MATEMATICA

per le seconde

degli Istituti professionali

LORENZO PANTIERI

Questo lavoro spiega il programma di matematica degli Istituti professionali italiani. Ringrazio i miei studenti per l'aiuto fornito: il libro è più loro che mio. Se avete idee su argomenti da aggiungere o modificare, o se vi dovesse capitare di notare un errore, di battitura o di sostanza, mi fareste un favore comunicandomelo. Spero che possiate studiare la matematica con il mio stesso piacere.

♡

Lorenzo Pantieri

Matematica per gli Istituti professionali

☞ lorenzo.pantieri@gmail.com

INDICE

1 SCOMPOSIZIONE DEI POLINOMI

Definizione 1. *Scomporre un polinomio in fattori* significa scriverlo come prodotto di due o più polinomi; se poi ciascun polinomio di tale prodotto non è ulteriormente scomponibile, allora la scomposizione è *in fattori irriducibili*.

Per esempio:

- perché sappiamo che
$$(x+3)(x-3) = x^2 - 9$$
allora una scomposizione del binomio $x^2 - 9$ è $(x+3)(x-3)$
- perché sappiamo che
$$(x+2)(x+3) = x^2 + 5x + 6$$
allora una scomposizione del trinomio $x^2 + 5x + 6$ è $(x+2)(x+3)$

Polinomi come $x^2 - 9$ e $x^2 + 5x + 6$ si dicono *riducibili*. Ci sono invece altri polinomi che non si possono scomporre, come per esempio $x^2 + 9$; questi polinomi si dicono *irriducibili*.

Definizione 2. Un polinomio è *riducibile* se è possibile scomporlo nel prodotto di altri polinomi, tutti di grado inferiore a quello dato. Si dice *irriducibile* in caso contrario.

Le regole per eseguire la scomposizione non sono del tutto nuove perché in molti casi si tratta di leggere da destra verso sinistra le formule già note sul prodotto di polinomi e sui prodotti notevoli.

1.1 RACCOGLIMENTI

Raccoglimento totale

Per eseguire il raccoglimento a fattor comune (o *raccoglimento totale*) di un polinomio P si procede come segue:

- si calcola il MCD fra i monomi di P

- si scrive P come prodotto del MCD trovato per il polinomio che si ottiene dividendo ciascuno dei monomi di P per tale MCD

Per esempio:

- $ax + ay = a(x + y)$
- $6a^2 + 4ab = 2a(3a + 2b)$

Un raccoglimento di questo genere si può fare anche quando il fattore comune, anziché essere un monomio, è un polinomio. Per esempio, nel polinomio $x(a - 1) + y(a - 1)$ si può raccogliere il binomio $(a - 1)$, ottenendo

$$x(a-1) + y(a-1) = (a-1)(x+y)$$

Dopo un raccoglimento a fattor comune, il numero di termini che si trovano all'interno delle parentesi deve essere uguale al numero dei termini del polinomio. Per esempio:

$$\underbrace{x^3 + x^2 + x}_{\text{tre termini}} = x(\underbrace{x^2 + x + 1}_{\text{tre termini}})$$

Esercizio 1. Scomponi $x(a + b) - y(a + b) + 2(a + b)$.

Soluzione. Il fattore comune è $(a + b)$, quindi

$$x(a+b) - y(a+b) + 2(a+b) = (a+b)(x-y+2)$$ □

Esercizio 2. Scomponi $x(a - 1) + y(a - 1) + 2(1 - a)$.

Soluzione. I primi due addendi hanno $(a - 1)$ come fattore comune, ma nel terzo troviamo $(1 - a)$. Conviene allora evidenziare dapprima il segno $-$ nell'ultima parentesi:

$$x(a-1) + y(a-1) + 2(1-a) = x(a-1) + y(a-1) - 2(\mathbf{a-1})$$

Il fattore comune è $a - 1$. Raccogliendolo otteniamo:

$$(a-1)(x+y-2)$$ □

Raccoglimento parziale

Talvolta non esiste un fattore comune a tutti i termini da poter raccogliere, ma capita che ci siano dei fattori comuni solo a qualche termine. Per esempio, nel polinomio

$$\underbrace{ax + bx} + \underbrace{ay + by}$$

i primi due termini hanno in comune il fattore x, mentre gli ultimi due hanno in comune il fattore y. Possiamo allora eseguire dei *raccoglimenti parziali* mettendo in evidenza questi fattori comuni parziali:

$$x(a+b)+y(a+b)$$

Quella che abbiamo ottenuto *non è ancora una scomposizione* del polinomio di partenza perché abbiamo una somma, ma ci siamo messi nelle condizioni di poter effettuare un raccoglimento totale, visto che $(a+b)$ è un fattore comune ai due addendi. Eseguendo il raccoglimento atteniamo

$$(a+b)(x+y)$$

che è la scomposizione cercata.

Questo procedimento è applicabile tutte le volte che è possibile un successivo raccoglimento totale; non serve invece se non si riesce a mettere in evidenza un fattore comune.

Esercizio 3. Scomponi $2x-2y-ax+ay$.

Soluzione. Si può eseguire un raccoglimento parziale:

$$\underbrace{2x-2y}-\underbrace{ax+ay}=2(x-y)-a(x-y)=(x-y)(2-a)$$ □

Esercizio 4. Scomponi $2x-2y-ax+az$.

Soluzione. Proviamo a eseguire un raccoglimento parziale:

$$\underbrace{2x-2y}-\underbrace{ax+az}=2(x-y)-a(x-z)$$

Questa volta il raccoglimento, anche se eseguito correttamente, non è di alcuna utilità perché non ha messo in evidenza un fattore comune. Per scomporre il polinomio, sempre che sia possibile, occorre procedere per altra via. □

Esercizio 5. Scomponi $ax+ay+3x+3y$.

Soluzione. Il raccoglimento parziale si può fare in diversi modi.

- Possiamo raccogliere a fra i primi due monomi e 3 fra gli ultimi due:

$$\underbrace{ax+ay}+\underbrace{3x+3y}=a(x+y)+3(x+y)=(x+y)(a+3)$$

- Oppure possiamo raccogliere x fra il primo e il terzo monomio, e y fra il secondo e il quarto:

$$\underbrace{ax}+\underline{ay}+\underbrace{3x}+\underline{3y}=x(a+3)+y(a+3)=(a+3)(x+y)$$

Le due scomposizioni, ovviamente, coincidono. □

Talvolta si usa una combinazione tra il raccoglimento totale e quello parziale, come nell'esempio seguente.

Esercizio 6. Scomponi $2ax+2bx+4ay+4by$.

Soluzione. Mettiamo in evidenza il fattore 2 per tutto il polinomio:

$$2(ax+bx+2ay+2by)$$

Raccogliamo x fra i primi due termini all'interno della parentesi e $2y$ fra gli ultimi due:

$$2(\underbrace{ax+bx}+\underbrace{2ay+2by})=2\big[x(a+b)+2y(a+b)\big]=2\big[(a+b)(x+2y)\big]$$

In definitiva, la scomposizione del polinomio è

$$2(a+b)(x+2y)$$

in cui abbiamo eliminato le parentesi quadre perché superflue. □

Esercizio 7. Scomponi $ax+ay+az+bx+by+bz$.

Soluzione. Non c'è alcun fattore comune a tutto il polinomio. Proviamo a mettere in evidenza per gruppi di termini, evidenziando a tra i primi tre termini e b tra gli ultimi tre:

$$\underbrace{ax+ay+az}+\underbrace{bx+by+bz}=a(x+y+z)+b(x+y+z)=(x+y+z)(a+b)$$ □

Gli esempi precedenti ci permettono di fare alcune considerazioni sui modi di raccoglimento totale e parziale.

- Innanzitutto occorre verificare se c'è la possibilità di un raccoglimento totale.
- Se il polinomio ottenuto dopo il raccoglimento lo permette, bisogna raccogliere parzialmente per gruppi di monomi di uguale numerosità: a due a due, a tre a tre, e così via.
- La scelta dei termini fra cui raccogliere a fattor parziale non segue regole precise se non quella di cercare di arrivare alla possibilità di un successivo raccoglimento totale; sarà l'esperienza via via maturata a guidarti nelle scelte.
- Può capitare che un raccoglimento parziale fatto in un certo modo non permetta di fare la scomposizione; prima di abbandonare questo metodo conviene tuttavia provare a eseguire raccoglimenti in un altro modo.

1.2 RICONOSCIMENTO DI PRODOTTI NOTEVOLI

Le formule che abbiamo imparato sui prodotti notevoli si possono anche leggere da destra verso sinistra per individuare i polinomi da cui provengono tali espressioni e rendere quindi possibile la loro scomposizione.

Quadrato di un binomio

Ricordiamo le formule:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 \qquad a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

Se un polinomio è costituito da tre addendi, due dei quali sono quadrati di monomi o di altri polinomi, è quindi possibile che tale trinomio sia il quadrato di un binomio. Per stabilirlo bisogna verificare che il terzo termine sia proprio il doppio prodotto delle basi considerate. Se il doppio prodotto ha segno $+$, interporremo il segno $+$ fra le basi, se ha segno $-$ interporremo il segno $-$.

Esercizio 8. Scomponi $x^2 + 6x + 9$.

Soluzione. Il primo e il terzo termine sono quadrati, rispettivamente di x e di 3, e il secondo termine è il doppio prodotto degli stessi monomi $(2 \cdot x \cdot 3 = 6x)$.

$$\begin{array}{ccc} x^2 & + 6x + & 9 \\ \downarrow & & \downarrow \\ (x)^2 & & (3)^2 \end{array}$$

Quindi possiamo scrivere:

$$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$$ □

Esercizio 9. Scomponi $x^2 - 2x + 1$.

Soluzione. Il primo e il terzo termine sono quadrati, rispettivamente di x e di 1, e il secondo termine è il doppio prodotto degli stessi monomi, quindi:

$$x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$$ □

Esercizio 10. Scomponi $9a^2 - 12ab + 4b^2$.

Soluzione. Il primo e il terzo termine sono quadrati, rispettivamente di $3a$ e di $2b$, e il secondo termine è il doppio prodotto degli stessi monomi, quindi:

$$9a^2 - 12ab + 4b^2 = (3a - 2b)^2$$ □

Differenza di quadrati

Ricordiamo la formula:

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

Se un binomio è costituito dalla *differenza* di due monomi che sono dei quadrati, per scomporlo basta quindi individuare le basi dei due quadrati e scrivere il prodotto della loro somma per la loro differenza.

Esercizio 11. Scomponi $9x^2 - 16$.

Soluzione. I due termini sono i quadrati rispettivamente di $3x$ e di 4.

$$\begin{array}{ccc} 9x^2 & - & 16 \\ \downarrow & & \downarrow \\ (3x)^2 & & 4^2 \end{array}$$

Quindi:

$$9x^2 - 16 = (3x+4)(3x-4)$$ □

Esercizio 12. Scomponi $(a-3)^2 - b^2$.

Soluzione. Il due termini sono i quadrati rispettivamente di $a-3$ e di b, quindi:

$$(a-3)^2 - b^2 = [(a-3)+b] \cdot [(a-3)-b] = (a-3+b)(a-3-b)$$ □

1.3 TRINOMIO SPECIALE

Supponiamo di dover scomporre il trinomio di secondo grado

$$x^2 + 5x + 6$$

Per scomporlo bisogna cercare i due numeri interi che hanno per somma il coefficiente del termine di primo grado (cioè 5) e per prodotto il termine noto (cioè 6). Questi due numeri sono 2 e 3. Allora si può scrivere:

$$x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3)$$

che è la scomposizione cercata.

Questa procedura si può applicare a tutti i polinomi di secondo grado della forma

$$x^2 + sx + p$$

tali che

- il coefficiente del termine di secondo grado è uguale a 1
- il coefficiente del termine di primo grado s e il termine noto p sono numeri interi
- s si può esprimere come somma di due numeri interi a e b ($s = a + b$)
- p è uguale al prodotto degli stessi due numeri a e b ($p = a \cdot b$)

Un trinomio di questo tipo si dice *trinomio speciale* (o *caratteristico*). Per scomporlo basta individuare i due numeri interi a e b tali che $s = a + b$ e $p = a \cdot b$, e scrivere che:

$$x^2 + sx + p = x^2 + (a + b)x + a \cdot b = (x + a)(x + b)$$

Per cercare i due numeri a e b conviene partire dal loro prodotto (il termine noto del trinomio), scrivere tutte le coppie di numeri interi che danno quel prodotto e cercare fra queste coppie quella che ha per somma il coefficiente del termine di primo grado.

Esercizio 13. Scomponi $x^2 + 6x + 8$.

Soluzione. In questo caso $s = 6$ e $p = 8$. A meno del segno, il termine noto 8 si può scrivere come prodotto di due numeri interi solo come:

$$1 \cdot 8 \qquad 2 \cdot 4$$

Poiché il prodotto è positivo, i numeri cercati sono concordi; poiché la somma è positiva, questi numeri sono entrambi positivi. I numeri cercati sono quindi 2 e 4 ($s = a + b = 2 + 4 = 6$, $p = a \cdot b = 2 \cdot 4 = 8$). Quindi il trinomio si scompone in:

$$x^2 + 6x + 8 = (x + 2)(x + 4)$$ □

Esercizio 14. Scomponi $x^2 - 5x + 6$.

Soluzione. In questo caso $s = -5$ e $p = 6$. A meno del segno, il termine noto 6 si può scrivere come prodotto di due numeri interi solo come:

$$1 \cdot 6 \qquad 2 \cdot 3$$

Poiché il prodotto è positivo, i numeri cercati sono concordi; poiché la somma è negativa, questi numeri sono entrambi negativi. I numeri cercati sono quindi -2 e -3, per cui:

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$$ □

Esercizio 15. Scomponi $x^2 + 3x - 10$.

Soluzione. In questo caso $s = 3$ e $p = -10$. A meno del segno, il termine noto -10 si può scrivere come prodotto di due numeri interi solo come:

$$1 \cdot 10 \qquad 2 \cdot 5$$

Poiché il prodotto è negativo, i numeri cercati sono discordi; poiché la somma è positiva, il valore assoluto del numero positivo è più grande del valore assoluto del numero negativo. I numeri cercati sono quindi -2 e 5, per cui:

$$x^2 + 3x - 10 = (x - 2)(x + 5)$$ □

Esercizio 16. Scomponi $x^2 - 2x - 3$.

Soluzione. In questo caso $s = -2$ e $p = -3$. A meno del segno, il termine noto -3 si può scrivere come prodotto di due numeri interi solo come:

$$1 \cdot 3$$

Poiché il prodotto è negativo, i numeri cercati sono discordi; poiché la somma è negativa, il valore assoluto del numero negativo è più grande del valore assoluto del numero positivo. I numeri cercati sono quindi -3 e 1. Quindi il trinomio si scompone in:

$$x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1)$$ □

Esercizio 17. Scomponi $x^2 + x + 1$.

Soluzione. In questo caso $s = p = 1$. Poiché non esistono due numeri interi che soddisfano le condizioni richieste, il trinomio *non* è un trinomio speciale. In effetti, si dimostra che il trinomio è irriducibile. □

Trinomi riconducibili a trinomi speciali

In alcuni casi si può applicare il metodo per scomporre un trinomio speciale anche quando il trinomio non è di secondo grado.

Esercizio 18. Scomponi $x^4 - 5x^2 + 4$.

Soluzione. Facciamo la sostituzione

$$x^2 = t$$

Il polinomio P assegnato diventa

$$t^2 - 5t + 4$$

che è un trinomio speciale:

$$t^2 - 5t + 4 = (t - 4)(t - 1)$$

Ritorniamo all'incognita x ponendo $t = x^2$:

$$P(x) = (x^2 - 4)(x^2 - 1)$$

I polinomi $x^2 - 4$ e $x^2 - 1$ sono entrambi differenze di quadrati:

$$P(x) = (x^2 - 4) \cdot (x^2 - 1) = (x - 2)(x + 2)(x - 1)(x + 1)$$

che è la scomposizione cercata. □

Esercizio 19. Scomponi $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$.

Soluzione. Con la sostituzione $x^2 = t$ il polinomio P assegnato diventa

$$t^2 - 10t + 9$$

che è un trinomio speciale:

$$t^2 - 10t + 9 = (t - 9)(t - 1)$$

Ritorniamo all'incognita x ponendo $t = x^2$:

$$P(x) = (x^2 - 9)(x^2 - 1)$$

I polinomi $x^2 - 9$ e $x^2 - 1$ sono entrambi differenze di quadrati:

$$P(x) = (x^2 - 9) \cdot (x^2 - 1) = (x - 3)(x + 3)(x - 1)(x + 1)$$

che è la scomposizione cercata. □

Esercizio 20. Scomponi $x^4 + 5x^2 + 6$.

Soluzione. Con la sostituzione $x^2 = t$ il polinomio P assegnato diventa

$$t^2 + 5t + 6$$

che è un trinomio speciale:

$$t^2 + 5t + 6 = (t + 2)(t + 3)$$

Ritorniamo all'incognita x ponendo $t = x^2$:

$$P(x) = (x^2 + 2)(x^2 + 3)$$

che non è ulteriormente scomponibile, per cui quella appena scritta è la scomposizione cercata. □

1.4 REGOLA DI RUFFINI

Quando la scomposizione di un polinomio non si può fare con uno dei metodi precedenti, l'unica cosa che rimane è la *regola di Ruffini*. Dato un polinomio $P(x)$ di grado n, se riusciamo a trovare un numero a per cui $P(a) = 0$, allora possiamo scomporre

$$P(x) = (x - a) \cdot Q(x)$$

dove $Q(x)$ ha grado $n - 1$. Il problema di scomporre un polinomio $P(x)$ si riconduce quindi a quello della ricerca di un numero a che sostituito alla x renda nullo il polinomio. Un numero di questo tipo si dice anche *zero* del polinomio.

Il numero a non va cercato del tutto a caso. Se il polinomio è a coefficienti interi e il coefficiente di grado massimo è uguale a 1, possiamo restringere il campo di ricerca di questo numero: gli zeri interi del polinomio vanno cercati tra i divisori del termine noto.

Illustriamo la regola di Ruffini con un esempio.

Esercizio 21. Scomponi $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$.

Soluzione.

- Gli zeri interi di $P(x)$ sono da ricercare fra i divisori del termine noto -6:

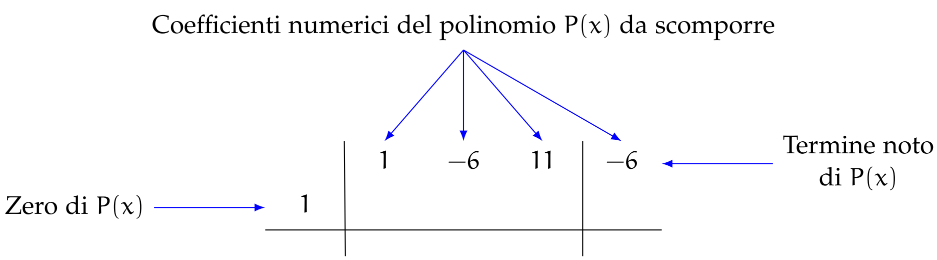
  $$\pm 1 \quad \pm 2 \quad \pm 3 \quad \pm 6$$

  Sostituiamo questi numeri in $P(x)$ finché ne troviamo uno che lo annulla. Per $x = 1$ si ha:

  $$P(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 11 \cdot 1 - 6 = 1 - 6 + 11 - 6 = 0$$

  quindi il polinomio si può scomporre come $P(x) = (x - 1)Q(x)$, con $Q(x)$ polinomio di secondo grado.

- Disegniamo il seguente schema: scriviamo i coefficienti di $P(x)$, ordinato secondo le potenze *decrescenti* della variabile. Se manca un coefficiente, occorre mettere 0. L'ultimo coefficiente è messo esternamente alla griglia. Nell'angolo a sinistra dello schema si pone lo zero del polinomio trovato, in questo caso 1.



