluzione. Se p è il prezzo non scontato di una confezione di pasta, la pasta che deve acquistare Giovanna costa $6p$ a prezzo non scontato. Il negozio A fa uno sconto del 25%, pari a $6\,p \cdot 0{,}25 = 1{,}5\,p$, quindi nel negozio A la pasta costa $6\,p - 1{,}5\,p = 4{,}5\,p$. Il negozio B fa l'offerta «compri tre e paghi due», quindi le sei confezioni costano come quattro a prezzo non scontato, cioè $4p$. Conviene B. □

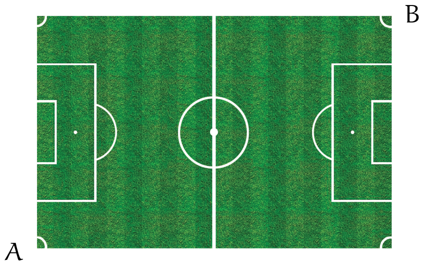
Esercizio 95. Dimostra che il successivo del quadrato di un numero dispari è pari.

Soluzione. Se n è un numero intero, allora $2n+1$ è un numero dispari. Con l'espressione $(2n+1)^2+1$ possiamo indicare il successivo del quadrato di un numero dispari. Sviluppando l'espressione si ottiene $4n^2+4n+2$, che può essere scritta come $2(2n^2+2n+1)$. Poiché l'espressione ha 2 tra i suoi fattori, il successivo del quadrato di un numero dispari è pari. □

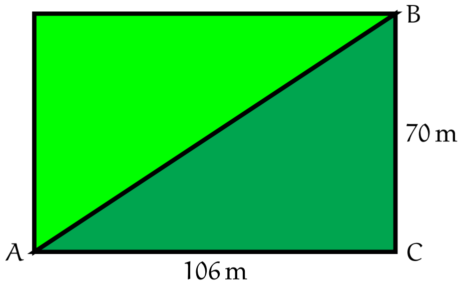
5.2 GEOMETRIA

Esercizio 96. Il campo da calcio dello stadio Bernabeu di Madrid ha dimensioni $106\,\mathrm{m} \times 70\,\mathrm{m}$. La distanza fra le bandierine A e B situate in due vertici opposti del rettangolo di gioco è circa

[A] $80\,\mathrm{m}$ [B] $110\,\mathrm{m}$ [C] $127\,\mathrm{m}$ [D] $176\,\mathrm{m}$



Campo da calcio dello stadio Bernabeu



Rettangolo di gioco

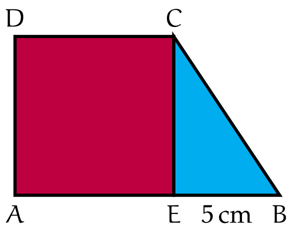
Soluzione. Basta applicare il teorema di Pitagora al triangolo ACB:

$$AB = \sqrt{106^2 + 70^2}\,\mathrm{m} \approx 127\,\mathrm{m}$$

La risposta esatta è la C. □

Esercizio 97. L'area del quadrato $AECD$ nella figura seguente misura x^2 e il segmento EB misura $5\,\mathrm{cm}$ Quale tra le espressioni seguenti indica l'area del triangolo ECB?

[A] $\frac{1}{2}x^2$ [B] $x^2 + \frac{5}{2}x$ [C] $\frac{5}{2}x$ [D] $x^2 - \frac{5}{2}x$



Soluzione. Poiché l'area del quadrato $AECD$ misura x^2, il lato EC misura x. L'area del triangolo ECB misura quindi $5x/2$. La risposta esatta è la C. □

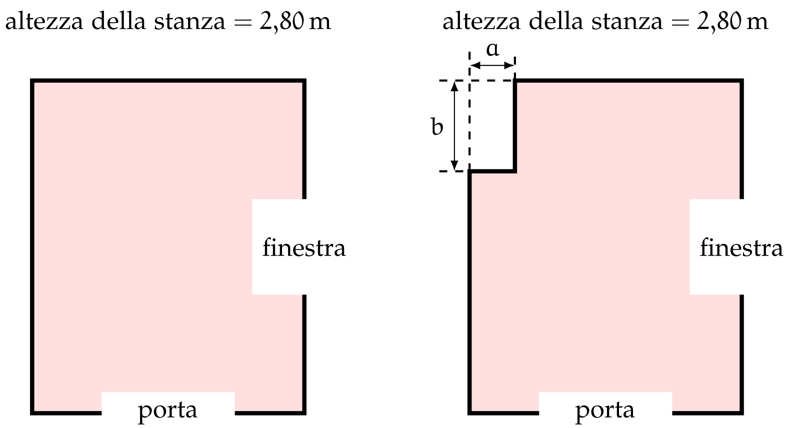
Esercizio 98. Un imbianchino deve tinteggiare con la stessa vernice le pareti dei salotti del signor Bianchi e del signor Rossi che abitano nello stesso palazzo. Le due stanze avevano inizialmente la stessa pianta; successivamente il signor Rossi ha modificato la pianta del suo salotto come risulta nella figura seguente. La spesa per la tinteggiatura:

[A] è la stessa per il signor Bianchi e per il signor Rossi

[B] è maggiore per il signor Rossi

[C] è maggiore per il signor Bianchi

[D] dipende dalle misure di a e b

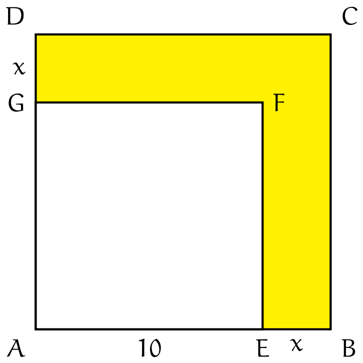


Stanza del signor Bianchi **Stanza del signor Rossi**

Soluzione. La spesa per tinteggiare le pareti di una stanza dipende dalla loro superficie, che è uguale al prodotto fra il perimetro della stanza per la sua altezza. Poiché il perimetro e l'altezza della stanza sono gli stessi per il signor Bianchi e per il signor Rossi, la risposta esatta è la A. □

Esercizio 99. La figura seguente contiene due quadrati. Il quadrato più piccolo ha lato AE che misura 10 e quello più grande ha lato AB che misura $10+x$. Qual è l'espressione che indica l'area del poligono $EBCDGF$?

[A] x^2+20 [B] x^2-20 [C] x^2+20x [D] x^2-20x



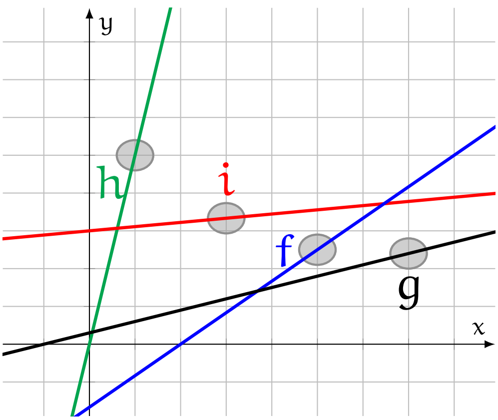
Soluzione. L'area del poligono EBCDGF è la differenza tra l'area del quadrato più grande e l'area del quadrato più piccolo:

$$\text{area di } EBCDGF = (10 + x)^2 - 10^2 = 100 + 20x + x^2 - 100 = x^2 + 20x$$

La risposta esatta è la C. □

Esercizio 100. Nell'equazione $y = mx + q$, m è il coefficiente angolare della retta. Quale delle rette seguenti ha coefficiente angolare minore?

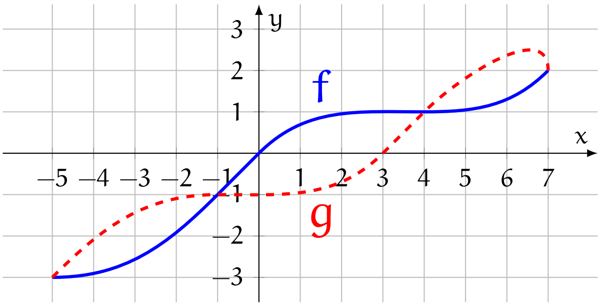
A la retta f B la retta g C la retta h D la retta i



Soluzione. Il coefficiente angolare di una retta indica la sua pendenza: quanto più la retta è ripida, tanto più il suo coefficiente angolare è grande. Delle quattro rette mostrate, quella meno ripida è la retta i. La risposta esatta è la D. □

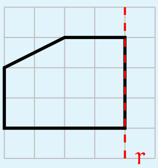
Esercizio 101. La figura seguente riporta i grafici delle funzioni f e g di variabile reale definite nell'intervallo $[-5; 7]$. L'insieme delle soluzioni della disequazione $f(x) < g(x)$ è:

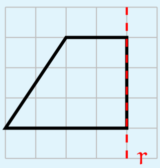
A	$-5 < x < -1$ oppure $4 < x < 7$	C	$-1 < x < -4$
B	$-3 < x < -1$ oppure $1 < x < 2$	D	$-1 < x < 1$

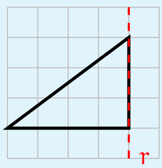


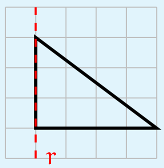
Soluzione. La disequazione $f(x) < g(x)$ è verificata quando il grafico della funzione f «sta sotto» al grafico della funzione g. Ciò si verifica quando x è compresa fra -5 e -1 o fra 4 e 7. La risposta esatta è la A. □

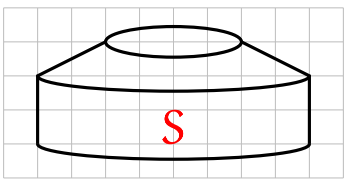
Esercizio 102. Il solido S nella figura seguente si ottiene ruotando di 360° intorno alla retta r uno dei quattro poligoni raffigurati di seguito. Quale?

A


B


C


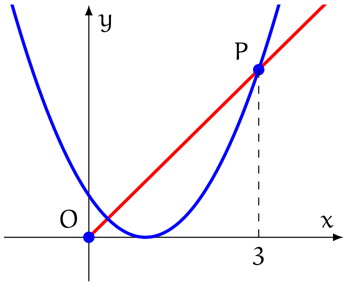
D




Soluzione. Il solido S è un cilindro sormontato da un tronco di cono. Ruotando la figura B attorno alla retta r si ottiene un tronco di cono, mentre ruotando le figure C e D attorno alla retta r si ottengono due coni. La risposta esatta è la A. □

Esercizio 103. La retta di equazione $y = mx$ interseca la parabola di equazione $y = f(x) = x^2 - 2x + 1$ nel punto P di ascissa 3 (vedi la figura seguente). Qual è il valore del coefficiente angolare m della retta?

[A] $3/4$ [B] 1 [C] $4/3$ [D] 3



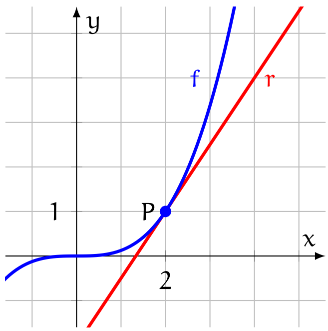
Soluzione. Poiché $f(3) = 3^2 - 2 \cdot 3 + 1 = 4$ si ha che P ha coordinate $(3, 4)$. Dati due punti $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$, il coefficiente angolare m della retta AB è

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Il coefficiente angolare della retta che congiunge P con l'origine è allora $(4-0)/(3-0) = 4/3$. □

Esercizio 104. La retta r di equazione $y = \frac{3}{2}x - 2$ è tangente nel punto P di ascissa 2 al grafico della funzione f nella figura seguente. Quanto vale la derivata prima di f in $x = 2$, cioè $f'(2)$?