- Il primo coefficiente si riporta inalterato nella parte sottostante:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & -6 & 11 & -6 \\ 1 & \downarrow & & & \\ \hline & 1 & & & \end{array}$$

- Moltiplichiamo lo zero del polinomio per il coefficiente appena trascritto e riportiamo il risultato sotto il secondo coefficiente: $1 \cdot 1 = 1$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & -6 & 11 & -6 \\ 1 & & 1 & & \\ \hline & 1 & & & \end{array}$$

- Sommiamo i due termini appena incolonnati: $-6 + 1 = -5$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & -6 & 11 & -6 \\ 1 & & 1 & & \\ \hline & 1 & -5 & & \end{array}$$

- Moltiplichiamo lo zero del polinomio per la somma ottenuta: $1 \cdot (-5) = -5$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & -6 & 11 & -6 \\ 1 & & 1 & -5 & \\ \hline & 1 & -5 & & \end{array}$$

- Sommiamo i due termini appena incolonnati: $11 - 5 = 6$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & -6 & 11 & -6 \\ 1 & & 1 & -5 & \\ \hline & 1 & -5 & 6 & \end{array}$$

- Moltiplichiamo lo zero del polinomio per la somma appena ottenuta: $1 \cdot 6 = 6$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & -6 & 11 & -6 \\ 1 & & 1 & -5 & 6 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & 0 \end{array}$$

- Sommiamo i due termini appena incolonnati: $-6 + 6 = 0$

$$
\begin{array}{c|ccc|c}
 & 1 & -6 & 11 & -6 \\
1 & & 1 & -5 & 6 \\
\hline
 & 1 & -5 & 6 & 0
\end{array}
$$

qui deve sempre venire 0

coefficienti di $Q(x)$

- I numeri che abbiamo ottenuto nell'ultima riga, cioè 1, -5 e 6, sono i coefficienti del polinomio $Q(x) = x^2 - 5x + 6$. Possiamo allora scrivere:

$$P(x) = (x-1)(x^2 - 5x + 6)$$

- Il polinomio $x^2 - 5x + 6$ è un trinomio speciale

$$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$$

In definitiva:

$$P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$$ □

Esercizio 22. Scomponi $x^3 - 7x - 6$.

Soluzione.

- Gli zeri interi di $P(x)$ sono da ricercare fra i divisori divisori di -6:

$$\pm 1 \quad \pm 2 \quad \pm 3 \quad \pm 6$$

Per $x = 1$ si ha:

$$P(1) = 1^3 - 7 \cdot 1 - 6 = 1 - 7 - 6 \neq 0$$

Per $x = -1$ si ha:

$$P(-1) = (-1)^3 - 7 \cdot (-1) - 6 = -1 + 7 - 6 = 0$$

quindi $P(x) = [x - (-1)]Q(x) = (x+1)Q(x)$, con $Q(x)$ polinomio di secondo grado. Nota lo 0 nella prima riga, in corrispondenza del termine di secondo grado mancante in P.

$$
\begin{array}{c|ccc|c}
 & 1 & 0 & -7 & -6 \\
-1 & & -1 & 1 & 6 \\
\hline
 & 1 & -1 & -6 & 0
\end{array}
$$

Quindi:

$$P(x) = (x+1)(x^2 - x - 6)$$

- Il polinomio $x^2 - x - 6$ è un trinomio speciale:

$$x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$$

In definitiva:

$$P(x) = (x+1)(x-3)(x+2) \qquad \square$$

Esercizio 23. Scomponi $x^3 - 8$.

Soluzione.

- Per $x = 2$ si ha:

$$P(2) = 2^3 - 8 = 8 - 8 = 0$$

quindi $P(x) = (x-2)Q(x)$, con $Q(x)$ polinomio di secondo grado. Nota i due zeri nella prima riga, in corrispondenza dei termini di secondo e di primo grado mancanti in P.

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 0 & 0 & -8 \\ 2 & & 2 & 4 & 8 \\ \hline & 1 & 2 & 4 & 0 \end{array}$$

Quindi:

$$P(x) = x^3 - 8 = (x-2)(x^2 + 2x + 4)$$

- Si dimostra che $x^2 + 2x + 4$ è irriducibile. In definitiva, quella appena scritta è la scomposizione richiesta. $\square$

SINTESI SULLA SCOMPOSIZIONE

Quando si deve scomporre un polinomio bisogna guardare bene la sua forma per capire quale, fra i metodi che abbiamo visto, è il più adatto. In generale, conviene seguire una procedura di questo tipo:

- si verifica se si può eseguire un raccoglimento totale
- si verifica se si può eseguire un raccoglimento parziale
- si verifica se il polinomio è lo sviluppo di un prodotto notevole (quadrato di un binomio se ha tre termini o differenza di quadrati se ne ha due)
- si verifica se il polinomio è un trinomio speciale

- si stabilisce se è possibile scomporlo con la regola di Ruffini
- si usa una combinazione dei metodi precedenti

1.5 MCD E MCM

Quando eseguiamo la divisione tra due numeri interi a e b, diciamo che a è *divisibile* per b (o che a è *multiplo* di b) se esiste un intero q tale che $a = qb$. I numeri a, b e q si dicono rispettivamente *dividendo*, *divisore* e *quoziente*.

Allo stesso modo, dati i polinomi $A(x)$ e $B(x)$, diremo che $A(x)$ è *divisibile* per $B(x)$ (o che A è *multiplo* di B) se esiste un polinomio $Q(x)$ tale che $A(x) = Q(x)B(x)$. I polinomi $A(x)$, $B(x)$ e $Q(x)$ si dicono rispettivamente *dividendo*, *divisore* e *quoziente*.

Se due o più polinomi hanno uno stesso polinomio divisore, si dice che esso è un *divisore comune* a tali polinomi. Fra tutti i divisori comuni a due o più polinomi si chiama *massimo comun divisore* (MCD) quello di grado più grande.

Definizione 3. Il *massimo comune divisore* di due polinomi A e B, indicato con $\text{MCD}(A, B)$, è il polinomio di grado più grande fra tutti i divisori comuni ad A e B.

Per determinare il MCD fra due o più polinomi:

- si scompongono i polinomi in fattori irriducibili
- si scrive il prodotto dei soli fattori comuni con l'esponente più piccolo con cui compaiono

Se un polinomio è divisibile per altri polinomi, si dice che esso è *multiplo comune* a tali polinomi. Due o più polinomi possono avere infiniti multipli comuni; quello di grado più piccolo si chiama *minimo comune multiplo* (mcm).

Definizione 4. Il *minimo comune multiplo* di due polinomi A e B, indicato con $\text{mcm}(A, B)$, è il polinomio di grado più piccolo tra tutti i multipli comuni diversi da zero di A e di B.

Per determinare il mcm fra due o più polinomi:

- si scompongono i polinomi in fattori irriducibili
- si scrive il prodotto dei fattori comuni e non comuni con l'esponente più grande con cui compaiono

Esercizio 24. Determina MCD e mcm fra i seguenti polinomi:

$$4x^2 - 4 \qquad 6x^2 + 12x + 6$$

Soluzione. Scomponiamo in fattori i due polinomi:

- $4x^2 - 4 = 4(x^2 - 1) = 4(x+1)(x-1)$
- $6x^2 + 12x + 6 = 6(x^2 + 2x + 1) = 6(x+1)^2$

Allora:

$$\text{MCD} = 2(x+1) \qquad \text{mcm} = 12(x+1)^2(x-1)$$ □

Esercizio 25. Determina MCD e mcm fra i seguenti polinomi:

$$8a^2 + 16ab + 8b^2 \qquad 4a^4 - 4a^2b^2 \qquad 12a^2 + 12ab$$

Soluzione. Scomponiamo in fattori i tre polinomi:

- $8a^2 + 16ab + 8b^2 = 8(a^2 + 2ab + b^2) = 8(a+b)^2$
- $4a^4 - 4a^2b^2 = 4a^2(a^2 - b^2) = 4a^2(a-b)(a+b)$
- $12a^2 + 12ab = 12a(a+b)$

Allora:

$$\text{MCD} = 4(a+b) \qquad \text{mcm} = 24a^2(a+b)^2(a-b)$$ □

Definizione 5. Due polinomi A e B si dicono *primi tra loro* se non hanno divisori comuni, a parte le costanti.

Per esempio:

- $x^2 - 1$ e $x^2 - 4$ sono primi tra loro, perché non hanno divisori comuni, essendo

$$x^2 - 1 = (x+1)(x-1) \qquad x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$$

- $x^2 - 9$ e $x^2 - 6x + 9$ *non* sono primi tra loro, perché hanno $x - 3$ come divisore comune:

$$x^2 - 9 = (x+3)(x-3) \qquad x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$$

1.6 ESERCIZI

Chi non risolve esercizi non impara la matematica.

Scomponi in fattori raccogliendo a fattor comune.

1. $3xy + 6x^2$ $[3x(2x+y)]$
2. $b^3 + 3b$ $[b(b^2+3)]$
3. $3xy - 12y^2$ $[3y(x-4y)]$
4. $x^3 - ax^2$ $[x^2(x-a)]$
5. $9a^3 - 6a^2$ $[3a^2(3a-2)]$
6. $5x^2 - 15x$ $[5x(x-3)]$
7. $18x^2y - 12y^2$ $[6y(3x^2-2y)]$
8. $4x^2y - x^2$ $[x^2(4y-1)]$
9. $5x^3 - 2x^2$ $[x^2(5x-2)]$
10. $2x^3 - 2x$ $[2x(x-1)(x+1)]$
11. $3a + 3$ $[3(a+1)]$
12. $2a^2b^2x - 4a^2b$ $[2a^2b(bx-2)]$
13. $-a^4 - a^3 - a^2$ $[-a^2(a^2+a+1)]$
14. $a(x+y) - b(x+y)$ $[(x+y)(a-b)]$
15. $2(x-3y) - y(3y-x)$ $[(y+2)(x-3y)]$

Scomponi in fattori con il raccoglimento parziale.

16. $2x - 2y + ax - ay$ $[(x-y)(a+2)]$
17. $3ax - 6a + x - 2$ $[(3a+1)(x-2)]$
18. $ax + bx - ay - by$ $[(a+b)(x-y)]$
19. $3ax - 9a - x + 3$ $[(x-3)(3a-1)]$
20. $ax^2 + ax + bx + b$ $[(x+1)(ax+b)]$
21. $2ax - 4a - x + 2$ $[(x-2)(2a-1)]$
22. $x^3 - x^2 + x - 1$ $[(x-1)(x^2+1)]$
23. $x^3 + x^2 - x - 1$ $[(x-1)(x+1)^2]$
24. $x^3 + x^2 + x + 1$ $[(x+1)(x^2+1)]$
25. $b^2x - b^2y + 2x - 2y$ $[(x-y)(b^2+2)]$
26. $a^3 + 2a^2 + a + 2$ $[(a+2)(a^2+1)]$
27. $a^2x + ax - a - 1$ $[(a+1)(ax-1)]$
28. $b^2x - 2bx + by - 2y$ $[(b-2)(bx+y)]$
29. $2a - a^2 + 8b - 4ab$ $[(2-a)(a+4b)]$
30. $2x^3 + x^2 + 2x + 1$ $[(2x+1)(x^2+1)]$
31. $3x^3 - x^2 + 9x - 3$ $[(3x-1)(x^2+3)]$

Scomponi in fattori raccogliendo prima a fattor comune e poi parziale.

32. $3x^3 - 3x^2 + 3x - 3$ $[3(x-1)(x^2+1)]$
33. $a^7 + 4a^3 - 2a^5 - 8a$ $[a(a^4+4)(a^2-2)]$
34. $x^3y + x^2y + xy + y$ $[y(x+1)(x^2+1)]$
35. $b^2x + b^2y - 2bx - 2by$ $[b(x+y)(b-2)]$
36. $b^2x - 2bx - 2by + b^2y$ $[b(b-2)(x+y)]$
37. $2^6x^2 + 2^7x + 2^{10}x + 2^{11}$ $[2^6(x+2)(x+16)]$
38. $2x^3 + 2x^2 - 2ax^2 - 2ax$ $[2x(x+1)(x-a)]$
39. $2bx^2 + 4bx - 2ax^2 - 4ax$ $[2x(x+2)(b-a)]$

40 $x^4+x^3-x^2-x$ $\quad[x(x-1)(x+1)^2]$

41 $3x^4+9x^2-6x^3-18x$ $\quad[3x(x^2+3)(x-2)]$

42 $3x^4-3x^3+3x^2-3x$ $\quad[3x(x-1)(x^2+1)]$

Scomponi in fattori riconoscendo il quadrato di un binomio.

43 a^2-2a+1 $\quad[(a-1)^2]$

44 x^2+4x+4 $\quad[(x+2)^2]$

45 y^2-6y+9 $\quad[(y-3)^2]$

46 $16t^2+8t+1$ $\quad[(4t+1)^2]$

47 $4x^2+1+4x$ $\quad[(2x+1)^2]$

48 $9a^2-6a+1$ $\quad[(3a-1)^2]$

49 $4x^2-12x+9$ $\quad[(2x-3)^2]$

50 $\frac{1}{4}a^2+ab+b^2$ $\quad\left[\left(\frac{1}{2}a+b\right)^2\right]$

51 $9x^2+4+12x$ $\quad[(3x+2)^2]$

52 $\frac{4}{9}a^4-4a^2+9$ $\quad\left[\left(\frac{2}{3}a^2-3\right)^2\right]$

53 $\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{3}x+\frac{1}{9}$ $\quad\left[\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}\right)^2\right]$

54 $4x^2+4xy+y^2$ $\quad[(2x+y)^2]$

55 $a^4+36a^2+12a^3$ $\quad[a^2(a+6)^2]$

56 $x^2-6xy+9y^2$ $\quad[(x-3y)^2]$

57 $25+10x+x^2$ $\quad[(x+5)^2]$

58 $25-10x+x^2$ $\quad[(x-5)^2]$

59 $100+a^2b^4+20ab^2$ $\quad[(10+ab^2)^2]$

60 $\frac{1}{9}a^2+\frac{2}{3}ab+b^2$ $\quad\left[\left(\frac{1}{3}a+b\right)^2\right]$

61 $25a^2-10ax+x^2$ $\quad[(5a-x)^2]$

62 $3a^2x-12axb+12b^2x$ $\quad[3x(a-2b)^2]$

63 $x^5+4x^4+4x^3$ $\quad[x^3(x+2)^2]$

64 $2y^3-12y^2x+18x^2y$ $\quad[2y(3x-y)^2]$

Scomponi i seguenti polinomi come differenza di quadrati.

65 a^2-25b^2 $\quad[(a+5b)(a-5b)]$

66 $16-x^2y^2$ $\quad[(4-xy)(4+xy)]$

67 $25-9x^2$ $\quad[(5-3x)(5+3x)]$

68 $4a^4-9b^2$ $\quad[(2a^2-3b)(2a^2+3b)]$

69 x^2-16y^2 $\quad[(x-4y)(x+4y)]$

70 $144x^2-9y^2$ $\quad[9(4x-y)(4x+y)]$

71 $16a^4-81b^2$ $\quad[(4a^2-9b)(4a^2+9b)]$

72 $a^2b^4-c^2$ $\quad[(ab^2-c)(ab^2+c)]$

73 $4x^6-9y^4$ $\quad[(2x^3-3y^2)(2x^3+3y^2)]$

74 $-1+a^2$ $\quad[(a-1)(a+1)]$

75 $\frac{a^2}{4}-\frac{y^2}{9}$ $\quad\left[\left(\frac{a}{2}-\frac{y}{3}\right)\left(\frac{a}{2}+\frac{y}{3}\right)\right]$

76 $2a^2-50$ $\quad[2(a-5)(a+5)]$

77 $-4a^2+b^2$ $\quad[(b-2a)(b+2a)]$

78 $-a^2b^4+49$ $\quad[(7-ab^2)(7+ab^2)]$

79 a^4-16 $\quad[(a-2)(a+2)(a^2+4)]$

80 $16a^2-9b^2$ $\quad[(4a-3b)(4a+3b)]$

81 $9-4x^2$ $\quad[(3-2x)(3+2x)]$

82 $\frac{1}{4}x^2-1$ $\quad\left[\left(\frac{1}{2}x-1\right)\left(\frac{1}{2}x+1\right)\right]$

83 a^2-9b^2 $\quad[(a+3b)(a-3b)]$

84 $\frac{25}{16}a^2-1$ $\quad\left[\left(\frac{5}{4}a-1\right)\left(\frac{5}{4}a+1\right)\right]$

85 $-16+25x^2$ $\quad[(5x-4)(5x+4)]$

86 x^4-y^8 $\quad[(x-y^2)(x+y^2)(x^2+y^4)]$

87 $(a-1)^2-b^2$ $\quad[(a-1-b)(a-1+b)]$

Scomponi in fattori i seguenti trinomi speciali.

88 $x^2 - 5x - 36$ $[(x-9)(x+4)]$

89 $x^2 - 17x + 16$ $[(x-16)(x-1)]$

90 $x^2 - 13x + 12$ $[(x-12)(x-1)]$

91 $x^2 + 6x + 8$ $[(x+2)(x+4)]$

92 $x^2 + 7x + 12$ $[(x+3)(x+4)]$

93 $x^2 - 2x - 3$ $[(x-3)(x+1)]$

94 $x^2 + 9x + 18$ $[(x+3)(x+6)]$

95 $x^2 - 5x + 6$ $[(x-3)(x-2)]$

96 $x^2 - 8x - 9$ $[(x-9)(x+1)]$

97 $x^2 - 7x + 12$ $[(x-4)(x-3)]$

98 $x^2 - 6x + 8$ $[(x-4)(x-2)]$

99 $x^2 - 3x - 4$ $[(x-4)(x+1)]$

100 $x^2 + 5x - 14$ $[(x-2)(x+7)]$

101 $x^2 + 4x - 12$ $[(x-2)(x+6)]$

102 $x^2 - 3x + 2$ $[(x-2)(x-1)]$

103 $x^2 + 3x - 10$ $[(x-2)(x+5)]$

104 $x^2 + 13x + 12$ $[(x+1)(x+12)]$

105 $x^2 + 2x - 35$ $[(x-5)(x+7)]$

106 $x^2 + 5x - 36$ $[(x-4)(x+9)]$

107 $x^2 + 8x + 7$ $[(x+1)(x+7)]$

108 $x^2 - 10x + 24$ $[(x-6)(x-4)]$

109 $x^2 + x - 20$ $[(x-4)(x+5)]$

110 $x^2 + 4x - 45$ $[(x-5)(x+9)]$

111 $x^2 - 4x - 21$ $[(x-7)(x+3)]$

112 $x^2 + 4x - 21$ $[(x-3)(x+7)]$

113 $x^2 - 10x + 21$ $[(x-7)(x-3)]$

Scomponi in fattori i seguenti polinomi con la regola di Ruffini.

114 $x^3 - 4x^2 + x + 6$ $[(x+1)(x-2)(x-3)]$

115 $x^3 + x^2 - 5x + 3$ $[(x-1)^2(x+3)]$

116 $x^3 - 5x^2 + 8x - 4$ $[(x-1)(x-2)^2]$

117 $3t^3 - t^2 - 12t + 4$ $[(3t-1)(t-2)(t+2)]$

Scomponi in fattori i seguenti polinomi con i metodi che conosci.