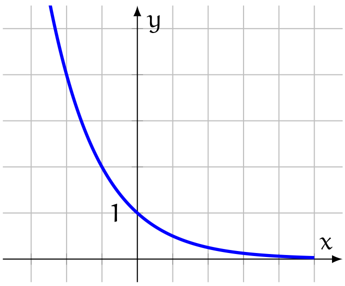
[A] $2/3$ [B] 1 [C] $3/2$ [D] 2



Soluzione. La derivata di una funzione f in $x = 2$ è il coefficiente angolare della retta tangente al grafico della funzione in $x = 2$. Poiché il coefficiente angolare della retta r è $3/2$, si ha che $f'(2) = 3/2$. La risposta esatta è la ???. □

Esercizio 105. La figura seguente mostra il grafico di una funzione f definita nell'insieme dei numeri reali. Qual è l'equazione di f?

A $y = 2^x$ B $y = 2^{-x}$ C $y = 2^x + 1$ D $y = 2^{-x} + 1$



Soluzione. La figura è il grafico della funzione esponenziale $y = 2^{-x}$, per cui la risposta esatta è la B. □

Esercizio 106. L'oggetto a forma di lettera E nella seguente figura 1 è formato da 10 cubi uguali. La misura dello spigolo di ciascun cubo è L. Si vuole colorare questo oggetto. Quale delle espressioni seguenti indica la superficie da colorare?

A $21\,L^2$ B $39\,L^2$ C $42\,L^2$ D $60\,L^2$

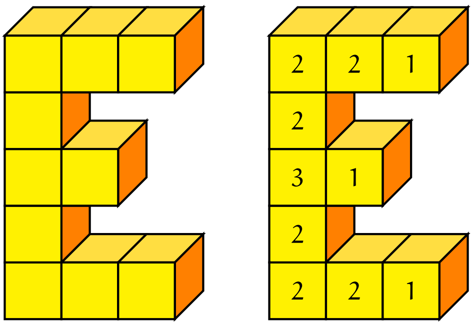


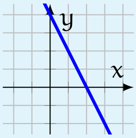
Figura 1 Figura 2

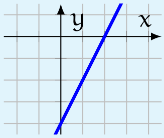
Soluzione. Poiché i cubi di cui è costituito l'oggetto sono 10 e poiché un cubo ha 6 facce, le facce dei cubi che costituiscono l'oggetto sono in tutto 60. Le facce dell'oggetto si ottengono sottraendo da 60 le facce che ciascun cubo ha in comune con gli altri, indicate nella figura 2:

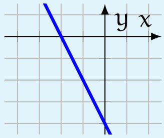
$$60 - (6 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 3) = 60 - 18 = 42$$

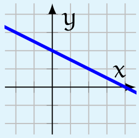
La risposta esatta è la C. □

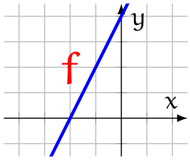
Esercizio 107. Il grafico f nella figura seguente è il simmetrico rispetto all'asse y di uno dei quattro grafici di seguito. Quale?

A 

B 

C 

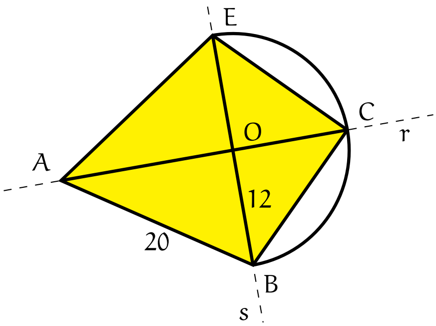
D 



Soluzione. Dato un grafico, il suo simmetrico rispetto all'asse y si ottiene ribaltandolo attorno all'asse y. La risposta esatta, quindi, è la A. □

Esercizio 108. Nella figura seguente le rette r ed s sono perpendicolari tra loro e l'arco ECB è una semicirconferenza di centro O. Il segmento AB è lungo 20 e OB è lungo 12. Qual è l'area del quadrilatero $ABCE$?

A 112 B 168 C 252 D 336



Soluzione. Applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo AOB:

$$AO = \sqrt{20^2 - 12^2} = \sqrt{400 - 144} = \sqrt{256} = 16$$

Si ha che:

$$\text{area } OBC = \text{area } OCE = \frac{12 \cdot 12}{2} = 72 \qquad \text{area } AOB = \text{area } AOE = \frac{12 \cdot 16}{2} = 96$$

Quindi l'area del quadrilatero $ABCE$ è:

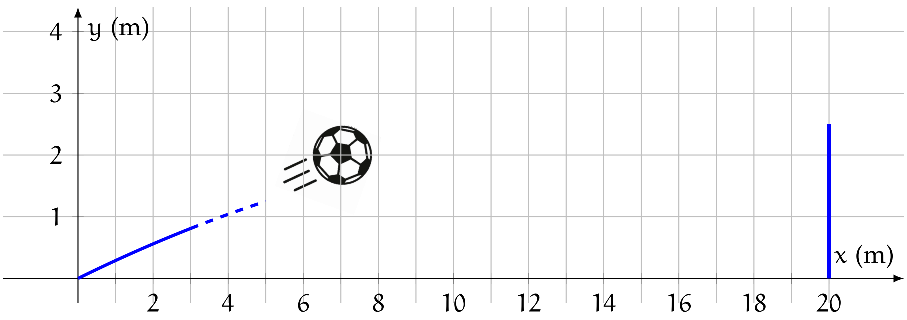
$$72 \cdot 2 + 96 \cdot 2 = 144 + 192 = 336$$

La risposta esatta è la D. □

Esercizio 109. Un calciatore si trova in posizione centrale di fronte alla porta avversaria alla distanza di 20 m e calcia un pallone. La traiettoria del pallone è descritta rispetto al sistema di riferimento nella figura seguente dall'equazione

$$y = -\frac{1}{100}x^2 + \frac{3}{10}x$$

La figura seguente mostra la prima parte della traiettoria. La porta è alta 2,5 m. Il pallone entra in porta?