118 $4x^2 - xy - 4x + y$ $[(x-1)(4x-y)]$

119 $x^3 + 3x - 4x^2$ $[x(x-3)(x-1)]$

120 $6x^2 - 24xy + 24y^2$ $[6(x-2y)^2]$

121 $81a - 16a^3b^2$ $[a(9-4ab)(9+4ab)]$

122 $x^2 - 4x - 45$ $[(x-9)(x+5)]$

123 $y^3 - 5y^2 - 24y$ $[y(y-8)(y+3)]$

124 $a^3x + 4a^2x + 4ax$ $[ax(a+2)^2]$

125 $8ab^2 - 2a^3$ $[2a(2b-a)(2b+a)]$

126 $x^2 - 2x + 1$ $[(x-1)^2]$

127 $a^4 + b^4 - 2a^2b^2$ $[(a-b)^2(a+b)^2]$

128 $x^2 - 12x + 32$ $[(x-8)(x-4)]$

129 $x^2 - 8x + 15$ $[(x-5)(x-3)]$

130 $x^3 - 5x^2 + 6x$ $[x(x-3)(x-2)]$

131 $4a^2 + 4a + 1$ $[(2a+1)^2]$

132 $4x^2y^2 - 4xy + 1$ $[(2xy-1)^2]$

133 $x^3 + x^2 - 9x - 9$ $[(x+1)(x+3)(x-3)]$

134 $a^2 + 6a + 9$ $[(a+3)^2]$

135 $12xy - 16y^2$ $[4y(3x-4y)]$

136 $ax^2 - ay^2$ $[a(x-y)(x+y)]$

137 $7t^2 - 28$ $[7(t-2)(t+2)]$

138 $2x^2 + 8 + 8x$ $[2(x+2)^2]$

139 $25y^4 - 10y^2 + 1$ $[(5y^2-1)^2]$

140 $a^2 + 12a + 36$ $[(a+6)^2]$

141 $5x^4 - 5x^2y^4$ $[5x^2(x-y^2)(x+y^2)]$

142 $x^2 + 10xy + 25y^2$ $[(x+5y)^2]$

143 $x^2 + 6x - 40$ $[(x-4)(x+10)]$

144 $x^2 - 6x - 27$ $[(x-9)(x+3)]$

145 $ax + bx - 3ay - 3by$ $[(a+b)(x-3y)]$

146 $ax^2 + 4ay^2 + 4axy$ $[a(x+2y)^2]$

147 $6x^3y - 12x^2y^2 + 6xy^3$ $[6xy(x-y)^2]$

148 $x^2 + 3x - 28$ $[(x-4)(x+7)]$

149 $x^2 + 2x - 24$ $[(x-4)(x+6)]$

150 $18a^4b - 2b^3$ $[2b(3a^2 - b)(3a^2 + b)]$

151 $x^2 - 9x + 20$ $[(x-5)(x-4)]$

152 $32a - 50ab^2$ $[2a(4-5b)(4+5b)]$

153 $4y^2 - 12y + 9$ $[(2y-3)^2]$

154 $x^2 + 4x - 45$ $[(x+9)(x-5)]$

155 $2ax^2 + 8ay^2 + 8axy$ $[2a(x+2y)^2]$

156 $12ax^2 + 12axy + 3ay^2$ $[3a(2x+y)^2]$

157 $a^2 + 4a - 32$ $[(a-4)(a+8)]$

158 $9y^2 + 6y + 1$ $[(3y+1)^2]$

159 $9a^2 - 9$ $[9(a-1)(a+1)]$

160 $x^2 + 9x - 10$ $[(x-1)(x+10)]$

161 $x^2 - x - 30$ $[(x-6)(x+5)]$

162 $2x^3 + 14x^2 + 20x$ $[2x(x+2)(x+5)]$

163 $x^2 + 11 + 24$ $[(x+3)(x+8)]$

164 $x^2 + 8x + 12$ $[(x+2)(x+6)]$

165 $x^2 - 5x + 4$ $[(x-4)(x-1)]$

Scomponi in fattori i seguenti polinomi con i metodi che conosci.

166 $ay + 2x^3 - 2ax^3 - y$ $[(a-1)(y-2x^3)]$

167 $5a(x+3y) - 3(x+3y)$ $[(x+3y)(5a-3)]$

168 $3xy^3 - 6xy - ay^2 + 2a$ $[(y^2-2)(3xy-a)]$

169 $2x(x-1) - 3a^2(x-1)$ $[(x-1)(2x-3a^2)]$

170 $3(x+y)^2 + 5x + 5y$ $[(x+y)(3x+3y+5)]$

171 $b^2x + b^2y + 2ax + 2ay$ $[(x+y)(2a+b^2)]$

172 $b^2x - b^2y + 2ax - 2ay$ $[(x-y)(b^2+2a)]$

173 $ax + bx + 2x - a - b - 2$ $[(a+b+2)(x-1)]$

174 $a^3 - a^2b^2 - ab + b^3$ $[(a-b^2)(a^2-b)]$

175 $10x^3 - 12x^2 - 5xy + 6y$ $[(5x-6)(2x^2-y)]$

176 $a^5 - 16ab^4$ $[a(a-2b)(a+2b)(a^2+4b^2)]$

177 $16y^4 - z^4$ $[(2y-z)(2y+z)(4y^2+z^2)]$

178 $a^8 - b^8$ $[(a-b)(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)]$

179 $a^3 + a^2 - 4a - 4$ $[(a+1)(a-2)(a+2)]$

180 $6a^3 - a^2 - 19a - 6$ $[(a-2)(2a+3)(3a+1)]$

181 $ax + bx - 3ay - 3by$ $[(a+b)(x-3y)]$

182 $4a^3 + 8a^2 - a - 2$ $[(a+2)(2a-1)(2a+1)]$

183 $2x^3 + 4x - 3x^2 - 6$ $[(2x-3)(x^2+2)]$

184 $81a^4 - 64a^2b^2$ $[a^2(9a-8b)(9a+8b)]$

185 $x^3 + 2x^2 - x - 2$ $[(x-1)(x+1)(x+2)]$

186 $3x^5 - 27xy^4$ $[3x(x^2-3y^2)(x^2+3y^2)]$

187 $6abx - 3x + 2aby - y$ $[(2ab-1)(3x+y)]$

188 $81a^4 - b^4$ $[(3a-b)(3a+b)(9a^2+b^2)]$

189 $x^2 - 3a^3 + ax - 3a^2x$ $[(a+x)(x-3a^2)]$

190 $6a^5 - 24ab^4$ $[6a(a^2-2b^2)(a^2+2b^2)]$

191	x^3+3x^2-6x-8	$[(x-2)(x+1)(x+4)]$
192	$50a^4b^3-2b^3$	$[2b^3(5a^2-1)(5a^2+1)]$
193	$36ab-49a^3b^3$	$[ab(6-7ab)(6+7ab)]$
194	$a^2b-25b+a^2-25$	$[(a-5)(a+5)(b+1)]$
195	a^8-1	$[(a-1)(a+1)(a^2+1)(a^4+1)]$
196	$50a^3b^2-8a^5$	$[2a^3(5b-2a)(5b+2a)]$

Calcola il MCD e il mcm dei seguenti gruppi di polinomi.

197	$a+3$	$5a+15$	a^2+6a+9	$[a+3,\ 5(a+3)^2]$
198	$a-b$	$ab-a^2$	a^2-b^2	$[a-b,\ a(a-b)(a+b)]$
199	$b+2a$	$b-2a$	b^2-4a^2	$[1,\ (b-2a)(b+2a)]$
200	a^2-9	$3a-a^2$	$3a+a^2$	$[1,\ a(a-3)(a+3)]$
201	$x^2+2xy+y^2$	x^2-y^2	$(x+y)^2(x-y)$	$[x+y,\ (x-y)(x+y)^2]$
202	$a-2$	a^2-9	a^2+a-6	$[1,\ (a-3)(a-2)(a+3)]$
203	$x-1$	x^2-2x+1	x^2-1	$[x-1,\ (x-1)^2(x+1)]$
204	$x-2$	$x-1$	x^2-3x+2	$[1,\ (x-2)(x-1)]$
205	a^2-1	$b+1$	$a+ab-b-1$	$[1,\ (a-1)(a+1)(b+1)]$
206	x	$2x^2-3x$	$4x^2-9$	$[1,\ x(2x-3)(2x+3)]$
207	a^2-2a+1	a^2-3a+2	$1-a$	$[a-1,\ (a-1)^2(a-2)]$
208	$2x$	$3x-2$	$3x^2-2x$	$[1,\ 2x(3x-2)]$
209	a^2-a	a^2+a	$2a^2-2$	$[1,\ 2a(a-1)(a+1)]$
210	$x-2$	x^2-4	x^2-3x+2	$[x-2,\ (x-2)(x-1)(x+2)]$
211	x^2-4x+4	x^2-4	$3x-6$	$[x-2,\ 3(x-2)^2(x+2)]$

212 Indica la risposta corretta.

a. Quale dei seguenti polinomi è scomposto in fattori?

A $ax+ay$ B $(x-1)^2-1$ C $2x(x-3)^2$ D $a(a-1)+2a$

b. Il polinomio $10a^4-10a^3$ *non* è divisibile per uno dei seguenti monomi; quale?

A $2a$ B $5a^2$ C $10a^3$ D $6a^4$

c. Quale dei seguenti polinomi è *irriducibile*?

A x^2-4 B x^2+4 C x^2-4x+4 D x^4+4x^2+4

d. Quale dei seguenti trinomi si scompone in $(x+7)(x-2)$?

A $x^2 - 5x - 14$ B $x^2 + 5x + 14$ C $x^2 - 5x + 14$ D $x^2 + 5x - 14$

e. Quale delle seguenti è la scomposizione del binomio $-x^2 + y^2$?

A $(x+y)(x-y)$ C $(x+y)(-x-y)$

B $(y-x)(y+x)$ D $(-x+y)(x-y)$

f. L'espressione $256^2 - 255^2$ è uguale a:

A 508 B 509 C 510 D 511

g. Quale dei seguenti è un fattore del polinomio $a^3 + 3a^2 + a + 3$?

A $a+2$ B $a+3$ C $a+4$ D $a+5$

h. Se 3 è uno zero del polinomio $P(x)$, allora nella scomposizione di $P(x)$ compare certamente il fattore:

A $x-3$ B $x+3$ C x^2-9 D x^2+9

i. Quale delle seguenti è la scomposizione in fattori dell'espressione che corrisponde alla seguente descrizione verbale: «sottrai dal numero 27 il triplo del quadrato di x»?

A $3(1-3x)(1+3x)$ C $3(3+2x)(3-2x)$

B $(3-9x)(3+9x)$ D $3(3-x)(3+x)$

j. Sia $a > 0$. L'area di un quadrato è data dall'espressione $100a^2 + 40a + 4$. Quale dei seguenti binomi esprime la lunghezza del lato del quadrato?

A $10a+2$ B $2a+10$ C $10a+4$ D $4a+10$

[Due risposte A, tre B, una C e quattro D]

213 Indica la risposta corretta.

a. Quale dei seguenti trinomi *non* è il quadrato di un binomio?

A $4x^2 - 4x + 1$ B $x^2 - 2x - 1$ C $25x^2 + 10x + 1$ D $4x^2 + 12x + 9$

b. Quale dei seguenti polinomi è il quadrato di un binomio?

A $x^2 - 5x + 6$ B $x^2 + x + 1$ C $x^2 - 6x + 9$ D $x^3 + x^2 + x + 1$

c. Per quale dei seguenti polinomi $x = 2$ *non* è uno zero?

A $x^2 - 5x + 6$ B $x^2 - 4x + 4$ C $x^3 - 8$ D $2x - 2$

d. Qual è la scomposizione del trinomio $x^2 - 7x + 10$?

A $(x+2)(x+5)$ B $(x+2)(x-5)$ C $(x-2)(x+5)$ D $(x-2)(x-5)$

e. Un polinomio $A(x)$ di grado 10 è divisibile per un polinomio $B(x)$ di grado 5. Qual è il grado per polinomio quoziente?

A 2 B 5 C 10 D 50

f. Quale delle seguenti è la scomposizione in fattori dell'espressione che corrisponde alla seguente descrizione verbale: «aggiungi 16 al quadrato di x, quindi sottrai dalla somma ottenuta il doppio del quadruplo di x»?

A $(x-4)(x-2)$ B $(x+4)^2$ C $(x-2)(x+4)$ D $(x-4)^2$

g. Qual è il quoziente della divisione di $(2a+3)^3$ per $2a+3$?

A $4a^2 + 6a + 9$ B $4a^2 + 6a - 9$ C $4a^2 + 12a + 9$ D $4a^2 - 6a + 9$

h. Quale dei seguenti polinomi si scompone in $(a^2+1)(a-3)$?

A $a^3 - 3a^2 + a - 3$ C $a^3 + 3a^2 + a + 3$

B $a^3 + 3a^2 - a + 3$ D $a^3 - 3a^2 - a + 3$

i. Qual è la scomposizione in fattori dell'espressione $3(x+2) - (x+2)(x-1)$?

A $(x+2)(x-4)$ B $(x-2)(x-4)$ C $(x-2)(x+4)$ D $(x+2)(4-x)$

j. Sia $x > 0$. Un rettangolo ha area uguale a $5x^2 + 20x$ e la lunghezza della base è $5x$. Qual è il perimetro del rettangolo?

A $4x + 10$ B $6x + 8$ C $8x + 20$ D $12x + 8$

[Una risposta A, due B, due C e cinque D]

214 Indica la risposta corretta.

a. Qual è la scomposizione del trinomio $3x^2 - 12xy + 12y^2$?

$\boxed{A}$ $3(x+2y)^2$ $\boxed{B}$ $(x-2y)^2$ $\boxed{C}$ $3(x-2y)^2$ $\boxed{D}$ $3(2x-2y)^2$

b. Il polinomio $x^2-2x-63$ si scompone in:

$\boxed{A}$ $(x+7)(x+8)$ $\boxed{B}$ $(x+7)(x-9)$ $\boxed{C}$ $(x-7)(x-9)$ $\boxed{D}$ $(x+5)(x-9)$

c. Il polinomio $(a-1)y+1-a$ si scompone in:

$\boxed{A}$ $(a+1)(y+1)$ $\boxed{B}$ $(a+1)(y-1)$ $\boxed{C}$ $(a-1)(y+1)$ $\boxed{D}$ $(a-1)(y-1)$

d. Il polinomio $(a-1)^2-2(a-1)+1$ si scompone in:

$\boxed{A}$ $(a-1)^2$ $\boxed{B}$ $(a+1)^2$ $\boxed{C}$ $(a-2)^2$ $\boxed{D}$ $(a+2)^2$

e. Il polinomio $x^2-2x-15$ si scompone in:

$\boxed{A}$ $(x+5)(x+3)$ $\boxed{B}$ $(x+5)(x-3)$ $\boxed{C}$ $(x-5)(x+3)$ $\boxed{D}$ $(x-5)(x-3)$

f. Il polinomio $4a^2 - 2a + 6ab - 3b$ si scompone in:

A $(2a+1)(2a+3b)$ C $(2a-1)(2a+3b)$

B $(2a+1)(2a-3b)$ D $(2a-1)(2a-3b)$

g. Qual è la scomposizione del binomio $25x^2 - 4y^2$?

A $(5x+2y)(5x+2y)$ C $(5x-2y)(5x+2y)$

B $(2x-5y)(5x+2y)$ D $(5x-2y)(5x-2y)$

h. Il polinomio $x^6y^2 - 1$ si scompone in:

A $(x^3y+1)(x^3y-1)$ C $(x^3y-1)^2$

B $(x^3y+1)^2$ D $(xy^3-1)(xy^3+1)$

i. Il polinomio $x^4 - 1$ si scompone in:

A $(x^2+1)(x+1)(x-1)$ C $(x^2+1)^2$

B $(x+1)^2(x+1)(x-1)$ D $(x+1)^2(x-1)^2$

j. Il polinomio $4a^2 + 9 - 12a$ si scompone in:

A $(2a-3)^2$ C $(2a-3)(2a+3)$

B $(2a+3)^2$ D $(3a-2)^2$

[Tre risposte A, una B, cinque C e una D]

215 Indica la risposta corretta.

a. Il polinomio $x^4 - x^2 - 20$ si scompone in:

A $(x^2+5)(x^2+4)$ C $(x^2-5)(x^2+4)$

B $(x^2+5)(x^2-4)$ D $(x^2-5)(x^2-4)$

b. Il polinomio $ax + bx - ay - by + a + b$ si scompone in:

A $(a+b)(x+y+1)$ C $(a-b)(x+y+1)$

B $(a+b)(x-y+1)$ D $(a-b)(x-y+1)$

c. Il polinomio $25x^2 + 16 - 40x$ si scompone in:

A	$(5x+4)^2$	C	$(5x+4)(5x-4)$
B	$(5x-4)^2$	D	$(4x-5)^2$

d. Il polinomio $2a^3-4a^2+2a$ si scompone in:

A	$2a(a-1)^2$	C	$2a(a-1)$
B	$2a(a+1)^2$	D	$2(a+1)(a-1)$

e. Il polinomio $a^2+12a+32$ si scompone in:

A $(a+4)(a+8)$ B $(a+4)(a-8)$ C $(a-4)(a+8)$ D $(a-4)(a-8)$

f. Il polinomio x^2-5x-6 si scompone in:

A $(x+1)(x+6)$ B $(x+1)(x-6)$ C $(x-1)(x+6)$ D $(x-1)(x-6)$

g. Il polinomio a^4+7a^2+12 si scompone in:

A	$(a^2+3)(a^2+4)$	C	$(a^2-3)(a^2+4)$
B	$(a^2+3)(a^2-4)$	D	$(a^2-3)(a^2-4)$

h. Il polinomio x^3+x^2-x-1 si scompone in:

A $(x+1)(x-1)^2$ B $(x-1)(x+1)^2$ C $(1-x)(x-1)^2$ D $(x-1)^3$

i. Il polinomio x^3-2x^2-8x si scompone in:

A $x(x+2)(x+4)$ B $x(x-2)(x+4)$ C $x(x+2)(x-4)$ D $(x-2)(x-4)$

j. Il polinomio $4x-x^3$ si scompone in:

A $x(2+x)(2+x)$ B $(2+x)(2-x)$ C $x(2-x)^2$ D $x(2+x)(2-x)$

[Tre risposte A, quattro B, due C e una D]

216 Indica la risposta corretta.

a. Il polinomio x^4+4x^2-45 si scompone in:

A	$(x^2+5)(x^2+9)$	C	$(x^2-5)(x^2+9)$
B	$(x^2+5)(x^2-9)$	D	$(x^2-5)(x^2-9)$

b. Il polinomio $-a^2 + 2a - 1$ si scompone in:

A $(a+1)^2$ B $(a-1)^2$ C $-(a+1)^2$ D $-(a-1)^2$

c. Il polinomio $(x-3)^2 - 4(x-3)$ si scompone in:

A $(x+3)(x+7)$ B $(x+3)(x-7)$ C $(x-3)(x+7)$ D $(x-3)(x-7)$

d. Il polinomio $4(a-5b)^2 - a^2$ si scompone in:

A $(a+10b)(3a+10b)$ C $(a-10b)(3a+10b)$

B $(a+10b)(3a-10b)$ D $(a-10b)(3a-10b)$

e. Una sola di queste frasi definisce il massimo comune divisore tra più polinomi. Quale?

A È il polinomio di grado maggiore tra quelli che dividono i polinomi dati

B È il polinomio maggiore tra quelli che dividono i polinomi dati

C È il polinomio di grado maggiore tra quelli divisibili per i polinomi dati

D È il polinomio maggiore tra quelli divisibili per i polinomi dati

f. Determina il massimo comune divisore tra i polinomi

$$a^2 - ab \qquad a^3 + a^2b - ab^2 - b^3 \qquad a^2b + b^3 - 2ab^2$$

A ab C $ab(a-b)^2(a+b)^2$

B $a-b$ D $ab(a^2-b^2)$

g. Determina il minimo comune multiplo tra i polinomi

$$a^2 - ab \qquad a^3 + a^2b - ab^2 - b^3 \qquad a^2b + b^3 - 2ab^2$$

A ab C $ab(a-b)^2(a+b)^2$

B $a-b$ D $ab(a^2-b^2)$

h. Determina il massimo comune divisore tra i polinomi

$$4a^3b^3 + 8a^2b^4 \qquad 6ax + 12bx - 18ay - 36by \qquad 8a^5 + 32a^4b + 32a^3b^2$$

A $24a^3b^3(a+2b)^2(x-3y)$ C $2(a+2b)$

B $2(a+2b)^2$ D $2(a-2b)$

i. Determina il minimo comune multiplo tra i polinomi

$$x^2+2xy+y^2 \qquad x^2-y^2 \qquad x^2-2xy+y^2$$

$\boxed{\text{A}}$ $x-y$ $\boxed{\text{C}}$ $(x-y)^2(x+y)$

$\boxed{\text{B}}$ x^3-y^3 $\boxed{\text{D}}$ $(x+y)^2(x-y)^2$

j. Il polinomio $x^2-7x+12$ si scompone in:

$\boxed{\text{A}}$ $(x+3)(x+4)$ $\boxed{\text{B}}$ $(x+3)(x-4)$ $\boxed{\text{C}}$ $(x-3)(x+4)$ $\boxed{\text{D}}$ $(x-3)(x-4)$

[Una risposta A, una B, tre C e cinque D]

2 FRAZIONI ALGEBRICHE

Il quoziente fra due monomi o fra due polinomi non sempre si può esprimere come un monomio o un polinomio. Per esempio:

$$\frac{1}{x} \qquad \frac{a}{b} \qquad \frac{x+1}{x+2}$$

non sono esprimibili mediante polinomi. In casi come questo si parla di *frazione algebrica*.

Definizione 6. Una *frazione algebrica* è un'espressione del tipo $\frac{A}{B}$ (si scrive anche A/B) che esprime il quoziente di due polinomi A e B, con B diverso dal polinomio nullo.

I polinomi A e B si chiamano *termini* della frazione algebrica: precisamente A si chiama *numeratore* e B *denominatore*.

Le espressioni $\frac{1}{x}$, $\frac{a}{b}$ e $\frac{x+2}{x-1}$ sono frazioni algebriche in senso proprio. Tuttavia anche i monomi e i polinomi si possono considerare frazioni algebriche il cui denominatore è uguale a 1. Questa interpretazione, analoga a quella che abbiamo dato per le frazioni numeriche, ci consente di stabilire una relazione di inclusione fra gli insiemi delle frazioni algebriche, dei polinomi e dei monomi (figura 1) che ci permetterà di eseguire le operazioni fondamentali fra una frazione e un polinomio o un monomio.

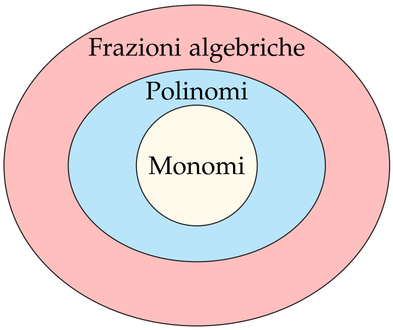


Figura 1: Insiemi delle frazioni algebriche, dei polinomi e dei monomi

2.1 CONDIZIONI DI ESISTENZA

Dal momento che una frazione algebrica rappresenta un quoziente, essa è definita solo in corrispondenza dei valori delle variabili per cui *il denominatore è diverso da zero*. Per esempio, consideriamo la frazione algebrica

$$\frac{x}{x-1}$$

Essa *non* è definita quando $x = 1$: se sostituiamo 1 al posto di x otteniamo

$$\frac{1}{1-1} = \frac{1}{0}$$

che non ha significato.

Data una frazione algebrica, l'insieme costituito da tutti i valori delle variabili per cui le operazioni in essa contenute hanno significato si chiama *dominio* (o *insieme di definizione* o *insieme di esistenza*) della frazione. Nel caso dell'esempio precedente il dominio della frazione è costituto dall'insieme di tutti i numeri reali diversi da 1: $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Spesso, invece di indicare il dominio di una frazione algebrica, si indicano soltanto le condizioni che devono essere soddisfatte perché la frazione algebrica sia definita: esse vengono chiamate *condizioni di esistenza* della frazione algebrica (e indicate con il simbolo C. E.). Nel caso dell'esempio precedente, la condizione di esistenza è $x \neq 1$.

Esercizio 26. Determina le condizioni di esistenza della frazione $\dfrac{x}{x^2-1}$.

Soluzione. Per individuare le condizioni di esistenza, riscriviamo la frazione algebrica scomponendo in fattori il denominatore:

$$\frac{x}{(x+1)(x-1)}$$

In base alla *legge di annullamento del prodotto*, il denominatore è diverso da zero se e solo se tutti i suoi fattori sono diversi da zero, cioè per:

$$x \neq 1 \quad \wedge \quad x \neq -1$$

Queste sono le condizioni di esistenza; il dominio è l'insieme $\mathbb{R}$ privato di -1 e 1, in simboli: $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. □

La tabella seguente riporta altri esempi di condizioni di esistenza.

Frazione algebrica	**C. E.**	**Osservazione**
$\dfrac{a+3}{a+1}$	$a \neq -1$	
$\dfrac{a+3}{a^2+a}$	$a \neq 0 \wedge a \neq -1$	Scomponi il denominatore come $a(a+1)$ e imponi che i due fattori siano diversi da zero
$\dfrac{a+3}{a^2+1}$	nessuna	Il denominatore è sempre positivo

2.2 SEMPLIFICAZIONE

Come per le frazioni numeriche, anche per quelle algebriche possiamo introdurre il concetto di equivalenza.

Definizione 7. Due frazioni algebriche $\frac{A}{B}$ e $\frac{C}{D}$ sono *equivalenti* se $A \cdot D = B \cdot C$.

Per indicare l'equivalenza tra due frazioni algebriche si usa il simbolo di uguaglianza. Per esempio:

- $\frac{1}{x} = \frac{x+1}{x^2+x}$, perché $1 \cdot (x^2 + x) = x \cdot (x+1)$
- $\frac{a}{ab} = \frac{1}{b}$, perché $a \cdot b = ab \cdot 1$

Riconoscere l'equivalenza è quindi semplice, ma ciò che ci interessa di più è sapere quali sono le operazioni che si possono eseguire su una frazione algebrica per ottenerne una a essa equivalente. Le operazioni "lecite" sono quelle che applicano la proprietà *invariantiva* della divisione.

Proposizione 1 (Proprietà invariantiva delle frazioni algebriche)**.** Moltiplicando o dividendo entrambi i termini di una frazione algebrica per uno stesso polinomio *diverso dal polinomio nullo*, si ottiene una frazione equivalente alla frazione data.

In base alla proprietà invariantiva, data una frazione algebrica possiamo:

- dividere numeratore e denominatore per uno stesso monomio o polinomio (non nullo), e questo permette di semplificare una frazione
- moltiplicare numeratore e denominatore per uno stesso monomio o polinomio (non nullo), e questo permette di ridurre due o più frazioni allo stesso denominatore, in modo da poterle sommare o sottrarre

Definizione 8. Una frazione algebrica si dice *ridotta ai minimi termini* se i suoi termini sono polinomi primi tra loro.

In generale, per ridurre una frazione ai minimi termini (o, come anche si dice, per *semplificarla*) si dividono il numeratore e il denominatore per il loro MCD. In pratica, la procedura per semplificare una frazione è la seguente:

- si scompongono numeratore e denominatore
- si semplificano, come nelle frazioni numeriche, i fattori comuni al numeratore e al denominatore con un tratto di penna

Esercizio 27. Semplifica $\dfrac{3x^2+6x}{3x}$.

Soluzione.

$$\frac{3x^2+6x}{3x} = \frac{\cancel{3x}(x+2)}{\cancel{3x}} = x+2$$

La proprietà invariantiva assicura che il risultato dopo la divisione è equivalente alla frazione iniziale. □

Esercizio 28. Semplifica la frazione algebrica $\dfrac{x^2-6x+9}{x^2-9}$.

Soluzione.

$$\frac{x^2-6x+9}{x^2-9} = \frac{(x-3)^{\cancel{2}}}{(x+3)\cancel{(x-3)}} = \frac{x-3}{x+3}$$ □

Esercizio 29. Semplifica $\dfrac{a^2+a}{ab+b+a+1}$.

Soluzione.

$$\frac{a^2+a}{ab+b+a+1} = \frac{a(a+1)}{b(a+1)+(a+1)} = \frac{a(a+1)}{(a+1)(b+1)} = \frac{a\cancel{(a+1)}}{\cancel{(a+1)}(b+1)}$$ □

Attenzione agli errori! Le seguenti semplificazioni sono errate:

$$\frac{\cancel{a}+b}{\cancel{a}} \qquad \frac{\cancel{x^2}+x+4}{\cancel{x^2}+2} \qquad \frac{x^{\cancel{2}}+y^{\cancel{2}}}{(x+y)^{\cancel{2}}} \qquad \frac{\cancel{2x}(x+1)}{\cancel{2x}+1}$$

In sostanza, si possono eseguire semplificazioni *solo tra fattori* e non quando i termini per cui si vuole dividere sono legati agli altri da addizioni o sottrazioni.

2.3 OPERAZIONI

Somma e differenza

Come per le frazioni numeriche, la somma o la differenza di frazioni algebriche che hanno lo stesso denominatore si calcolano sommando o sottraendo i rispettivi numeratori.

- Con le frazioni numeriche:

$$\frac{1}{5}+\frac{2}{5} = \frac{1+2}{5} = \frac{3}{5}$$

- Con le frazioni algebriche:

$$\frac{x+2}{x+1} + \frac{1}{x+1} = \frac{x+2+1}{x+1} = \frac{x+3}{x+1}$$

Se le frazioni non hanno lo stesso denominatore, occorre prima calcolare un denominatore comune, di solito il mcm fra i denominatori, e poi eseguire la somma o la differenza come nel caso precedente.

Con le frazioni numeriche	**Con le frazioni algebriche**
$\frac{3}{4} + \frac{1}{6}$	$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}$
$\text{mcm}(4, 6) = 12$	$\text{mcm}(x, x+1) = x(x+1)$
$\frac{9}{12} + \frac{2}{12}$	$\frac{x+1}{x(x+1)} + \frac{x}{x(x+1)}$
$\frac{9+2}{12} = \frac{11}{12}$	$\frac{x+1+x}{x(x+1)} = \frac{2x+1}{x(x+1)}$

In generale, per sommare o sottrarre due o più frazioni algebriche conviene seguire questa procedura:

- si semplificano le frazioni che non sono irriducibili
- si trova il mcm fra i denominatori
- si riducono tutte le frazioni allo stesso denominatore
- si eseguono le somme e le sottrazioni
- si semplifica la frazione ottenuta, se possibile

Esercizio 30. Calcola $\frac{b}{a^2+ab} - \frac{a}{ab+b^2}$.

Soluzione.

- Scomponiamo i denominatori:

$$\frac{b}{a(a+b)} - \frac{a}{b(a+b)}$$

- Determiniamo il denominatore comune e svolgiamo i calcoli:

$$\frac{b^2-a^2}{ab(a+b)}$$

- Semplifichiamo la frazione ottenuta:

$$\frac{(b-a)\cancel{(b+a)}}{ab\cancel{(a+b)}} = \frac{b-a}{ab}$$

□

Esercizio 31. Calcola $\dfrac{2}{x+3} + \dfrac{1}{x-3}$.

Soluzione.

- Le frazioni sono irriducibili.
- Il mcm dei denominatori è $(x+3)(x-3)$.
- Riduciamo le frazioni allo stesso denominatore:

$$\frac{2(x-3)}{(x+3)(x-3)} + \frac{(x+3)}{(x+3)(x-3)}$$

- Sommiamo i numeratori:

$$\frac{2(x-3)+(x+3)}{(x+3)(x-3)}$$

- Svolgiamo i calcoli:

$$\frac{2x-6+x+3}{(x+3)(x-3)} = \frac{3x-3}{(x+3)(x-3)} = \frac{3(x-1)}{(x+3)(x-3)}$$

- Poiché la frazione è irriducibile, questo è anche il risultato della somma. □

Di solito, per abbreviare la sequenza dei passaggi, l'operazione di riduzione allo stesso denominatore si svolge contemporaneamente a quella di addizione fra i numeratori, riducendo i due passaggi a uno solo. In pratica, si omette di scrivere il primo passaggio.

Esercizio 32. Calcola $\dfrac{1}{x^2-9} - \dfrac{1}{3-x} - \dfrac{1}{2x-6}$.

Soluzione.

- Scomponiamo i denominatori:

$$\frac{1}{(x+3)(x-3)} \boldsymbol{-} \boldsymbol{\frac{1}{3-x}} - \frac{1}{2(x-3)}$$

- Fai attenzione alla seconda frazione algebrica. Poiché i denominatori delle altre frazioni hanno come fattore $x-3$, che differisce da $3-x$ per i segni dei suoi termini, dobbiamo raccogliere un segno $-$ in modo da trasformare $3-x$ in $x-3$:

$$\frac{1}{(x+3)(x-3)} \boldsymbol{-} \boldsymbol{\frac{1}{-(x-3)}} - \frac{1}{2(x-3)}$$

È poi opportuno non lasciare il segno negativo al denominatore, ma portarlo davanti alla linea di frazione; questa operazione cambia il segno che c'è davanti alla frazione.

$$\frac{1}{(x+3)(x-3)} + \frac{1}{x-3} - \frac{1}{2(x-3)}$$

- Svolgiamo i calcoli:

$$\frac{2+2(x+3)-(x+3)}{2(x+3)(x-3)} = \frac{2+2x+6-x-3}{2(x+3)(x-3)} = \frac{x+5}{2(x+3)(x-3)}$$

- Poiché la frazione è irriducibile, questo è anche il risultato. □

Prodotto e quoziente

Anche queste operazioni si eseguono con regole analoghe a quelle viste per le frazioni numeriche.

- Il *prodotto* di due frazioni algebriche si esegue scomponendo in fattori le singole frazioni e semplificando "in croce": i fattori che compaiono al numeratore di una frazione si possono semplificare con quelli che compaiono al denominatore dell'altra. Per esempio:

$$\frac{2}{x+1} \cdot \frac{x+1}{x} = \frac{2}{\cancel{x+1}} \cdot \frac{\cancel{x+1}}{x} = \frac{2}{x}$$

- Il *quoziente* di due frazioni si esegue moltiplicando la prima frazione per il reciproco della seconda. Per esempio:

$$\frac{x+1}{x} : \frac{x+1}{x+2} = \frac{\cancel{x+1}}{x} \cdot \frac{x+2}{\cancel{x+1}} = \frac{x+2}{x}$$

- L'*elevamento a potenza* si ottiene elevando a quella potenza il numeratore e il denominatore. Per esempio:

$$\left(\frac{3}{x+1}\right)^2 = \frac{3^2}{(x+1)^2} = \frac{9}{(x+1)^2}$$

Esercizio 33. Calcola $\dfrac{a^2-2a+1}{b^2-9} \cdot \dfrac{3b-9}{a-1}$.

Soluzione.

- Scomponiamo i polinomi delle due frazioni:

$$\frac{(a-1)^2}{(b+3)(b-3)} \cdot \frac{3(b-3)}{a-1}$$

- Eseguiamo le semplificazioni possibili:

$$\frac{(a-1)^{\cancel{2}}}{(b+3)\cancel{(b-3)}} \cdot \frac{3\cancel{(b-3)}}{\cancel{a-1}} = \frac{3(a-1)}{b+3}$$ □

Esercizio 34. Calcola $\dfrac{x^2-1}{3x-6} : \dfrac{x+1}{x-2}$.

Soluzione.

$$\frac{x^2-1}{3x-6} : \frac{x+1}{x-2} = \frac{x^2-1}{3x-6} \cdot \frac{x-2}{x+1} = \frac{(x-1)(x+1)}{3(x-2)} \cdot \frac{x-2}{x+1} = \frac{x-1}{3}$$ □

2.4 ESPRESSIONI

In un'espressione, le operazioni tra frazioni algebriche devono essere eseguite rispettando la consueta precedenza:

- prima le eventuali potenze
- poi le moltiplicazioni e le divisioni
- infine le somme e le sottrazioni

a cominciare dalle parentesi più interne.

Esercizio 35. Calcola $\left(\dfrac{1}{a-1} + \dfrac{1}{a+1}\right) \cdot \dfrac{a^2-1}{2a}$.

Soluzione.

$$\left(\frac{1}{a-1} + \frac{1}{a+1}\right) \cdot \frac{a^2-1}{2a} = \frac{a+\cancel{1}+a-\cancel{1}}{(a-1)(a+1)} \cdot \frac{(a+1)(a-1)}{2a} = 1$$ □

Esercizio 36. Calcola

$$\left[\left(\frac{x}{x^2-4} - \frac{x}{x^2+4}\right) : \frac{4}{x^3-2x^2+4x-8} + \frac{2x}{x+2}\right] \cdot \frac{x+2}{x}$$

Soluzione.

$$\left[\left(\frac{x}{(x+2)(x-2)}-\frac{x}{x^2+4}\right):\frac{4}{x^2(x-2)+4(x-2)}+\frac{2x}{x+2}\right]\cdot\frac{x+2}{x}$$

$$=\left[\frac{x(x^2+4)-x(x^2-4)}{(x+2)(x-2)(x^2+4)}\cdot\frac{(x-2)(x^2+4)}{4}+\frac{2x}{x+2}\right]\cdot\frac{x+2}{x}$$

$$=\left[\frac{x^3+4x-x^3+4x}{(x+2)\cancel{(x-2)}\cancel{(x^2+4)}}\cdot\frac{\cancel{(x-2)}\cancel{(x^2+4)}}{4}+\frac{2x}{x+2}\right]\cdot\frac{x+2}{x}$$

$$=\left[\frac{8x}{x+2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{2x}{x+2}\right]\cdot\frac{x+2}{x}=\left[\frac{2x}{x+2}+\frac{2x}{x+2}\right]\cdot\frac{x+2}{x}=\frac{4x}{x+2}\cdot\frac{x+2}{x}=4 \quad \square$$

2.5 ESERCIZI

Chi non risolve esercizi non impara la matematica.

Semplifica le seguenti frazioni algebriche.