Soluzione. Sostituendo $x = 20$ nell'equazione si trova:

$$y = -\frac{1}{100}20^2 + \frac{3}{10}20 = -4 + 6 = 2$$

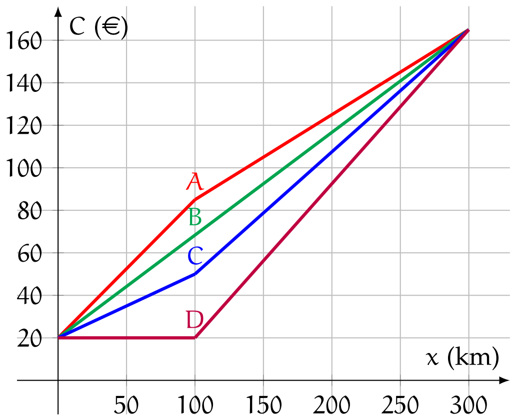
Poiché 2 è minore di 2,5, il pallone entra in porta. □

Esercizio 110. Il Comune di Bologna propone un servizio di noleggio giornaliero di auto per una percorrenza massima di 300 km, alle tariffe seguenti:

- 20 euro di costo fisso;
- 0,65 euro al km per i primi 100 km;
- 0,40 euro al km per ogni km oltre i primi 100.

La figura seguente mostra i grafici di quattro contratti di autonoleggio. Qual è il grafico che corrisponde alla proposta del comune?

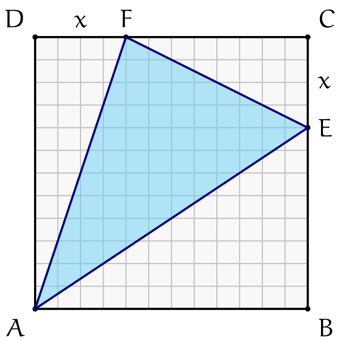
[A] il grafico A [B] il grafico B [C] il grafico C [D] il grafico D



Soluzione. Il grafico che corrisponde alla proposta del comune deve essere composto da due segmenti, di cui il primo (relativo a una percorrenza fino a 100 km e con un costo al chilometro maggiore) più ripido del secondo (relativo a una percorrenza superiore a 100 km). La risposta esatta è la A. □

Esercizio 111. La figura seguente mostra un quadrato ABCD di lato 12 inscritto in un triangolo AEF. $DF = CE = x$. Se $x = 4$, qual è l'area del triangolo AEF?

[A] 16 [B] 24 [C] 48 [D] 56



Soluzione. L'area del triangolo AEF è la differenza tra l'area del quadrato ABCD e la somma delle aree dei tre triangoli ABE, ECF e AFD. L'area del quadrato ABCD è $12 \cdot 12 = 144$ e

$$\text{area } ABE = \frac{12 \cdot 8}{2} = 48 \qquad \text{area } ECF = \frac{8 \cdot 4}{2} = 16 \qquad \text{area } AFD = \frac{4 \cdot 12}{2} = 24$$

Quindi:

$$\text{area } AEF = 144 - (48 + 16 + 24) = 56$$

La risposta esatta è la D. □

Esercizio 112. Immagina ora che i punti F ed E dell'esercizio precedente si muovano lungo i lati del quadrato $ABCD$. L'area del triangolo AEF, al variare di x tra 0 e 12 è descritta dall'espressione

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 6x + 72$$

Indica se ciascuna delle affermazioni seguenti è vera o falsa.

a. Se $x = 0$, l'area di AEF è la metà dell'area del quadrato. V F

b. L'area di AEF per $x = 4$ è minore dell'area di AEF per $x = 8$. V F

c. Se $x = 6$, l'area del triangolo AEF è minima. V F

Soluzione.

a. Sostituendo $x = 0$ nell'espressione $f(x)$ dell'area si ottiene 72, che è la metà di 144 (l'area del quadrato), quindi l'affermazione è vera.

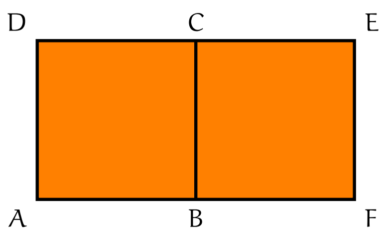
b. Sostituendo $x = 4$ oppure $x = 8$ in $f(x)$ si ottiene in entrambi i casi 56, quindi l'affermazione è falsa.

c. Il minimo della funzione $f(x)$ si ottiene ponendo la derivata $f'(x)$ uguale a zero, quindi $f'(x) = x - 6 = 0$, da cui $x = 6$, quindi l'affermazione è vera. □

Esercizio 113.

Il rettangolo $AFED$ è formato da due quadrati congruenti $ABCD$ e $BFEC$ con un lato in comune. Il perimetro di ciascuno dei quadrati misura $36\,\text{cm}$. Quanto misura il perimetro del rettangolo $AFED$?