1 $\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-4}$ $\left[\dfrac{x-2}{x+2}\right]$

2 $\dfrac{ab+b+a^2+a}{a^2+2a+1}$ $\left[\dfrac{a+b}{a+1}\right]$

3 $\dfrac{4x^2-4+x^3-x}{2x+2}$ $\left[\dfrac{(x-1)(x+4)}{2}\right]$

4 $\dfrac{5x+5y}{3x+3y+ax+ay}$ $\left[\dfrac{5}{a+3}\right]$

5 $\dfrac{3a^3-3a^2-a+1}{9a^4-1}$ $\left[\dfrac{a-1}{3a^2+1}\right]$

6 $\dfrac{2b-2-ab+a}{b^2-2b+1}$ $\left[\dfrac{2-a}{b-1}\right]$

7 $\dfrac{6a^2-4ab+3a-2b}{4a^2+4a+1}$ $\left[\dfrac{3a-2b}{2a+1}\right]$

8 $\dfrac{4x+4y}{3x+3y+ax+ay}$ $\left[\dfrac{4}{a+3}\right]$

9 $\dfrac{x^2+xy}{2x+2y+ax+ay}$ $\left[\dfrac{x}{a+2}\right]$

10 $\dfrac{3ax+6a+3x+6}{6ax+6x+12a+12}$ $\left[\dfrac{1}{2}\right]$

11 $\dfrac{a^3+a^2+a+1}{ax+x+2a+2}$ $\left[\dfrac{a^2+1}{x+2}\right]$

12 $\dfrac{x^2+5x+6}{x^2+6x+9}$ $\left[\dfrac{x+2}{x+3}\right]$

13 $\dfrac{-2x+2+ax-a}{x^2-2x+1}$ $\left[\dfrac{a-2}{x-1}\right]$

14 $\dfrac{4x^3-4x^4+8x-8x^2}{1-x^2}$ $\left[\dfrac{4x(x^2+2)}{x+1}\right]$

15 $\dfrac{x^2+x-2}{x^2+2x-3}$ $\left[\dfrac{x+2}{x+3}\right]$

16 $\dfrac{6a^2b^3-9a^3b^2}{2ab-3a^2-2b+3a}$ $\left[\dfrac{3a^2b^2}{a-1}\right]$

17 $\dfrac{x^2+7x+12}{x^2-9}$ $\left[\dfrac{x+4}{x-3}\right]$

18 $\dfrac{2x^2-4xy}{ax-2ay+2x-4y}$ $\left[\dfrac{2x}{a+2}\right]$

19 $\dfrac{x^3+x^2-2x-2}{x^3+x^2+2x+2}$ $\left[\dfrac{x^2-2}{x^2+2}\right]$

20 $\dfrac{-2a-a^2}{2b+ab+4+2a}$ $\left[-\dfrac{a}{b+2}\right]$

21 $\dfrac{x^2+3x-28}{x^2+2x-24}$ $\left[\dfrac{x+7}{x+6}\right]$

22 $\dfrac{a^2+a}{ab+b+a+1}$ $\left[\dfrac{a}{b+1}\right]$

23 $\dfrac{x^2-x-6}{x^2+2x-15}$ $\left[\dfrac{x+2}{x+5}\right]$

24 $\dfrac{x^3+x^2-2x-2}{x^2+2x+1}$ $\left[\dfrac{x^2-2}{x+1}\right]$

25 $\dfrac{-a^2-a}{ab+b+a+1}$ $\left[-\dfrac{a}{b+1}\right]$

26 $\dfrac{4x+4y}{6x+6y+2ax+2ay}$ $\left[\dfrac{2}{a+3}\right]$

27 $\dfrac{x^3-x^2+x-1}{x^3-3x^2+3x-1}$ $\left[\dfrac{x^2+1}{(x-1)^2}\right]$

28 $\dfrac{x^2-xy}{2x^2-2xy+ax^2-axy}$ $\left[\dfrac{1}{a+2}\right]$

29 $\dfrac{12a^6b^9c^{10}}{20a^7b^5c^6}$ $\left[\dfrac{3b^4c^4}{5a}\right]$

30 $\dfrac{a^7+a^5}{a^2+1}$ $\left[a^5\right]$

31 $\dfrac{6x^2+3x}{36x^2-9}$ $\left[\dfrac{x}{3(2x-1)}\right]$

32 $\dfrac{10a^4b^3c^4}{15ab^3c^6d}$ $\left[\dfrac{2a^3}{3c^2d}\right]$

33 $\dfrac{x^2-9}{3x+9}$ $\left[\dfrac{x-3}{3}\right]$

34 $\dfrac{2a+1}{4a+2}$ $\left[\dfrac{1}{2}\right]$

35 $\dfrac{x^2-10x+25}{x^2-25}$ $\left[\dfrac{x-5}{x+5}\right]$

36 $\dfrac{t^2-1}{t^2-t}$ $\left[\dfrac{t+1}{t}\right]$

37 $\dfrac{4x^2-25}{4x-10}$ $\left[\dfrac{2x+5}{2}\right]$

38 $\dfrac{4a^2-4a+1}{2a^2-a}$ $\left[\dfrac{2a-1}{a}\right]$

39 $\dfrac{2x^4-2}{x^2+1}$ $[2(x^2-1)]$

40 $\dfrac{18t^2-2}{3t+1}$ $[6t-2]$

41 $\dfrac{25-t^2}{t^2-10t+25}$ $\left[\dfrac{t+5}{5-t}\right]$

42 $\dfrac{x^2-3x+2}{2x-2}$ $\left[\dfrac{x-2}{2}\right]$

43 $\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+2x+1}$ [irriducibile]

44 $\dfrac{6a^2-2a}{18a^3-2a}$ $\left[\dfrac{1}{3a+1}\right]$

45 $\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-2x}$ $\left[\dfrac{x-2}{x}\right]$

46 $\dfrac{x^2+5x+4}{x^2+2x+1}$ $\left[\dfrac{x+4}{x+1}\right]$

47 $\dfrac{a^2-2a}{a^2+a-6}$ $\left[\dfrac{a}{a+3}\right]$

48 $\dfrac{9t^2+6t+1}{3t^2+t}$ $\left[\dfrac{3t+1}{t}\right]$

49 $\dfrac{5a+15}{a^2-9}$ $\left[\dfrac{5}{a-3}\right]$

50 $\dfrac{x^2+x-2}{x^2-1}$ $\left[\dfrac{x+2}{x+1}\right]$

51 $\dfrac{4t^2-25}{2t^2+5t}$ $\left[\dfrac{2t-5}{t}\right]$

52 $\dfrac{x^4+2x^2}{x^4+4x^2+4}$ $\left[\dfrac{x^2}{x^2+2}\right]$

53 $\dfrac{12a^3}{6a^6+9a^4}$ $\left[\dfrac{4}{2a^3+3a}\right]$

54 $\dfrac{a^3-ab^2}{a^2b+ab^2}$ $\left[\dfrac{a-b}{b}\right]$

55 $\dfrac{x^2+4x+4}{x^2-4}$ $\left[\dfrac{x+2}{x-2}\right]$

56 $\dfrac{x^2y-y^3}{x^3-xy^2}$ $\left[\dfrac{y}{x}\right]$

57 $\dfrac{2x^2-x}{x^2-2x^3}$ $\left[-\dfrac{1}{x}\right]$

58 $\dfrac{x^2y-2xy^2}{2y^3-xy^2}$ $\left[-\dfrac{x}{y}\right]$

59 $\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-4x+3}$ [irriducibile]

60 $\dfrac{3x-3y}{6x^2+6x-6xy-6y}$ $\left[\dfrac{1}{2(x+1)}\right]$

61 $\dfrac{b^2-a^2}{a^2+2ab+b^2}$ $\left[\dfrac{b-a}{a+b}\right]$

62 $\dfrac{x^2-x-2}{2x^2-8}$ $\left[\dfrac{x+1}{2(x+2)}\right]$

63 $\dfrac{3ab+3a}{b^2-1}$ $\left[\dfrac{3a}{b-1}\right]$

64 $\dfrac{x^2-9}{x^2-2x-3}$ $\left[\dfrac{x+3}{x+1}\right]$

65 $\dfrac{4x^2+4x+1}{4x^3-x}$ $\left[\dfrac{2x+1}{x(2x-1)}\right]$

66 $\dfrac{a^3-ab}{a^6-a^2b^2}$ $\left[\dfrac{1}{a(a^2+b)}\right]$

67 $\dfrac{10x^4-40x^2}{5x^4+10x^3}$ $\left[\dfrac{2(x-2)}{x}\right]$

68 $\dfrac{x^3-xy^2}{x^2y^2-x^4}$ $\left[-\dfrac{1}{x}\right]$

69 $\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-1}$ $\left[\dfrac{x+2}{x-1}\right]$

70 $\dfrac{ab+b^2+a+b}{b^2+b}$ $\left[\dfrac{a+b}{b}\right]$

71 $\dfrac{a^2b+ab^2}{a^2+b^2}$ [irriducibile]

72 $\dfrac{4x^2-12x+9}{4x^2-9}$ $\left[\dfrac{2x-3}{2x+3}\right]$

73 $\dfrac{ab+ac+db+dc}{2b+2c}$ $\left[\dfrac{a+d}{2}\right]$

74 $\dfrac{ac+ad-bc-bd}{bc-bd-ac+ad}$ $\left[\dfrac{c+d}{d-c}\right]$

75 $\dfrac{x^2-10x+25}{x^2-4x-5}$ $\left[\dfrac{x-5}{x+1}\right]$

76 $\dfrac{2ac+2bc}{a^2c^2-b^2c^2}$ $\left[\dfrac{2}{c(a-b)}\right]$

77 $\dfrac{x^2+2x}{x^3-4x^2}$ $\left[\dfrac{x+2}{x(x-4)}\right]$

78 $\dfrac{x^4+y^4+2x^2y^2}{x^4-y^4}$ $\left[\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}\right]$

79 $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-x-2}$ $\left[\dfrac{x-1}{x+1}\right]$

80 $\dfrac{x^4+x^2}{x^2-1}$ [irriducibile]

81 $\dfrac{(a+b)^2-c^2}{(c-a)^2-b^2}$ $\left[\dfrac{a+b+c}{a-b-c}\right]$

82 $\dfrac{x^6-x^2}{x^3+x}$ $[x(x^2-1)]$

83 $\dfrac{x^2-3x+2xy-6y}{x^2-9}$ $\left[\dfrac{x+2y}{x+3}\right]$

84 $\dfrac{ax+3x-a-3}{a^2-2a-15}$ $\left[\dfrac{x-1}{a-5}\right]$

85 $\dfrac{9-y^2}{y^2-7y+12}$ $\left[\dfrac{y+3}{4-y}\right]$

86 $\dfrac{6x^5+6x^3}{10x^4+10x^2}$ $\left[\dfrac{3x}{5}\right]$

87 $\dfrac{x^5-3x^4}{x^4-9x^2}$ $\left[\dfrac{x^2}{x+3}\right]$

88 $\dfrac{0{,}25x^2-1}{0{,}5x^2-x}$ $\left[\dfrac{x+2}{2x}\right]$

89 $\dfrac{x^3y^3+x^2y^4}{x^4y^2-x^2y^4}$ $\left[\dfrac{y}{x-y}\right]$

90 $\dfrac{m^7-mn^4}{m^4n-mn^3}$ $\left[\dfrac{m^3+n^2}{n}\right]$

91 $\dfrac{(x^3+1)^2-x^2}{2x^4-2x^2+2x}$ $\left[\dfrac{x^3+x+1}{2x}\right]$

92 $\dfrac{a^3+a^2b+ab^2+b^3}{a^4-b^4}$ $\left[\dfrac{1}{a-b}\right]$

93 $\dfrac{a^3b-a^2b^2+ab^3-b^4}{a^3b+ab^3}$ $\left[\dfrac{a-b}{a}\right]$

94 $\dfrac{(y+3)^2-1}{y^2+8y+16}$ $\left[\dfrac{y+2}{y+4}\right]$

95 $\dfrac{ax^2-ay^2-bx^2+by^2}{bx-by-ax+ay}$ $[-x-y]$

96 $\dfrac{a^2+a-6}{2a^2-18-a^3+9a}$ $\left[\dfrac{1}{3-a}\right]$

Calcola i seguenti prodotti di frazioni algebriche.

97 $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4}\cdot\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-2x+1}$ $\left[\dfrac{x+1}{x-1}\right]$

98 $\dfrac{x^2-4}{x^2+4x+4}\cdot\dfrac{2x^2+8x+8}{4x^2-16}$ $\left[\dfrac{1}{2}\right]$

99 $\dfrac{x^4-5x^2+4}{x^2-1}\cdot\dfrac{x}{x^3-4x}$ $[1]$

100 $\dfrac{4x-2a}{x-a}\cdot\dfrac{3a-3x}{a-2x}$ $[6]$

101 $\dfrac{x^2-4}{x^2-9}\cdot\dfrac{3x-9}{x^2-2x}$ $\left[\dfrac{3x+6}{x^2+3}\right]$

102 $\dfrac{3a^2+2}{2ab}\cdot\dfrac{6a^2}{9a^4-4}$ $\left[\dfrac{3a}{b(3a^2-2)}\right]$

Calcola le seguenti divisioni di frazioni algebriche.

103 $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-9}:\dfrac{x^2-x-6}{x^2-4}$ $\left[\dfrac{(x-2)^2}{x^2-9}\right]$

104 $\dfrac{x^2+ax-x-a}{x^2-1}:\dfrac{x+a}{3x+3}$ $[3]$

105 $\dfrac{x^2+x}{5x-10}:\dfrac{x+1}{20x}$ $\left[\dfrac{4x^2}{x-2}\right]$

106 $\dfrac{x^2-6x+9}{2x-6}:\dfrac{x^2-9}{4x+12}$ $[2]$

107 $\dfrac{6a^2b}{a+b}:\dfrac{2ab^2(a+1)}{a^2-b^2}$ $\left[\dfrac{3a(a-b)}{b(a+1)}\right]$

108 $\dfrac{a^2-1}{a^2-4}:\dfrac{2a^2-2a}{2a+4}$ $\left[\dfrac{a+1}{a^2-2a}\right]$

Calcola le seguenti somme di frazioni algebriche.

109 $\dfrac{1}{x^2y}+\dfrac{1}{xy^2}-\dfrac{1}{x^2y^2}$ $\left[\dfrac{x+y-1}{x^2y^2}\right]$

110 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2x}-\dfrac{1}{3x}$ $\left[\dfrac{7}{6x}\right]$

111 $\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{a^2-a}-\dfrac{1}{a-1}$ $\left[\dfrac{1}{a}\right]$

112 $\dfrac{a-1}{a^2-a}+\dfrac{1}{a-2}-\dfrac{2}{a}$ $\left[\dfrac{2}{a(a-2)}\right]$

113 $\dfrac{2}{a-1}+\dfrac{3}{1-a}+\dfrac{a}{a-1}$ $[1]$

114 $\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{x-1}+x$ $[x]$

115 $\dfrac{x+1}{x}-\dfrac{x}{x-1}$ $\left[\dfrac{1}{x(1-x)}\right]$

116 $\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x^2-3x+2}$ $\left[\dfrac{2}{x-2}\right]$

117 $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x^2-2x+1}$ $\left[\dfrac{x}{(x-1)^2}\right]$

118 $\dfrac{2x-3}{x}+\dfrac{-2x}{2x+3}-1$ $\left[-\dfrac{3(x+3)}{x(2x+3)}\right]$

119 $\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{x-x^2}+\dfrac{1}{x}$ $\left[\dfrac{2}{x(1-x)}\right]$

120 $\dfrac{6x}{x^2-4}+\dfrac{3}{2-x}-\dfrac{1}{x+2}$ $\left[\dfrac{2}{x+2}\right]$

121 Vero o falso? Se falso calcola il risultato corretto.

a. $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{y^2+x^2}{x^2+y^2}=1$ V F

b. $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{1+x}{x^2}$ V F

c. $\frac{1}{x}+\frac{1}{x-y}=\frac{-y+1}{x-y}$ V F

d. $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{1-x}=\frac{2}{x-1}$ V F

e. $1+\frac{1}{x}=\frac{x+1}{x+1}=1$ V F

f. $\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-a}=\frac{1+1}{a-b}$ V F

g. $\frac{1}{x}+\frac{2}{x}=\frac{3}{x}$ V F

h. $x-\frac{y}{x+y}=\frac{x^2+xy-y}{x+y}$ V F

[4 affermazioni vere e 4 false]

Svolgi le seguenti espressioni contenenti frazioni algebriche.

122 $\frac{x^2+x-2}{x^2+2x-3}\cdot\frac{x^2+2x-15}{x^2-x-6}$ $\left[\frac{x+5}{x-3}\right]$

123 $\frac{2x^3-2x^2-3x+3}{2x^2-4x+2}\cdot\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}$ $\left[\frac{2x^2-3}{2(x+1)}\right]$

124 $\frac{x^2-x-6}{x^2-4x+4}\cdot\frac{x^2+x-6}{x^3+2x^2-9x-18}$ $\left[\frac{1}{x-2}\right]$

125 $\frac{3x-6y}{5xy^3}\cdot\frac{2x^2y^2+xy^3}{4y^2-x^2}$ $\left[-\frac{3(2x+y)}{5y(x+2y)}\right]$

126 $\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x^2-4}$ $\left[\frac{2x+1}{(x-2)(x+2)}\right]$

127 $\frac{x+y}{x^2+x+xy+y}-\frac{1}{y+1}+\frac{x}{x+1}$ $\left[\frac{y}{y+1}\right]$

128 $\frac{x+2}{x-3}-\frac{2-x}{1-x}+\frac{x^2+1}{x^2-4x+3}-1$ $\left[\frac{10}{x-3}\right]$

129 $\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2\right):\left(1-\frac{x^2}{y^2}\right)+\frac{x-y}{x}$ $\left[\frac{x-y}{x+y}\right]$

130 $\frac{1}{2}\left[\frac{2x}{x^2-4}-\left(\frac{x}{x+2}-1\right)\right]:\frac{1}{2-x}$ $\left[\frac{2(1-x)}{x+2}\right]$

131 $\left(\frac{x^3-x^2}{1-x^2}+x-1\right):\left(1-\frac{x}{x+1}\right)$ $[-1]$

132 $\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right):\left(\frac{x^3-x^2}{x-5}:\frac{x^5-x^3}{2x-10}\right)$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

133 $\left(\frac{x}{x-1}+\frac{x}{x+1}+\frac{2x}{1-x^2}\right)\cdot\frac{x^2+2x+1}{4x^2}$ $\left[\frac{x+1}{2x}\right]$

134 $\left(\frac{x^2-5}{x^2+4x+4}+\frac{1}{2+x}+\frac{6}{4x+8}\right)\cdot\frac{2x+4}{2x^2+5x}$ $\left[\frac{1}{x+2}\right]$

135 Indica la risposta corretta.

a. Semplificando la frazione algebrica $\dfrac{6a^2-6b^2}{2b-2a}$, otteniamo:

A $-3(a+b)$ B $3(a+b)$ C $3(a-b)$ D $3(b-a)$

b. Qual è il risultato della somma $\dfrac{x}{x-y}+\dfrac{y}{y-x}$?

A -1 B 0 C 1 D impossibile

c. Qual è il risultato del prodotto $\dfrac{5k+5}{6}\cdot\dfrac{3k-3}{1-k^2}$?

A $-\dfrac{5}{2}$ B $-\dfrac{5}{3}$ C $\dfrac{5}{2}$ D dipende da k

d. Quale affermazione tra le seguenti è vera per le frazioni $\dfrac{15}{15}a^2b$ e $\dfrac{15a^2b}{15a^2b}$?

A La prima vale a^2b e la seconda vale 0.

B Valgono entrambe a^2b.

C Valgono entrambe 1.

D La prima vale a^2b e la seconda vale 1.

e. A quale delle seguenti descrizioni corrisponde l'espressione $\dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$.

A Il rapporto tra il quadrato della somma di x con y e la somma dei quadrati di x e y

B Il quadrato del rapporto tra la somma di x con y e la somma dei quadrati di x e y

C Il rapporto tra la somma dei quadrati di x e y e il quadrato della somma di x con y

D Il quadrato del rapporto tra la somma dei quadrati di x e y e la somma di x con y

f. Quale delle seguenti espressioni corrisponde alla descrizione «il rapporto tra il successivo del numero naturale n e il successivo del quadrato di n»?

A $\dfrac{n+1}{(n+1)^2}$ B $\dfrac{n}{(n+1)^2}+1$ C $\dfrac{n}{n^2+1}+1$ D $\dfrac{n+1}{n^2+1}$

g. Considera l'espressione $\dfrac{x-1}{x+2}$. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

A L'espressione si annulla sia per $x=1$ che per $x=-2$.

B L'espressione non è definita né per $x=1$ né per $x=-2$.

C L'espressione si annulla per $x=1$ e non è definita per $x=-2$.

D L'espressione non è definita per $x=1$ si annulla per $x=-2$.

h. La densità di popolazione di una regione è il rapporto tra il numero dei suoi abitanti e la sua superficie. Nel 2010 la densità della regione Lombardia era di circa 413,45 abitanti/km^2 e il numero dei suoi abitanti era uguale a 9 866 104. Qual è approssimativamente l'area della superficie della Lombardia?