A $48\,\text{cm}$ B $50\,\text{cm}$ C $52\,\text{cm}$ D $54\,\text{cm}$



Soluzione. Il lato dei quadrati congruenti $ABCD$ e $BFEC$ misura $36\,\text{cm}/4 = 9\,\text{cm}$. Il rettangolo rettangolo $AFED$ è costituito da sei segmenti lunghi ciascuno $9\,\text{cm}$, quindi il suo perimetro è $6 \cdot 9\,\text{cm} = 54\,\text{cm}$. La risposta esatta è la D. □

Esercizio 114. Considera l'ellisse nella seguente figura 1. Indica se ciascuna delle affermazioni seguenti è vera o falsa.

a. La retta di equazione $y = x - 1$ è esterna all'ellisse.

b. La retta di equazione $y = 2$ è secante l'ellisse.

c. La retta di equazione $y = 1 - x$ è esterna all'ellisse.

d. La retta di equazione $y = x + 1$ è tangente all'ellisse.

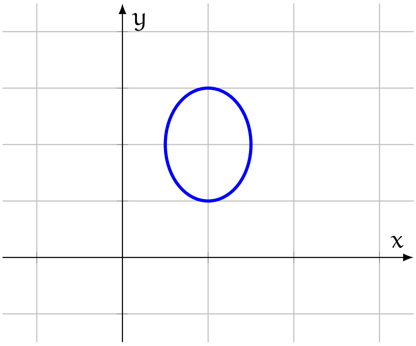


Figura 1

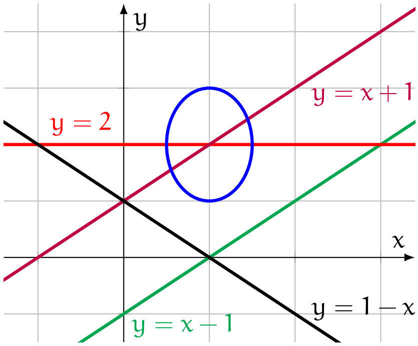


Figura 2

Soluzione. Basta disegnare le quattro rette sul piano cartesiano (figura 2) per capire che le prime tre affermazioni sono vere e che la quarta è falsa. □

5.3 PROBABILITÀ E STATISTICA

Esercizio 115. Qual è la probabilità di ottenere esattamente 2 volte testa in 3 lanci di una moneta non truccata?

[A] 3/8 [B] 1/2 [C] 2/3 [D] 3/4

Soluzione. Indicando con T testa e con C croce, scriviamo tutti i casi possibili che si possono presentare lanciando una moneta tre volte:

TTT TTC TCT **TCC** CTT **CTC** **CCT** CCC

La probabilità di ottenere esattamente 2 volte testa è il rapporto tra il numero di casi favorevoli (3: TCC, CTC e CCT) e il numero di casi possibili (8). La risposta esatta è la A. □

Esercizio 116. Aldo ha messo in un sacchetto tre foglietti di carta. Sul primo ha scritto la lettera E, sul secondo la lettera R e sul terzo la lettera T. Dopo aver mischiato i foglietti esegue tre estrazioni a caso senza rimettere i foglietti estratti nel sacchetto. Qual è la probabilità che escano nell'ordine le lettere T, R, E in modo da formare la parola TRE?

A 1/3 B 1/27 C 1/9 D 1/6

Soluzione. Scriviamo tutti i casi possibili:

ERT ETR RET RTE TER **TRE**

La probabilità che le lettere escano nell'ordine in modo da formare la parola TRE è il rapporto tra il numero di casi casi favorevoli (1) e il numero di casi possibili (6). La risposta esatta è la D. □

Esercizio 117. La moneta da 1 euro e la moneta turca da cinquanta centesimi di lira hanno le stesse dimensioni, colori e misure. Mario ha in tasca 3 monete da un euro e 2 monete turche da cinquanta centesimi di lira. Estrae dalla tasca, senza guardare, prima una moneta e poi un'altra. Qual è la probabilità che la prima moneta sia da cinquanta centesimi di lira e la seconda moneta sia da un euro?

A 15% B 20% C 25% D 30%

Soluzione. La probabilità che la prima moneta sia turca da cinquanta centesimi è uguale a 2/5 (2 è il numero di monete da cinquanta centesimi e 5 il numero complessivo di monete). Se Marco estrae dalla tasca una moneta da cinquanta centesimi, gli restano in tasca 3 monete da un euro e una moneta da cinquanta centesimi, quindi la probabilità che estragga una moneta da un euro è 3/4. La probabilità che si verifichino entrambi gli eventi è il prodotto delle rispettive probabilità:

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{10} = 30\%$$

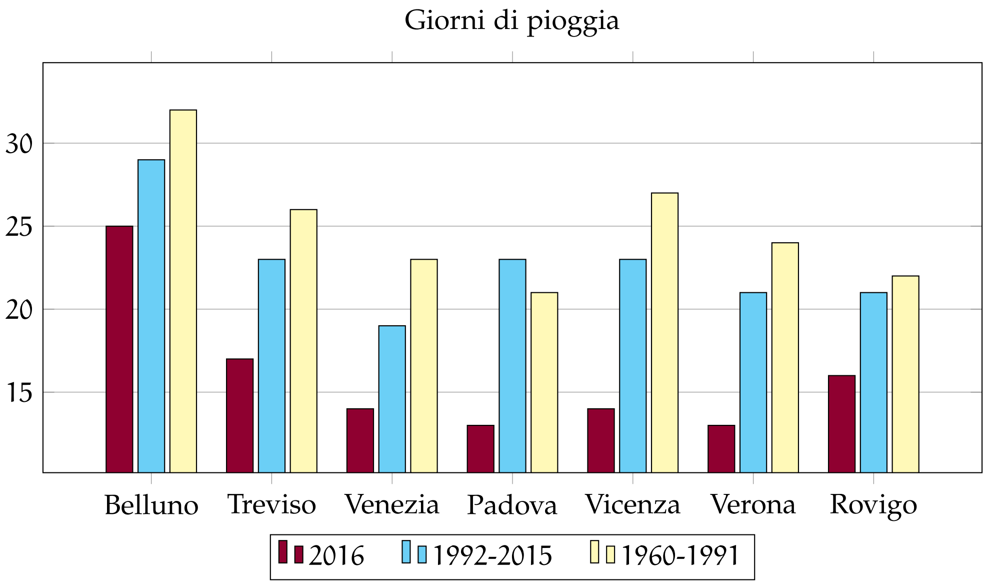
La risposta esatta è la D. □

Esercizio 118. Il grafico seguente mostra il numero di giorni di pioggia nel 2016 e la media annuale del numero dei giorni di pioggia nei periodi 1992-2015 e 1960-1991 nei capoluoghi di provincia del Veneto. Indica se ciascuna delle affermazioni seguenti è vera o falsa.

a. In tutte le città nell'anno 2016 ci sono stati meno giorni di pioggia della media relativa al periodo 1960-1991.

b. Nel 2016 a Rovigo ci sono stati meno giorni di pioggia che a Venezia.

c. Confrontando il periodo 1992-2015 con il 2016, la città che ha avuto la maggiore diminuzione di giorni di pioggia è Padova.



Soluzione.

a. Per ciascuna città, la colonna relativa al 2016 è più bassa di quella del periodo 1960-1991: la prima affermazione è vera.

b. La colonna relativa al 2016 di Rovigo è più alta di quella relativa al 2016 di Venezia: la seconda affermazione è falsa.

c. Fra tutte le città, quella con la differenza maggiore tra la colonna del periodo 1992-2015 e quella del 2016 è Padova: la terza affermazione è vera. □

Esercizio 119. In uno studio clinico è stato somministrato a un campione estratto da una popolazione un test per diagnosticare una malattia. La tabella seguente riporta i risultati del test sul campione. Si definisce *falso positivo* una persona sana che risulta positiva al test. Qual è la probabilità che una persona che ha partecipato al test sia un falso positivo?

A 95/100 B 105/900 C 105/1000 D 200/900

Esito del test	**Malati**	**Sani**
Positivo	95	105
Negativo	5	795
Totale	100	900

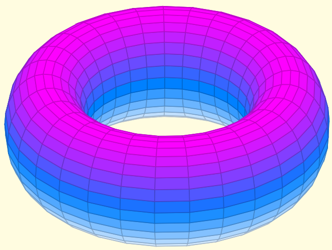
Soluzione. Le persone che hanno partecipato al test sono 1000 (100 malati e 900 sani). I falsi positivi sono 105. La probabilità che una persona che ha partecipato al test sia un falso positivo è quindi 105/1000. La risposta esatta è la C. □

5.4 ESERCIZI

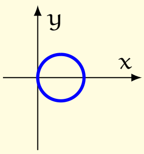
Chi non risolve esercizi non impara la matematica.

1 Indica la risposta corretta.

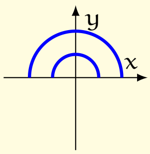
a. Osserva il solido rappresentato nella figura seguente.



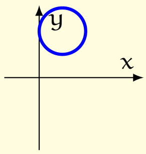
Quale delle seguenti circonferenze genera il solido con una rotazione intorno all'asse x?



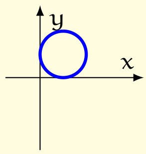
A



B



C



D

b. I parcheggi di un Comune della riviera romagnola creano molte difficoltà ai turisti, per la lunga serie di istruzioni riportate a lato del parchimetro. Quanto spende un turista che parcheggia a metà ottobre dalle 8 di venerdì alle 20 di sabato?

Tariffe dal 1 giugno al 30 settembre	**Tariffe dal 1 ottobre al 31 ottobre e dal 1 aprile al 31 maggio**
dalle 8:00 alle 22:00	**dalle 8:00 alle 20:00**
	Nei giorni festivi e prefestivi
Non residenti: 1,80 **€/h**	Non residenti: 1,00 **€/h**
Residenti: 0,30 **€/h**	Residenti: 0,30 **€/h**
Lavoratori: 0,80 **€/h**	Lavoratori: 0,80 **€/h**
Il parcheggio è gratuito nei periodi non indicati	**Negli altri giorni**
	Non residenti: 0,50 **€/h**
	Residenti: 0,30 **€/h**
	Lavoratori: 0,40 **€/h**

A 18 euro B 19,20 euro C 24 euro D 33,60 euro

c. L'equazione $(x-1)(x^2-2)(x-4)=0$:

A non ha soluzioni intere

B ha due soluzioni razionali

C non ha soluzioni razionali

D ha solo due soluzioni reali

d. Nell'insieme dei numeri reali la disequazione

$$\log_2(x) - \log_2(8) > 0$$

è verificata per:

A $x < 3$ B $x > 3$ C $x < 8$ D $x > 8$

e. Considera la disequazione

$$\log_2 x < k$$

dove k è un numero reale. Quali sono le soluzioni per $k = 0$?

A $0 < x < 1$ B $x > 1$ C $x < 0$ D $x > 0$

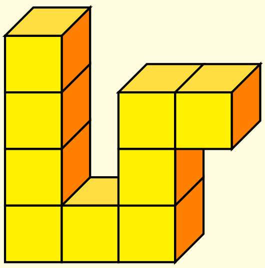
f. Considera la disequazione

$$\log_2 x < k$$

dove k è un numero reale. Quali sono le soluzioni per $k = -2$?

A $x > 1/4$ B $0 < x < 1/4$ C $x < -4$ D $x > -4$

g. Il solido seguente è composto da nove cubi congruenti di spigolo L.