A $22\,863\ km^2$ B $23\,863\ km^2$ C $24\,863\ km^2$ D $25\,863\ km^2$

[Tre risposte A, una B, due C e due D]

136 Indica la risposta corretta.

a. La semplificazione della frazione algebrica $\dfrac{(x-1)^2}{x^2-1}$ è

A $\dfrac{x+1}{x-1}$ B $\dfrac{x}{x-1}$ C $\dfrac{x+1}{x}$ D $\dfrac{x-1}{x+1}$

b. La semplificazione della frazione algebrica $\dfrac{x^3+2x^2}{x^2+4x+4}$ è

A $\dfrac{x}{x+2}$ B $\dfrac{2x}{x-2}$ C $\dfrac{x^2}{x+2}$ D $\dfrac{x^2}{x-2}$

c. L'espressione $(a-3b)^{-1}$ per $a=1$ e $b=-1/3$ vale

A $\dfrac{1}{2}$ B $-\dfrac{1}{2}$ C 0 D -1

d. L'espressione $\left(1-\dfrac{x}{2}\right):\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$ si annulla per:

A $\dfrac{1}{2}$ B $-\dfrac{1}{2}$ C 2 D -2

e. A quale dei seguenti valori equivale l'espressione $\dfrac{x-3}{3-x}$

A -1 B 0 C 1 D 2

f. Qual è la frazione equivalente a $\dfrac{y^2+16+8y}{y^2-16}$

A $\dfrac{y-4}{y+4}$ B $1+\dfrac{8y}{y^2-16}$ C $\dfrac{y+4}{y-4}$ D $\dfrac{-8y}{y^2-16}$

g. La frazione $\dfrac{3-2x}{3x-2}$ *non* è definita per

A $\dfrac{2}{3}$ B $-\dfrac{2}{3}$ C $\dfrac{3}{2}$ D $-\dfrac{3}{2}$

h. Dato l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali, il campo di esistenza della frazione $\dfrac{x^2-7}{x^2+7}$ è

$\boxed{A}$ $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\boxed{B}$ $\mathbb{R} \setminus \{-7\}$ $\boxed{C}$ $\mathbb{R} \setminus \{7\}$ $\boxed{D}$ $\mathbb{R}$

i. Svolgendo l'espressione $\frac{x-1}{x+1} + \frac{x+1}{x-1}$ si ottiene:

$\boxed{A}$ $-2 \cdot \frac{x^2+1}{x^2-1}$ $\boxed{B}$ $2 \cdot \frac{x^2+1}{x^2-1}$ $\boxed{C}$ 2 $\boxed{D}$ -2

j. Quanto vale $\left(-\frac{2x}{x-2}\right)^2$?

$\boxed{A}$ 1 $\boxed{B}$ $\frac{4x^2}{x^2+4x+4}$ $\boxed{C}$ $\frac{4x^2}{x^2+4-4x}$ $\boxed{D}$ $-\frac{4x^2}{x^2+4x+4}$

[Tre risposte A, una B, quattro C e due D]

137 Indica la risposta corretta.

a. Considera la funzione $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Quanto vale $f(1) - f(-1)$?

$\boxed{A}$ -1 $\boxed{B}$ 0 $\boxed{C}$ 1 $\boxed{D}$ 2

b. Per quale delle seguenti frazioni deve essere moltiplicata $\frac{x-2}{3x+1}$ per ottenere $\frac{1}{x-2}$?

$\boxed{A}$ $\frac{3x+1}{x-2}$ $\boxed{B}$ $\frac{3x+1}{(x-2)^2}$ $\boxed{C}$ $\frac{3x}{(x-2)^2}$ $\boxed{D}$ $\frac{3x}{x-2}$

c. Considerata la funzione $f(x) = \frac{1-x}{x}$, quanto vale l'espressione $\frac{f(2)-f(1)}{2-1}$?

$\boxed{A}$ -2 $\boxed{B}$ $-\frac{1}{2}$ $\boxed{C}$ 2 $\boxed{D}$ $\frac{1}{2}$

d. Quanto vale $\frac{2x}{x+1} : \left(-\frac{1}{x+1}\right)$?

$\boxed{A}$ -2 $\boxed{B}$ $-2x$ $\boxed{C}$ $\frac{2x}{(x+1)^2}$ $\boxed{D}$ $-\frac{2x}{(x+1)^2}$

e. Quanto vale $x \cdot \frac{x^2+x}{x+2}$?

$\boxed{A}$ $\frac{x^3+x^2}{x^2+2x}$ $\boxed{B}$ $\frac{x+1}{x+2}$ $\boxed{C}$ $\frac{x^3+x^2}{x+2}$ $\boxed{D}$ $\frac{x^3+x}{x^2+2}$

f. Quale delle seguenti frazioni *non* è definita per $x = 0$?

$\boxed{A}$ $\frac{x}{x+1}$ $\boxed{B}$ $\frac{x+1}{x}$ $\boxed{C}$ $\frac{x}{x-1}$ $\boxed{D}$ $\frac{x+1}{x-1}$

g. La reciproca della frazione $\frac{2x}{x-3}$ è?

A $\dfrac{2x^2}{x^2-3x}$ B $\dfrac{x-3}{2x}$ C $\dfrac{3-x}{2x}$ D $-\dfrac{2x}{x-3}$

h. La frazione $\dfrac{2-x}{x-4}$ è equivalente a:

A $\dfrac{x-2}{4-x}$ B $\dfrac{4-x}{x-2}$ C $\dfrac{2+x}{x+4}$ D $\dfrac{1}{2}$

i. Soltanto una delle seguenti frazioni algebriche *non* è equivalente alle altre. Quale?

A $-3\dfrac{ab^{-2}}{c}$ B $-3\dfrac{a}{b^2c}$ C $\dfrac{-3b^2}{a^{-1}c}$ D $\dfrac{-3a}{b^2c}$

j. In una sola delle seguenti divisioni si ottiene una frazione algebrica. Quale?

A $(2a^3b^4):(-3ab^4)$ C $(-7x^3y^8):(3x^3y^8)$

B $0:(-4x^4y^2)$ D $(4a^2b^4):(-2ab^5)$

[Una risposta A, sei B, due C e una D]

138 Indica la risposta corretta.

a. La frazione $\dfrac{a-2}{b-3}$ non ha significato per:

A $a=2$ B $b=-3$ C $a=2$ e $b=3$ D $b=3$

b. Una sola delle seguenti espressioni dà un risultato diverso dagli altri. Quale?

A $1-\dfrac{1-a}{a}$ B $2a-\dfrac{1}{a}$ C $-\dfrac{1}{a}+2$ D $\dfrac{a-1}{a}+1$

c. Semplificando la frazione $\dfrac{x^2-xy}{y^2-xy}$ si ottiene:

A $\dfrac{x^2}{y^2}$ B $-\dfrac{x}{y}$ C $\dfrac{x}{y}$ D $\dfrac{y}{x}$

d. Sviluppando l'espressione $\left(1-\dfrac{b}{a+2b}\right)^2$ si ottiene:

A $\dfrac{a^2+2ab+b^2}{a^2+4ab+4b^2}$ C $\dfrac{1}{4}$

B $\dfrac{a^2+ab+b^2}{a^2+2ab+4b^2}$ D $\dfrac{1+b^2-2b}{a^2+4b^2+4ab}$

e. Semplificando l'espressione $1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-a}}$ si ottiene:

A -1 B 1 C $-\frac{1}{a}$ D $\frac{1}{a}$

f. Semplificando l'espressione $\left(\frac{x}{x-1}-\frac{y}{y-1}\right):\left(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-y}\right)$ si ottiene:

A -1 B 0 C 1 D 2

g. La frazione $\frac{2x-4}{x-1}$ non ha significato per

A $x=-1$ B $x=0$ C $x=1$ D $x=2$

[Due risposte A, due B, una C e due D]

3 EQUAZIONI FRATTE

Definizione 9. Un'equazione in cui compare l'incognita a denominatore si chiama *fratta* o *frazionaria*.

In questo capitolo affrontiamo quelle equazioni fratte che, svolgendo i calcoli, si riconducono a equazioni lineari. Per risolvere un'equazione di questo tipo si procede come segue:

- si scompongono i denominatori in fattori
- si determina il minimo comune multiplo dei denominatori
- si impongono le condizioni di esistenza, escludendo i valori che annullano i denominatori
- si svolgono i calcoli
- si moltiplicano entrambi i membri dell'equazione per il minimo comune multiplo
- si ottiene un'equazione lineare, che verrà risolta normalmente
- si eliminano le eventuali soluzioni escluse dalle condizioni di esistenza

Vediamo come funziona il procedimento attraverso qualche esempio.

3.1 RISOLUZIONE DELLE EQUAZIONI FRATTE

Esercizio 37. Risolvi l'equazione $\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{2}{x^2-1}$.

Soluzione.

- Scomponiamo i denominatori:

$$\frac{2}{x-1}+\frac{1}{x+1}=\frac{2}{(x-1)(x+1)}$$

- Il mcm dei denominatori è$(x-1)(x+1)$.
- Imponiamo le condizioni di esistenza:

$$x \neq -1 \quad \wedge \quad x \neq 1$$

- Svolgiamo i calcoli:

$$\frac{2(x+1)+(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{2}{(x-1)(x+1)}$$

- Moltiplichiamo entrambi i membri per il mcm, certamente diverso da zero per le condizioni poste:

$$2x+2+x-1=2 \quad \Longrightarrow \quad 3x=1 \quad \Longrightarrow \quad x=\frac{1}{3}$$

- Confrontiamo la soluzione con le condizioni di esistenza: la soluzione è accettabile e l'insieme soluzione è:

$$\mathcal{S}=\left\{\frac{1}{3}\right\}$$

□

Esercizio 38. Risolvi l'equazione $\dfrac{4x}{x+2}+\dfrac{x+2}{x}=5$.

Soluzione.

- I denominatori sono irriducibili.
- Il mcm dei denominatori è $x(x+2)$.
- Imponiamo le condizioni di esistenza:

$$x \neq -2 \quad \wedge \quad x \neq 0$$

- Svolgiamo i calcoli:

$$\frac{4x^2+(x+2)^2}{x(x+2)} = \frac{5x(x+2)}{x(x+2)}$$

- Moltiplichiamo entrambi i membri per il mcm, certamente diverso da zero per le condizioni poste:

$$\cancel{4x^2}+\cancel{x^2}+4x+4=\cancel{5x^2}+10x \quad \Longrightarrow \quad 6x=4 \quad \Longrightarrow \quad x=\frac{2}{3}$$

- Confrontiamo la soluzione con le condizioni di esistenza: la soluzione è accettabile e l'insieme soluzione è:

$$\mathcal{S}=\left\{\frac{2}{3}\right\}$$

□

Esercizio 39. Risolvi l'equazione $\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x-2}=\dfrac{4}{x^2-4}$.

Soluzione.

- Scomponiamo i denominatori:
$$\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x-2}=\frac{4}{(x+2)(x-2)}$$
- Il mcm dei denominatori è $(x+2)(x-2)$.
- Imponiamo le condizioni di esistenza:
$$x \neq -2 \quad \wedge \quad x \neq 2$$
- Svolgiamo i calcoli:
$$\frac{(x-2)+(x+2)}{(x+2)(x-2)}=\frac{4}{(x+2)(x-2)}$$
- Moltiplichiamo entrambi i membri per il mcm, certamente diverso da zero per le condizioni poste:
$$x-2+x+2=4 \quad \Longrightarrow \quad 2x=4 \quad \Longrightarrow \quad x=2$$
- Confrontiamo la soluzione con le condizioni di esistenza: la soluzione *non* è accettabile e l'insieme soluzione è:
$$\mathcal{S}=\emptyset$$

□

Esercizio 40. Risolvi l'equazione $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{3x-6}=\dfrac{2x-3}{x^2-3x+2}$.

Soluzione.

- Scomponiamo i denominatori:
$$\frac{1}{x-1}+\frac{2}{3(x-2)}=\frac{2x-3}{(x-1)(x-2)}$$
- Il mcm dei denominatori è $3(x-1)(x-2)$.
- Imponiamo le condizioni di esistenza:
$$x \neq 1 \quad \wedge \quad x \neq 2$$

- Svolgiamo i calcoli:

$$\frac{3(x-2)+2(x-1)}{3(x-1)(x-2)} = \frac{3(2x-3)}{3(x-1)(x-2)}$$

- Moltiplichiamo entrambi i membri per il mcm, certamente diverso da zero per le condizioni poste:

$$3(x-2)+2(x-1) = 3(2x-3) \quad \Longrightarrow \quad 3x-6+2x-2 = 6x-9 \quad \Longrightarrow \quad x = 1$$

- Confrontiamo la soluzione con le condizioni di esistenza: la soluzione *non* è accettabile e l'insieme soluzione è:

$$\mathcal{S} = \emptyset$$

□

Esercizio 41. Risolvi l'equazione $\dfrac{1}{x+3} - \dfrac{1}{x-2} = -\dfrac{5}{x^2+x-6}$.

Soluzione.

- Scomponiamo i denominatori:

$$\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x-2} = -\frac{5}{(x+3)(x-2)}$$

- Il mcm dei denominatori è $(x+3)(x-2)$.
- Imponiamo le condizioni di esistenza:

$$x \neq -3 \quad \wedge \quad x \neq 2$$

- Svolgiamo i calcoli:

$$\frac{x-2-(x+3)}{(x+3)(x-2)} = \frac{-5}{(x+3)(x-2)}$$

- Moltiplichiamo entrambi i membri per il mcm, certamente diverso da zero per le condizioni poste:

$$x-2-x-3 = -5 \quad \Longrightarrow \quad 0 = 0$$

- L'equazione è *indeterminata*: ciò significa che ogni numero che verifica le condizioni di esistenza è soluzione dell'equazione. L'insieme soluzione è allora:

$$\mathcal{S} = \mathbb{R} \setminus \{-3, 2\}$$

□

Esercizio 42. Risolvi l'equazione $\dfrac{1}{x^2-3x}-\dfrac{x}{x^2-6x+9}=\dfrac{1}{3-x}$.

Soluzione.

- Scomponiamo in fattori i denominatori e al secondo membro scriviamo $3-x$ come $-(x-3)$:
$$\frac{1}{x(x-3)}-\frac{x}{(x-3)^2}=-\frac{1}{x-3}.$$
- Il mcm dei denominatori è $x(x-3)^2$.
- Imponiamo le condizioni di esistenza:
$$x\neq 0 \quad \wedge \quad x\neq 3$$
- Svolgiamo i calcoli:
$$\frac{(x-3)-x^2}{x(x-3)^2}=\frac{-x(x-3)}{x(x-3)^2}$$
- Moltiplichiamo entrambi i membri per il mcm, certamente diverso da zero per le condizioni poste:
$$x-3\cancel{-x^2}=\cancel{-x^2}+3x \quad\Longrightarrow\quad x-3x=3 \quad\Longrightarrow\quad -2x=3 \quad\Longrightarrow\quad x=-\frac{3}{2}$$
- Confrontiamo le soluzioni con le condizioni di esistenza; la soluzione è accettabile e l'insieme soluzione è:
$$\mathcal{S}=\left\{-\frac{3}{2}\right\}$$ □

Esercizio 43. Risolvi l'equazione $\dfrac{x^2}{x^2-2x+1}-\dfrac{1}{2x-2}=1$.

Soluzione.

- Scomponiamo i denominatori:
$$\frac{x^2}{(x-1)^2}-\frac{1}{2(x-1)}=1$$
- Il mcm dei denominatori è mcm $=2(x-1)^2$.

- Imponiamo le condizioni di esistenza:

$$x \neq 1$$

- Svolgiamo i calcoli:

$$\frac{2x^2-(x-1)}{2(x-1)^2}=\frac{2(x-1)^2}{2(x-1)^2}$$

- Moltiplichiamo entrambi i membri per il mcm, certamente diverso da zero per le condizioni poste:

$$2x^2-(x-1)=2(x-1)^2 \quad\Longrightarrow\quad \cancel{2x^2}-x+1=\cancel{2x^2}-4x+2 \quad\Longrightarrow\quad x=\frac{1}{3}$$

- Confrontiamo la soluzione con le condizioni di esistenza: la soluzione è accettabile e l'insieme soluzione è:

$$\mathcal{S}=\left\{\frac{1}{3}\right\}$$

□

Esercizio 44. Risolvi l'equazione $\dfrac{1}{x^2-4x+4}+\dfrac{x}{x^2+x-6}=\dfrac{1}{x+3}$.

Soluzione.

- Scomponiamo i denominatori:

$$\frac{1}{(x-2)^2}+\frac{x}{(x-2)(x+3)}=\frac{1}{x+3}$$

- Il mcm dei denominatori è mcm $=(x-2)^2(x+3)$.
- Imponiamo le condizioni di esistenza:

$$x \neq -3 \quad \wedge \quad x \neq 2$$

- Svolgiamo i calcoli:

$$\frac{(x+3)+x(x-2)}{(x-2)^2(x+3)}=\frac{(x-2)^2}{(x-2)^2(x+3)}$$

- Moltiplichiamo entrambi i membri per il mcm, certamente diverso da zero per le condizioni poste:

$$(x+3)+x(x-2)=(x-2)^2 \quad\Longrightarrow\quad x+3+\cancel{x^2}-2x=\cancel{x^2}-4x+4 \quad\Longrightarrow\quad x=\frac{1}{3}$$

- Confrontiamo la soluzione con le condizioni di esistenza: la soluzione è accettabile e l'insieme soluzione è:

$$\mathcal{S}=\left\{\frac{1}{3}\right\}$$

□

3.2 FORMULE INVERSE

Le formule di geometria, di fisica e di matematica finanziaria si possono vedere come *equazioni letterali*, in cui le varie grandezze sono indicate con lettere. I due principi di equivalenza delle equazioni permettono di ricavare le cosiddette *formule inverse*, ossia di risolvere un'equazione letterale rispetto a una qualsiasi delle lettere che vi compaiono.

Esercizio 45. L'area del triangolo è data dalla formula

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

dove b è la base e h l'altezza. Determina il valore di h in funzione di A e b.

Soluzione. L'equazione è risolta rispetto all'incognita A: se sono noti i valori di b e di h si può trovare il valore di A. Ora, noti A e b, vogliamo h. Moltiplichiamo per 2 i membri dell'equazione data:

$$A \cdot 2 = \frac{b \cdot h}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2} \quad \Longrightarrow \quad 2A = b \cdot h$$

Dividiamo per b entrambi i membri e scambiamo primo e secondo membro:

$$\frac{2A}{b} = \frac{\cancel{b} \cdot h}{\cancel{b}} \quad \Longrightarrow \quad h = \frac{2A}{b}$$ □

Esercizio 46. Un corpo in una posizione s_0, viaggiando alla velocità costante v, raggiunge dopo un intervallo di tempo t la posizione s. In formule:

$$s = s_0 + v \cdot t$$

Calcola v supponendo note le altre grandezze.

Soluzione. Sottraiamo s_0 a entrambi i membri della formula data:

$$s - s_0 = \cancel{s_0} + v \cdot t - \cancel{s_0} \quad \Longrightarrow \quad s - s_0 = v \cdot t$$

Dividiamo entrambi i membri per t e scambiamo primo e secondo membro:

$$\frac{s - s_0}{t} = \frac{v \cdot \cancel{t}}{\cancel{t}} \quad \Longrightarrow \quad v = \frac{s - s_0}{t}$$ □

Esercizio 47. Depositando un capitale C per un periodo di t anni a un tasso di interesse annuo i, si ha diritto al montante M. In formule:

$$M = C(1 + it)$$

Calcola i note le altre grandezze.

Soluzione. Dividiamo per C i membri dell'equazione data, poi sottraiamo 1 a entrambi i membri e dividiamoli per t:

$$\frac{M}{C} = 1 + it \quad \Longrightarrow \quad \frac{M}{C} - 1 = it \quad \Longrightarrow \quad \frac{\left(\dfrac{M}{C} - 1\right)}{t} = i$$

Leggiamo la formula da destra verso sinistra:

$$i = \frac{\left(\dfrac{M}{C} - 1\right)}{t} = \frac{1}{t} \cdot \left(\frac{M}{C} - 1\right) = \frac{1}{t} \cdot \frac{M - C}{C} = \frac{M - C}{tC} \qquad \square$$

3.3 ESERCIZI

Chi non risolve esercizi non impara la matematica.

Risolvi le seguenti equazioni fratte.