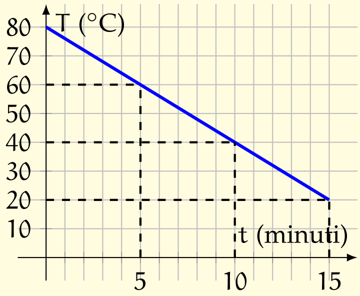


A $3L^2$ B $9L^2$ C $38L^2$ D $54L^2$

[Due risposte A, due B, due C e una D]

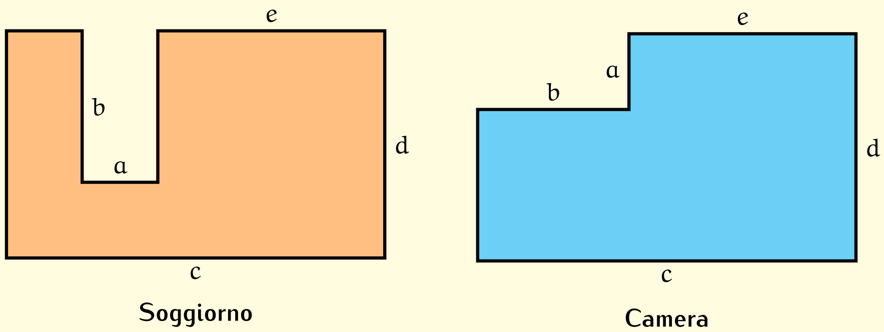
2 Nell'insieme dei numeri reali considera l'equazione $2^x = k$. Se $k = 1$ quante soluzioni ha l'equazione? E se $k = 0$? E se $k = -1$? [una; nessuna; nessuna]

3 Una pentola piena d'olio viene messa a raffreddare per 15 minuti all'interno di un abbattitore (uno strumento usato per il raffreddamento rapido). La figura seguente mostra l'andamento della temperatura T (in $°C$) dell'olio in funzione del tempo t (in minuti). Qual è la temperatura iniziale dell'olio? Qual è la temperatura dell'olio dopo 5 minuti? Di quanto diminuisce la temperatura dell'olio negli ultimi 5 minuti? [80°; 60°; 20°]



4 Indica la risposta corretta.

a. Maria vuole ritinteggiare le pareti del soggiorno e della camera da letto, e cambiare i pavimenti di entrambe le stanze. L'altezza dei muri è la stessa in tutta la casa. La pianta delle due stanze è rappresentata nella figura seguente.



A Per tinteggiare il soggiorno si spende di più che per tinteggiare la camera.

B Per tinteggiare il soggiorno si spende meno che per tinteggiare la camera.

C Per pavimentare il soggiorno si spende meno che per pavimentare la camera.

D Per pavimentare il soggiorno si spende di più che per pavimentare la camera.

b. Considera la funzione

$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$

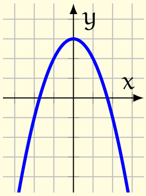
definita da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$. Qual è il codominio di $f(x)$?

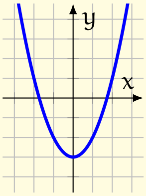
A $1 \leqslant y \leqslant 3$ B $\mathbb{R}$ C $y \leqslant 1 \vee y \geqslant 3$ D $y \geqslant -1$

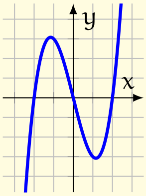
c. Quale delle seguenti funzioni non è definita in 1 ed è tale che $\lim_{x\to\infty} f(x) = 2$ e che $f(0) = -3$?

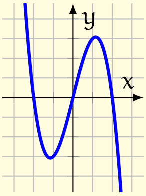
A $f(x) = \dfrac{2x-3}{x-1}$ B $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x-1}$ C $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-1}$ D $f(x) = \dfrac{2x}{x-1}$

d. La funzione f è dispari, ha tre zeri e nell'intervallo $[0, 2]$ ha un punto di massimo. Tra i seguenti grafici, quale può essere quello della funzione f?

A 

B 

C 

D 

e. Francesco ha dimenticato il codice PIN del suo cellulare. Si ricorda che ha usato quattro cifre tutte diverse tra loro e che la prima di esse è il numero 4. Che probabilità ha Francesco di scoprire la password al primo tentativo?.

A $1/504$ B $1/720$ C $1/1000$ D $1/5040$

f. Il dominio della funzione $f(x) = \dfrac{x+7}{x(x-5)}$ è costituito dall'insieme dei numeri reali:

A diversi da 0 C diversi da 5

B diversi da 0 e da 5 D maggiori di 5

g. Qual è l'equazione della retta r passante per il punto $P(0, -2)$ e parallela alla bisettrice del primo e terzo quadrante?

A $y = -x - 2$ B $y = x + 2$ C $y = x - 2$ D $y = -x + 3$

[Due risposte A, due B, due C e una D]

5 Considera l'equazione $0x = 5$. Indica se ciascuna affermazione è vera o falsa.

a. $x = 0$ è una soluzione. V F

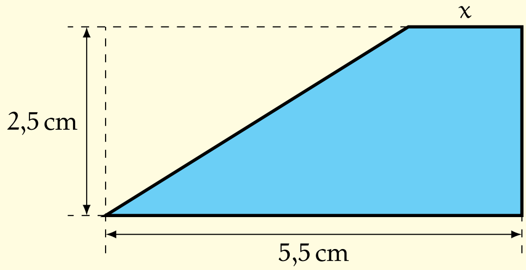
b. L'equazione ha infinite soluzioni. V F

c. L'equazione è determinata e la sua soluzione è $x = 5/0$. V F

d. L'equazione non ha soluzioni. V F

[Due affermazioni vere e due false]