1. $\dfrac{2}{x+1} = \dfrac{1}{x+2}$ $[-3]$
2. $\dfrac{1}{x-1} = 2$ $\left[\dfrac{3}{2}\right]$
3. $1 - \dfrac{1}{x+1} = 0$ $[0]$
4. $\dfrac{2x-4}{x-2} = 0$ [impossibile]
5. $\dfrac{x}{x+1} - \dfrac{1}{x-1} = 1$ $[0]$
6. $\dfrac{1}{x-3} = \dfrac{x}{3-x}$ $[-1]$
7. $\dfrac{x-1}{x^2-4} = -\dfrac{5}{x+2}$ $\left[\dfrac{11}{6}\right]$
8. $\dfrac{3}{x+1} = \dfrac{2}{x+1}$ [impossibile]
9. $\dfrac{1}{3-x} - \dfrac{4}{2x-6} = 0$ [impossibile]
10. $\dfrac{x^2-1}{x-1} - 1 = 2x+1$ $[-1]$
11. $\dfrac{x}{x^2-4} = \dfrac{1}{x+2}$ [impossibile]
12. $\dfrac{x-2}{x-1} = \dfrac{x-1}{x-2}$ $\left[\dfrac{3}{2}\right]$
13. $\dfrac{3x+1}{3x^2+x} = 1$ $[1]$
14. $\dfrac{5}{x-2} - \dfrac{6}{x+1} = \dfrac{3x-1}{x^2-x-2}$ $\left[\dfrac{9}{2}\right]$
15. $\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{x}{x-1} = 0$ $[-1]$
16. $\dfrac{x+1}{x-1} - \dfrac{x}{1+x} = 0$ $\left[-\dfrac{1}{3}\right]$
17. $\dfrac{2x+1}{2x-1} + \dfrac{4x^2+1}{4x^2-1} = 2$ $[-1]$
18. $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^2-x} = 0$ $\left[\dfrac{1}{3}\right]$
19. $\dfrac{x-1}{x^2-2x+1} = \dfrac{2}{2-2x}$ [impossibile]
20. $\dfrac{5}{5x+1} + \dfrac{2}{2x-1} = \dfrac{1}{1-2x}$ $\left[\dfrac{2}{25}\right]$
21. $\dfrac{30}{x^2-25} + \dfrac{3}{5-x} = 0$ [impossibile]
22. $-\dfrac{3x}{6-2x} + \dfrac{5x}{10-5x} = \dfrac{1-x}{4-2x}$ $\left[\dfrac{3}{4}\right]$
23. $\dfrac{1}{x+3} - \dfrac{2}{x+2} = \dfrac{3x-6}{x^2+5x+6}$ $\left[\dfrac{1}{2}\right]$
24. $\dfrac{x-1}{x+2} - \dfrac{x+2}{x-1} = \dfrac{1}{x^2+x-2}$ $\left[-\dfrac{2}{3}\right]$
25. $\dfrac{3}{x-1} + \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{12-x}{x^2-1}$ $[2]$
26. $\dfrac{3x+1}{x^2-9} + \dfrac{2}{3x^2-9x} = \dfrac{3}{x+3}$ $\left[-\dfrac{3}{16}\right]$
27. $\dfrac{1}{x^2-3x+2} + \dfrac{2}{x-1} = 0$ $\left[\dfrac{3}{2}\right]$
28. $\dfrac{x+2}{(x-3)^2} - \dfrac{1}{x-3} = \dfrac{4}{9-3x}$ $\left[-\dfrac{3}{4}\right]$
29. $\dfrac{1}{x+1} = \dfrac{2}{x-1}$ $[-3]$
30. $\dfrac{x-2}{2-x} + x = 1$ [impossibile]
31. $\dfrac{x^2-1}{x-1} - \dfrac{1}{x+2} = \dfrac{x+7}{x+2} - x$ $[-3]$
32. $\dfrac{1}{x-2} = \dfrac{5}{x}$ $\left[\dfrac{5}{2}\right]$
33. $\dfrac{3}{x+2} + \dfrac{5}{2-x} = 0$ $[-8]$
34. $\dfrac{3}{x} + \dfrac{4}{1-x} = 0$ $[-3]$
35. $\dfrac{7+x}{2x} = \dfrac{2-x}{1-2x}$ $\left[\dfrac{7}{17}\right]$

36 $\frac{1}{6}-\frac{1}{1-x}=\frac{1+x}{2-2x}$ $[-2]$

37 $\frac{2x-1}{x+3}+\frac{1-x}{x+1}=\frac{x-2}{x+3}$ [impossibile]

38 $\frac{2x}{2x-1}+\frac{x+2}{2x-1}=\frac{3}{2}$ [impossibile]

39 $\frac{x+3}{x-2}-\frac{x+4}{x+2}=\frac{2(x+7)}{x^2-4}$ $[0]$

40 $\frac{3x+2}{x-4}-\frac{2-x}{x+1}=3+\frac{x+12}{x-4}$ $[2]$

41 $\frac{3}{x}=\frac{4}{x-1}$ $[-3]$

42 $\frac{x^2+x-3}{x^2-x}=1-\frac{5}{2x}$ $\left[\frac{11}{9}\right]$

43 $\frac{1}{x^2-x}=\frac{1}{x^2-1}+\frac{1}{x^2+x}$ $[2]$

44 $1+\frac{x}{x+3}=3\cdot\left(1-\frac{x}{x+3}\right)$ $[3]$

45 $\frac{x^3}{x+8}=(x-4)^2$ $\left[\frac{8}{3}\right]$

46 $\frac{1}{x+1}=\frac{1}{1-x}$ $[0]$

47 $\frac{2x}{x-1}=\frac{1-2x}{x+1}-\frac{4x^2+1}{1-x^2}$ $[0]$

48 $\frac{3x^2+1}{x^2}-\frac{x+3}{x}-2=0$ $\left[\frac{1}{3}\right]$

49 $\frac{x}{x-5}=\frac{3}{x+3}-\frac{x-30}{x^2-2x-15}+1$ $[0]$

50 $\frac{2x}{x^2-10x+25}+\frac{x+3}{x-5}=1$ $[4]$

51 $\frac{x}{4x^2-9}+\frac{1}{3-2x}-\frac{1}{3+2x}=0$ $[0]$

52 $\frac{x-1}{x}+\frac{2-x}{x^2}=-\frac{2}{x-3}+1$ $\left[\frac{3}{4}\right]$

53 $\frac{1}{2x}=\frac{3-x^2}{x^2-3x}+\frac{1-x}{3-x}$ [impossibile]

54 $\frac{x+6}{2-x}=\frac{x-1}{x-2}+1$ $[-1]$

55 $\frac{x+2}{x+1}=\frac{x-2}{x-1}$ $[0]$

56 $\frac{x-2}{x+2}=\frac{x+2}{x-2}$ $[0]$

57 $\frac{1-3x}{1-2x}=\frac{3}{2x-1}+3$ $\left[-\frac{1}{3}\right]$

58 $\frac{5x-2}{5}=\frac{2}{x-2}+x$ $[-3]$

59 $\frac{x^2-x}{4-x^2}=\frac{4-x}{16-x^2}-1$ [impossibile]

60 $\frac{1}{x}-\frac{x+1}{x}=\frac{1}{x-1}-1$ [impossibile]

61 $\frac{3x+1}{x^2-x}=\frac{4}{x-1}$ [impossibile]

62 $\frac{1}{x-1}=1$ $[2]$

63 $\frac{2}{x-3}=\frac{1}{x-3}-3$ $\left[\frac{8}{3}\right]$

64 $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}=\frac{2}{x-3}$ $\left[\frac{5}{3}\right]$

65 $x+\frac{2x}{x+1}=\frac{x^2-3}{x+1}$ [impossibile]

66 $\frac{2x-1}{x-1}+\frac{3x+2}{x+1}=5$ [impossibile]

67 $\frac{x^2-1}{2x+3}-\frac{3x+1}{4x+6}=\frac{x}{2}$ $\left[-\frac{1}{2}\right]$

68 $\frac{1}{x^2-x}=\frac{1}{x^2-1}+\frac{1}{x^2+x}$ $[2]$

69 $\frac{1}{x+1}-\frac{4}{x+2}=\frac{1}{x+5}-\frac{4}{x+3}$ $[1]$

70 $\frac{4}{x-1}+\frac{6}{x-5}=\frac{1}{x-7}+\frac{9}{x-3}$ $[9]$

71 $\frac{3+x}{x}+\frac{3}{x}=\frac{2x^2-6}{x^2}-1$ $[-1]$

72 $\frac{4x}{5+x}-\frac{10}{x}=\frac{4(5+x)}{x}$ $[-3]$

73 $\frac{27}{x^2-1}+\frac{3}{x+1}=\frac{10}{x-1}$ $[2]$

74 $\frac{6-8x}{3-x}=\frac{3}{x-1}+8$ $\left[\frac{3}{5}\right]$

75 $\frac{1}{5x+1}=-\frac{1}{5x-1}$ $[0]$

76 $\frac{1}{5-x}+\frac{1}{5+x}-\frac{4x}{25-x^2}=0$ $\left[\frac{5}{2}\right]$

77 $\frac{1}{2}+\frac{3}{x-1}=\frac{7}{x-1}+\frac{3}{2}$ $[-3]$

78 $\frac{2}{6x+2}-\frac{x-2}{9x^2-1}=\frac{5}{12x-4}$ $\left[-\frac{1}{7}\right]$

79 $\frac{1}{4x^2-1}=\frac{3}{2x^2-x}-\frac{2}{2x^2+x}$ $[-5]$

80 $\dfrac{10x-1}{12x-6}=\dfrac{14x+5}{8x-4}-\dfrac{4x+2}{6x-3}$ $\left[-\dfrac{3}{2}\right]$

81 $\dfrac{4}{9x^2-1}=\dfrac{3}{3x-1}-\dfrac{1}{3x+1}$ $[0]$

82 $\dfrac{x^2+1}{x^2-1}=1$ [impossibile]

83 $\dfrac{5x-1}{3x+2}=\dfrac{5x-7}{3x-1}$ $[-5]$

84 $\dfrac{x+5}{x-5}-\dfrac{x-5}{x+5}=\dfrac{20}{x^2-25}$ $[1]$

85 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{x}{x^2-x}+\dfrac{x-1}{x+1}=1$ $\left[\dfrac{1}{3}\right]$

86 $\dfrac{4x+7}{x-1}=\dfrac{12x+5}{3x+4}$ $\left[-\dfrac{3}{4}\right]$

87 $\dfrac{1}{2}=\dfrac{2(3-7x)}{1+5x}$ $\left[\dfrac{1}{3}\right]$

88 $\dfrac{x+2}{x-2}-\dfrac{x-2}{x+2}=\dfrac{16}{x^2-4}$ [impossibile]

89 $1+\dfrac{x}{x+3}=3\left(1-\dfrac{x}{x+3}\right)$ $[3]$

90 $\dfrac{5}{x-3}-\dfrac{2}{x}=\dfrac{3}{x-1}$ $\left[\dfrac{1}{2}\right]$

91 $\dfrac{3}{3x-1}+\dfrac{2}{3x+1}=\dfrac{4}{9x^2-1}$ $\left[\dfrac{1}{5}\right]$

92 $\dfrac{3x+1}{x-1}=0$ $\left[-\dfrac{1}{3}\right]$

93 $\dfrac{2x-1}{x-1}-\dfrac{3}{x-1}=\dfrac{2}{x-1}$ $\left[\dfrac{1}{3}\right]$

94 $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{x+1}=\dfrac{3}{x-1}-\dfrac{4}{x+1}$ $[2]$

95 $\dfrac{(x-2)^2}{(x+3)^2}-\dfrac{1}{x^2+6x+9}=1$ $\left[-\dfrac{3}{5}\right]$

96 $\dfrac{2-x}{x+1}-\dfrac{1}{x}=-1$ $\left[\dfrac{1}{2}\right]$

97 $\dfrac{1}{x+1}=4$ $\left[-\dfrac{3}{4}\right]$

98 $\dfrac{4}{x-2}+7=\dfrac{x}{3x-6}$ $\left[\dfrac{3}{2}\right]$

99 $\dfrac{4+2x}{x+3}=\dfrac{3x-4}{4x+12}$ $[-4]$

Risolvi le seguenti equazioni fratte.

100 $\dfrac{3x+1}{x+2}+\dfrac{1-2x}{x-2}=\dfrac{x-6}{x+2}$ [impossibile]

101 $1+\dfrac{x-1}{x+1}=\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1-x^2}{x^2-x-2}$ $\left[-\dfrac{1}{3}\right]$

102 $\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{2}{x+1}=\dfrac{3}{x^2-x-2}$ [impossibile]

103 $\dfrac{3x}{x-2}+\dfrac{6x}{x^2-4x+4}=\dfrac{3x^2}{(x-2)^2}$ $[x\neq 2]$

104 $\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{1}{2-x}=\dfrac{x+3}{x^2+x-6}$ [impossibile]

105 $\dfrac{1+x}{2x+4}-\dfrac{1}{x^2+2x}+\dfrac{x+1}{2x}=1$ $[\mathbb{R}\setminus\{-2,0\}]$

106 $\left(\dfrac{x+5}{x+1}-1\right):x-\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{2}{x^2-1}$ $[5]$

107 $\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{2}{x+1}=\dfrac{3}{x^2-x-2}$ [impossibile]

108 $\left(\dfrac{1}{x+5}-\dfrac{1}{5}\right):\left(\dfrac{1}{x-5}+\dfrac{1}{5}\right)+\dfrac{x^2}{x^2-5x}=0$ $\left[\dfrac{5}{3}\right]$

109 $\dfrac{1+2x}{x^2+2x}+\dfrac{x^3-6x+1}{x^2-4}=\dfrac{x^2-2x}{x-2}+\dfrac{1}{x^2-2x}$ $\left[-\dfrac{4}{3}\right]$

110 $\dfrac{1}{3x+2}-\dfrac{3}{2-x}=\dfrac{10x+4}{3x^2-4x-4}$ $\left[\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{2}{3},2\right\}\right]$

111 $\dfrac{1}{x^2-x}-\dfrac{1}{x^2+x}=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}-1$ [impossibile]

112 $\dfrac{3x+1}{2x-4}-\dfrac{6x+1}{3x-6}+\dfrac{1}{2}=0$ [impossibile]

113 $\dfrac{x}{2x-4}+\dfrac{x-1}{3x+6}=2-\dfrac{48-7x^2}{24-6x^2}$ [impossibile]

114 $\dfrac{2x-7}{4-x}+\dfrac{5x+2}{3+x}=-\dfrac{7}{x^2-x-12}+3$ [impossibile]

115 $\dfrac{2-x}{x^2-2x-3}+\dfrac{2(x+2)}{x^2+4x+3}=\dfrac{x-6}{x^2-9}$ [0]

116 $\dfrac{3-x}{5x+1}+\dfrac{1-2x^2}{2-x}-2x=\dfrac{19x^2+4x}{5x^2-9x-2}$ [impossibile]

117 $\dfrac{x}{x+3}-\dfrac{2x-3}{x+1}=\dfrac{11-x^2}{x^2+4x+3}$ [impossibile]

118 $\dfrac{2x-1}{x^2-4}+\dfrac{x-3}{x^2-7x+10}=\dfrac{3x-2}{x^2-3x-10}$ $\left[-\dfrac{5}{4}\right]$

119 $\dfrac{-2x-4}{x^4-1}-\dfrac{x+2}{x^2+1}=\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2x+3}{x^2-1}$ $[\mathbb{R}\setminus\{\pm1\}]$

120 $\dfrac{2}{x^2+2x+1}+\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{x}{x-1}-1$ [impossibile]

121 $\dfrac{x^2-4}{2x^3-x^2-2x+1}-\dfrac{2x}{1-x^2}=\dfrac{4x+3}{2x-1}-2$ [impossibile]

122 $\dfrac{x^2}{x^2+x-12}-\dfrac{1-x^2}{x^3+2x^2-11x-12}=1$ [impossibile]

123 $\dfrac{2x+3}{2x^2-2x}+\dfrac{6-7x}{4x^2+4x}=\dfrac{46-6x}{8x^2-8}$ $[\mathbb{R}\setminus\{0,\pm1\}]$

124 $\dfrac{5-24x}{9x^2-24x+16}-\dfrac{6x}{4-3x}=2$ [impossibile]

125 $\dfrac{24}{4-9x^2}-\dfrac{3x+2}{2x-3x^2}=\dfrac{3x-2}{3x^2+2x}$ $\left[\mathbb{R}\setminus\left\{0,\pm\dfrac{2}{3}\right\}\right]$

126 $\dfrac{8}{x^2-25}=\dfrac{x-1}{x^2-11x+30}+\dfrac{2-x}{x^2-4x-5}$ $\left[\dfrac{17}{67}\right]$

127 $\dfrac{6x-1}{x^2-6x+9}-\dfrac{9}{x^2-9}=\dfrac{x^2-1}{x^2-6x+9}-1$ [impossibile]

128 $\dfrac{x-2}{x^2-x}+\dfrac{x+2}{x^2+x}=\dfrac{2x}{x^2-1}$ [impossibile]

129 $\dfrac{x+1}{x^2-3x+2}=\dfrac{x+1}{x^2-5x+6}-\dfrac{3}{x^2-4x+3}$ [8]

130 $\dfrac{x-3}{2-x}+\dfrac{4x-3}{x+7}=\dfrac{9}{x^2+5x-14}+3$ [impossibile]

131 $\dfrac{1-2x}{x}-\dfrac{4}{3x^2+x}=\dfrac{12}{3x+1}-2$ [impossibile]

132 $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{x^2}{x^2-1}=\dfrac{2-x}{x^2-x^3}-\dfrac{2-x^3}{x^3-x}$ $\left[-\dfrac{1}{3}\right]$

133 $\frac{2-x}{x^2-x} - \frac{3}{x^2+x-2} + \frac{x+1}{x} - 1 = 0$ [impossibile]

134 $\frac{x-1}{x+8} = \frac{1-2x}{3-x} + \frac{x^2+35}{x^2+5x-24} - 2$ [impossibile]

135 $\frac{2(x-1)}{2x^2+x-1} = \frac{4x^2}{4x^2-1} - 1 + \frac{2}{2x+1}$ $\left[-\frac{1}{5}\right]$

136 $\left(\frac{1}{x} - 1\right)(x+1) + 2x + 1 = (x-1)\left(\frac{1}{x} + 1\right)$ $[-2]$

137 $\frac{2-x}{x^2+2x+1} - \frac{4-x}{x+1} = 1$ $\left[-\frac{1}{2}\right]$

138 $-\frac{2}{3x-3} - \frac{3}{x-1} = \frac{1}{2x-x^2-1}$ $\left[\frac{14}{11}\right]$

139 $\frac{1}{x+2} - \frac{x}{x^2-3x-10} = \frac{4}{x-5}$ $\left[-\frac{13}{4}\right]$

140 L'interesse I maturato da un capitale C, al tasso di interesse annuo i, per un numero di anni t, è:

$$I = C \cdot i \cdot t$$

a. Ricava le formule per calcolare C, i e t.

b. Se il capitale è 12 000 €, il tasso di interesse 3% e il tempo è di 6 anni, calcola I.

$$\left[C = \frac{I}{it}, i = \frac{I}{Ct}, t = \frac{I}{Ci}; I = 2160 \text{ €}\right]$$

141 Conversione da gradi Celsius C a gradi Fahrenheit F:

$$C = \frac{5(F-32)}{9}$$

a. Ricava la formula per calcolare F.

b. Calcola il valore di C quando F vale 104 e il valore di F quando C vale 15.

$$\left[F = \frac{9C}{5} + 32; C = 40, F = 59\right]$$

142 Superficie S di un trapezio di base maggiore B, base minore b, altezza h:

$$S = \frac{1}{2} \cdot (B+b) \cdot h$$

a. Ricava le formule per calcolare B, b e h.

b. Se la base maggiore è 12 cm, la base minore 8 cm, la superficie 60 cm^2, calcola l'altezza del trapezio.

$$\left[B = \frac{2S}{h} - b, b = \frac{2S}{h} - B, h = \frac{2S}{B+b}; 6 \text{ cm}\right]$$

143 Velocità v nel moto rettilineo uniformemente accelerato con velocità iniziale v_0, accelerazione costante a dopo un tempo t:

$$v = v_0 + a \cdot t$$

a. Ricava le formule per calcolare v_0, a e t.

b. Se un corpo è passato in 10 secondi dalla velocità 10 m/s alla velocità 30 m/s, qual è stata la sua accelerazione?

$$\left[v_0 = v - at, a = \frac{v - v_0}{t}, t = \frac{v - v_0}{a}; 2\ \text{m/s}^2\right]$$

144 Legge di Gay-Lussac per i gas:

$$V = V_0 \cdot (1 + \alpha \cdot T)$$

Ricava le formule per calcolare V_0 e T. $\left[V_0 = \frac{V}{1 + \alpha t}, T = \frac{V - V_0}{V_0 \alpha}\right]$

145 Equazione di stato dei gas perfetti:

$$pV = nRT$$

Ricava le formule per calcolare V e T. $\left[V = \frac{nRT}{p}, T = \frac{pV}{nR}\right]$

146 Rendimento del ciclo di Carnot:

$$\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

Ricava le formule per calcolare T_1 e T_2. $\left[T_1 = T_2(1 - \eta), T_2 = \frac{T_1}{1 - \eta}\right]$

147 Indica la risposta corretta.

a. Quali sono le condizioni di esistenza dell'equazione $\frac{1}{x^2 - x} - \frac{1}{x^2 - 1} = 0$?