6 Indica se ciascuna delle affermazioni seguenti relative al poligono seguente è vera o falsa.



a. L'area si ottiene calcolando $[(x + 5{,}5) \cdot 2{,}5]/2$. V F

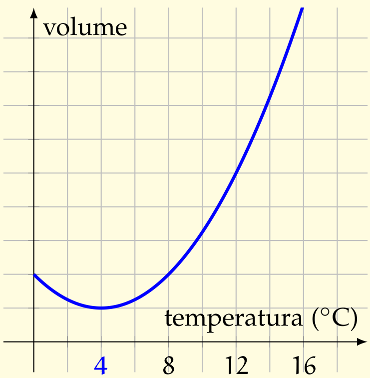
b. Il perimetro è uguale al perimetro del rettangolo se $x = 5{,}5$. V F

c. L'area tende a zero se x tende a zero. V F

d. Il perimetro è sempre maggiore del perimetro del rettangolo. V F

[Due affermazioni vere e due false]

7 Il grafico seguente rappresenta l'andamento del volume dell'acqua in funzione della temperatura. Indica se ciascuna affermazione è vera o falsa.



a. Il volume dell'acqua cresce sempre all'aumentare della temperatura. V F

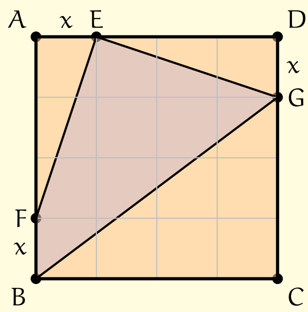
b. Il volume minimo dell'acqua si ha a $0\,°C$. V F

c. Oltre i $4\,°C$ il volume dell'acqua cresce sempre. V F

d. Il volume dell'acqua è massimo a $4\,°C$. V F

[Due affermazioni vere e due false]

8 È dato un quadrato $ABCD$ con lato lungo $8\,cm$. Al suo interno è inscritto il quadrilatero $EFBG$. La posizione dei punti E, F, G può variare lungo i lati, ma i segmenti AE, DG e FB hanno sempre uguale lunghezza x. Al variare della lunghezza x tra 0 e 8, l'area del quadrilatero è descritta dall'espressione $A = x^2 - 4x + 32$. Indica per ciascuna affermazione se è vera o falsa.



a. Se $x = 1$ cm l'area del quadrilatero EFBG è pari a $35\,\text{cm}^2$. V F

b. L'area del quadrilatero è minima se $x = 2$. V F

c. Se $x = 0$ il quadrilatero diventa un triangolo. V F

d. Se $x = 8$ il quadrilatero EFBG coincide con il quadrato ABCD. V F

[Tre affermazioni vere e una falsa]

9 Indica la risposta corretta.

a. La pendenza di una strada è il rapporto tra la variazione in altezza e la variazione in orizzontale del tratto percorso. Prima di un tratto rettilineo, Filippo vede il cartello in figura che indica una pendenza del 10%. Il tratto di strada che Filippo sta per percorrere permette di superare un dislivello di 100 m. Quanto è lungo circa questo tratto di strada?

A 100 m B 1000 m C 1005 m D 1100

b. Laura vuole ingrandire una foto di $20\,\text{cm} \times 15\,\text{cm}$ che ha scattato durante le vacanze. Perché l'ingrandimento sia simile alla foto di partenza, la foto ingrandita dovrà:

A mantenere gli angoli invariati

B mantenere il rapporto tra base e altezza costante

C mantenere il rapporto tra base e altezza costante e gli angoli invariati

D nessuna delle risposte precedenti

c. Quale è il risultato del limite $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x}{x^2 - x + 1}$?

A $-\infty$ B 0 C 1 D $+\infty$

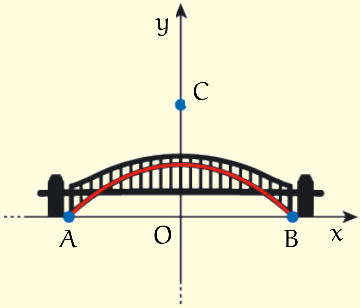
d. Un gioco per computer si gioca su una scacchiera formata da 9×9 riquadri, dietro cui sono nascosti dieci fiori. Cliccando sui riquadri della scacchiera, a volte si può scoprire un fiore nascosto. Qual è la probabilità di scoprire un fiore al primo tentativo?

A $1/9$ B $1/81$ C $10/80$ D $10/81$

e. Andrea ha una valigia che si apre inserendo una combinazione di tre cifre. Andrea però non la ricorda e procede per tentativi. Qual è la probabilità che Andrea indovini la combinazione esatta al primo tentativo?

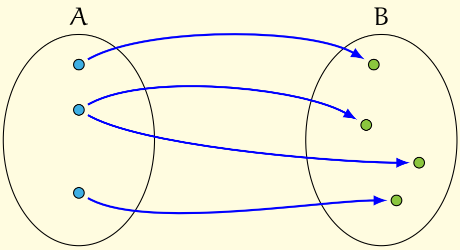
A $0{,}001$ B $0{,}001\%$ C $0{,}3$ D $1/3^{10}$

f. L'arcata inferiore del ponte rappresentato nella figura seguente è assimilabile a una parabola. Questa parabola ha il vertice sull'asse y e interseca l'asse x nei punti A e B. I punti A, B e C in figura hanno coordinate $A(-2;\,0)$, $B(2;\,0)$ e $C(0;\,2)$. Quale delle seguenti può essere l'equazione della parabola che rappresenta l'arcata inferiore del ponte?



A $y=-\frac{1}{4}x^2+1$ B $y=-\frac{1}{2}x^2+2$ C $y=-\frac{1}{4}x^2+2$ D $y=-\frac{1}{2}x^2+1$

g. La relazione rappresentata dal seguente diagramma:



A è una funzione suriettiva

B è una funzione iniettiva

C è una funzione biiettiva

D non è una funzione

[Una risposta A, due B, due C e due D]