A $x \neq 0$ B $x \neq 0, x \neq 1$ C $x \neq 0, x \neq \pm 1$ D $x \neq \pm 1$

b. Qual è l'insieme soluzione dell'equazione $\frac{x - 3}{x - 4} = \frac{1}{x - 4}$?

A $\{1\}$ B $\{3\}$ C $\{4\}$ D $\emptyset$

c. L'equazione $\frac{x - 4}{x + 5} = \frac{1}{x + 5}$:

A ha come soluzione $x = 4$

B ha come soluzione $x = 5$

C è impossibile

D è indeterminata

d. La somma tra il reciproco di un numero e il reciproco del doppio del numero è uguale a 3. Qual è il numero?

A $\frac{1}{2}$ B $\frac{3}{2}$ C $\frac{5}{2}$ D $\frac{7}{2}$

e. In base alle leggi della fisica, due resistenze R_1 e R_2, poste in parallelo, equivalgono a un'unica resistenza R tale che:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Quale delle seguenti formule esprime R in funzione di R_1 e R_2?

A $R = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}$ B $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ C $R = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$ D $R = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$

f. Un'auto percorre 280 km nello stesso tempo in cui un autobus ne percorre 200. Supponendo che le velocità dell'auto e dell'autobus siano costanti e che la velocità dell'auto sia di 30 km/h superiore a quella dell'autobus, qual è la velocità di quest'ultimo?

A 75 km/h B 80 km/h C 85 km/h D 90 km/h

g. Un'azienda stima che dopo x giorni di campagna pubblicitaria la percentuale di consumatori che conoscerà un nuovo prodotto in fase di lancio è espressa dalla legge $p(x) = \frac{80x}{x+20}$. Per esempio, dopo 20 giorni è $p(20) = 40$, quindi l'azienda stima che il 40% dei consumatori sarà a conoscenza del prodotto. Secondo le stime dell'azienda, quanti giorni saranno necessari perché il prodotto sia conosciuto dal 30% dei consumatori?

A 8 B 10 C 12 D 14

h. In una classe gli studenti italiani sono 4 in più di quelli stranieri. Il rapporto tra il numero degli studenti stranieri e il numero di quelli italiani è 2/3. Quanti sono gli studenti stranieri?

A 7 B 8 C 9 D 10

i. Il rapporto tra il precedente e il successivo di un numero naturale n è uguale a 2/3. Quanto vale n?

A 5 B 6 C 7 D 8

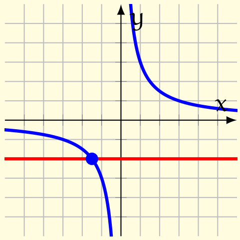
j. I grafici nella figura seguente permettono di interpretare graficamente una delle seguenti equazioni; quale?

A $\frac{2}{x} = 3$

B $\frac{3}{x} = -2$

C $\frac{2}{x} = -3$

D $\frac{3}{x} = 2$



[Tre risposte A, quattro B, due C e una D]

148 Indica la risposta corretta.

a. Le condizioni di esistenza dell'equazione $\frac{x+1}{x+3} = \frac{2x+1}{x-5}$?

A $x \neq 3$ e $x \neq 5$

B $x \neq 3$ e $x \neq -5$

C $x \neq -1$ e $x \neq 5$

D $x \neq -3$ e $x \neq 5$

b. L'insieme soluzione dell'equazione $\frac{3}{x-2} = 0$ è

A $\emptyset$ B $\{0\}$ C $\{1\}$ D $\{2\}$

c. L'equazione $\frac{2}{3}\left(1 - \frac{2}{x}\right) + \frac{3}{2}\left(1 - \frac{3}{x}\right) = 1$ è verificata se:

A $x = 0$ B $x = 1$ C $x = -5$ D $x = 5$

d. L'insieme soluzione dell'equazione $\frac{2}{x+1} = \frac{3}{x-1}$ è

A $\emptyset$ B $\{1\}$ C $\{-5\}$ D $\{5\}$

e. L'insieme soluzione dell'equazione $\frac{x-2}{x+1} = \frac{x-4}{x+3}$ è

A $\emptyset$ B $\left\{\frac{1}{2}\right\}$ C $\left\{-\frac{1}{2}\right\}$ D $\left\{\frac{3}{2}\right\}$

f. L'insieme soluzione dell'equazione $\frac{4(x-3)}{x+3} - 4 = \frac{3}{x-3}$ è

A $\left\{\frac{3}{7}\right\}$ B $\left\{-\frac{3}{7}\right\}$ C $\left\{\frac{7}{3}\right\}$ D $\left\{-\frac{7}{3}\right\}$

g. L'insieme soluzione dell'equazione $\frac{1}{x^2-3x} + \frac{1}{x^2+x} = \frac{4}{x^2-2x-3}$ è

$\boxed{A}$ $\emptyset$ $\boxed{B}$ $\{0\}$ $\boxed{C}$ $\{1\}$ $\boxed{D}$ $\{2\}$

h. L'insieme soluzione dell'equazione $\frac{x}{2x+6} = \frac{1}{2} + \frac{x+1}{x+3}$ è

$\boxed{A}$ $\left\{\frac{2}{5}\right\}$ $\boxed{B}$ $\left\{-\frac{2}{5}\right\}$ $\boxed{C}$ $\left\{\frac{5}{2}\right\}$ $\boxed{D}$ $\left\{-\frac{5}{2}\right\}$

i. L'insieme soluzione dell'equazione $\frac{x}{x+1} = \frac{2x+1}{2x+2} + \frac{3}{x^2-1}$ è

$\boxed{A}$ $\{5\}$ $\boxed{B}$ $\{-5\}$ $\boxed{C}$ $\left\{\frac{1}{5}\right\}$ $\boxed{D}$ $\left\{-\frac{1}{5}\right\}$

j. L'insieme soluzione dell'equazione $\frac{1}{x+3} + 2 = 0$ è

$\boxed{A}$ $\left\{\frac{2}{7}\right\}$ $\boxed{B}$ $\left\{-\frac{2}{7}\right\}$ $\boxed{C}$ $\left\{\frac{7}{2}\right\}$ $\boxed{D}$ $\left\{-\frac{7}{2}\right\}$

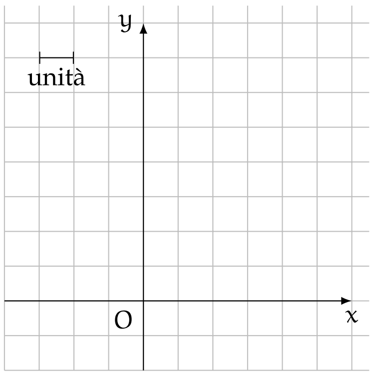
[Due risposte A, due B, due C e quattro D]

4 GEOMETRIA ANALITICA

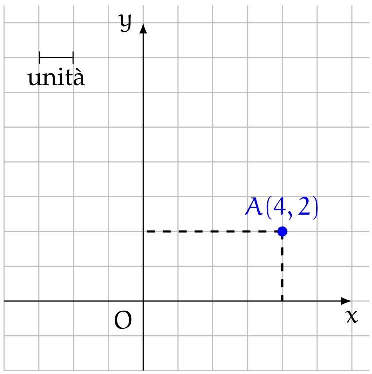
La geometria analitica permette di studiare per via algebrica oggetti geometrici (come punti, segmenti e rette) e, viceversa, di rappresentare graficamente oggetti algebrici (come numeri, equazioni e sistemi lineari).

4.1 PIANO CARTESIANO

Consideriamo sul piano due rette perpendicolari, indichiamo con O il loro punto di intersezione, fissiamo un verso di percorrenza su ciascuna retta (convenzionalmente sull'orizzontale da sinistra a destra, sulla verticale dal basso all'alto) e scegliamo un segmento arbitrario come unità di misura. Indichiamo con x la retta orizzontale, che chiamiamo *asse delle ascisse*, e con y la retta verticale, che chiamiamo *asse delle ordinate* (figura 2a).



(a) Assi cartesiani



(b) Un punto nel piano cartesiano

Figura 2: Piano cartesiano

Definizione 10. Si chiama *piano cartesiano* un piano con una coppia di rette orientate, perpendicolari, dotate di unità di misura.

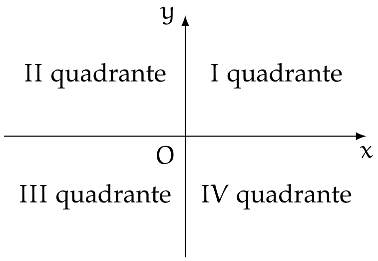


Figura 3: Quadranti del piano cartesiano

4.2 PUNTI

Ogni punto del piano cartesiano è individuato da una coppia ordinata di numeri che ne definiscono la posizione:

- la prima componente della coppia prende il nome di *ascissa* e individua lo spostamento *orizzontale* (positivo o negativo) del punto rispetto all'origine
- la seconda componente della coppia prende il nome di *ordinata* e individua lo spostamento *verticale* (positivo o negativo) del punto rispetto l'origine

Ascissa e ordinata si dicono anche *coordinate cartesiane* del punto.

Per esempio, il punto A rappresentato nella figura 2b ha coordinate $(4, 2)$: il suo spostamento rispetto all'origine è di 4 unità in orizzontale e di 2 unità in verticale.

Gli assi cartesiani dividono il piano in quattro quadranti, numerati come in figura 3. Il segno delle coordinate cartesiane indica univocamente in quale quadrante è posizionato il punto (tabella 1).

Tabella 1: Posizione di un punto nel piano cartesiano

Ascissa	Ordinata	Quadrante
$+$	$+$	I
$-$	$+$	II
$-$	$-$	III
$+$	$-$	IV

Si hanno i seguenti casi particolari:

- se l'ascissa è zero, il punto si trova sull'asse y
- se l'ordinata è zero, il punto si trova sull'asse x
- l'origine O ha coordinate $(0, 0)$

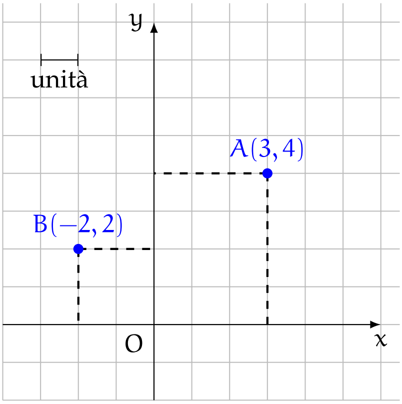


Figura 4: Due punti nel piano cartesiano

Esercizio 48. Disegna i punti A e B di coordinate $(3, 4)$ e $(-2, 2)$, rispettivamente.

Soluzione. La figura 4 mostra i punti A e B nel piano cartesiano: A è il punto di coordinate $(3, 4)$ e B è il punto di coordinate $(-2, 2)$. □

C'è una una corrispondenza biunivoca tra i punti del piano cartesiano e l'insieme delle coppie ordinate di numeri reali (x, y): a ogni punto corrisponde una coppia di numeri reali, e viceversa a ogni coppia di numeri reali corrisponde un punto. Possiamo dunque "confondere" una coppia di numeri reali con il punto corrispondente sul piano cartesiano e anzi diremo, secondo gli esempi precedenti, «A è il punto $(3, 4)$, B il punto $(-2, 2)$» invece di «A è il punto corrispondente alla coppia $(3, 4)$» o «B è il punto di coordinate $(-2, 2)$».

4.3 SEGMENTI

Definizione 11. Un *segmento* è la parte di retta delimitata da due suoi punti, detti *estremi* del segmento.

Nel piano cartesiano un segmento può essere:

- *verticale*, se i suoi estremi hanno la stessa ascissa
- *orizzontale*, se i suoi estremi hanno la stessa ordinata
- *obliquo*, se i suoi estremi non hanno né la stessa ascissa né la stessa ordinata

Per esempio, nella figura 5:

- il segmento AB è verticale, perché l'ascissa dei suoi estremi A e B è la stessa
- il segmento CD è orizzontale, perché l'ordinata dei suoi estremi C e D è la stessa
- il segmento EF, invece, è obliquo

Lunghezza di un segmento

Definizione 12. La *lunghezza di un segmento* è la distanza tra i suoi estremi.

Vogliamo determinare la lunghezza $\overline{AB}$ di un segmento AB, posto in un piano cartesiano, conoscendo le coordinate dei suoi estremi A e B.

Segmenti verticali

Se il segmento AB è verticale, posto $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$, la lunghezza $\overline{AB}$ del segmento è data dalla formula

$$\overline{AB} = |y_B - y_A| \tag{1}$$

dove $|y_B - y_A|$ è il valore assoluto delle differenza $y_B - y_A$.

Esercizio 49. Determina la lunghezza del segmento di estremi $A(2,7)$ e $B(2,3)$.

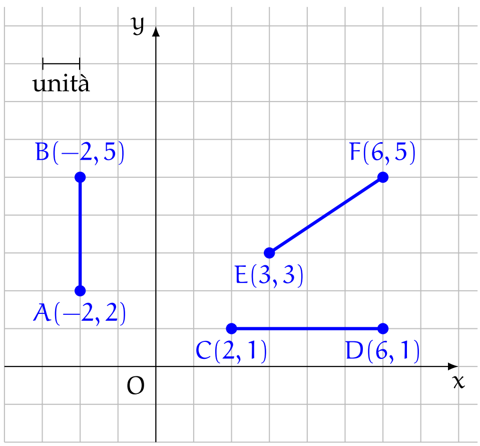


Figura 5: Il segmento AB è verticale, il segmento CD è orizzontale, il segmento EF è obliquo

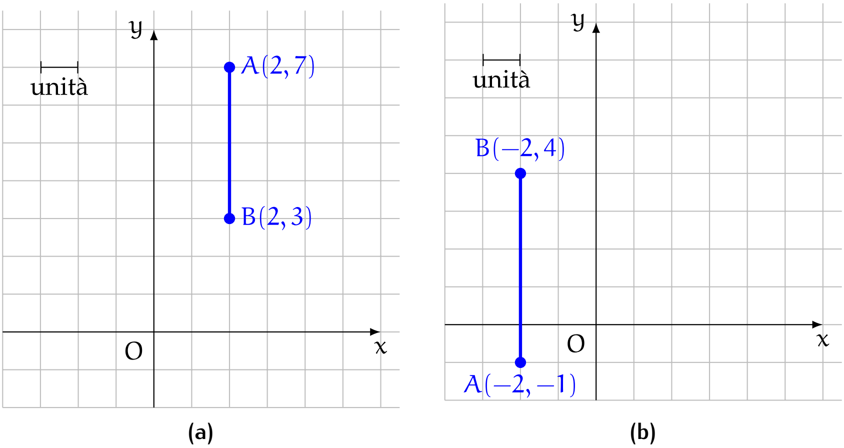


Figura 6: Lunghezza di un segmento verticale

Soluzione. Il segmento AB è rappresentato nella figura 6a. Applichiamo la formula 1 con $y_B = 3$ e $y_A = 7$:

$$\overline{AB} = |y_B - y_A| = |3 - 7| = |-4| = 4 \qquad \square$$

Esercizio 50. Determina la lunghezza del segmento di estremi $A(-2,-1)$ e $B(-2,4)$.

Soluzione. Il segmento AB è rappresentato nella figura 6b. Applichiamo la formula 1 con $y_B = 4$ e $y_A = 1$:

$$\overline{AB} = |y_B - y_A| = |4 - (-1)| = |5| = 5 \qquad \square$$

Segmenti orizzontali

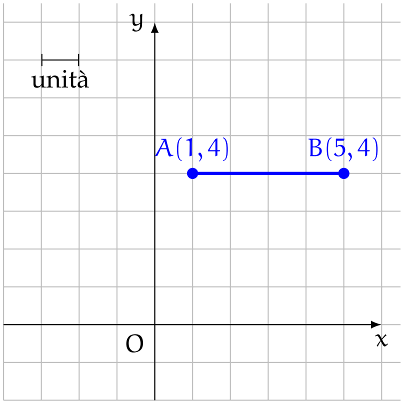
Se il segmento AB è orizzontale, posto $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$, la lunghezza $\overline{AB}$ del segmento è data dalla formula

$$\overline{AB} = |x_B - x_A| \tag{2}$$

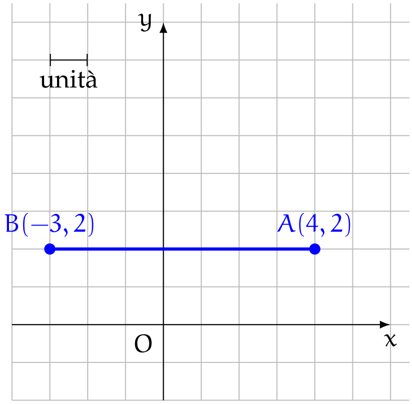
Esercizio 51. Determina la lunghezza del segmento di estremi $A(1,4)$ e $B(5,4)$.

Soluzione. Il segmento AB è rappresentato nella figura 7a. Applichiamo la formula 2, con $x_B = 5$ e $x_A = 1$:

$$\overline{AB} = |x_B - x_A| = |5 - 1| = |4| = 4 \qquad \square$$



(a)



(b)

Figura 7: Lunghezza di un segmento orizzontale

Esercizio 52. Determina la lunghezza del segmento di estremi $A(4, 2)$ e $B(-3, 2)$.

Soluzione. Il segmento AB è rappresentato nella figura 7b. Applichiamo la formula 2 con $x_B = -3$ e $x_A = 4$:

$$\overline{AB} = |x_B - x_A| = |-3 - 4| = |-7| = 7 \qquad \square$$

Segmenti obliqui

Se il segmento AB è obliquo, posto $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$, la lunghezza $\overline{AB}$ del segmento è data dalla formula

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \tag{3}$$

Esercizio 53. Determina la lunghezza del segmento AB, con $A(5, 7)$ e $B(-3, 1)$.

Soluzione. Il segmento AB è rappresentato nella figura 8a. Applichiamo la formula 3 con $x_A = 5$, $x_B = -3$, $y_A = 7$ e $y_B = 1$:

$$\overline{AB} = \sqrt{(-3 - 5)^2 + (1 - 7)^2} = \sqrt{(-8)^2 + (-6)^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10 \qquad \square$$

Cerchiamo di capire, attraverso l'esempio appena fatto, come si arriva alla formula 3. A tal fine osserviamo che il punto C di incontro delle proiezioni di A e B

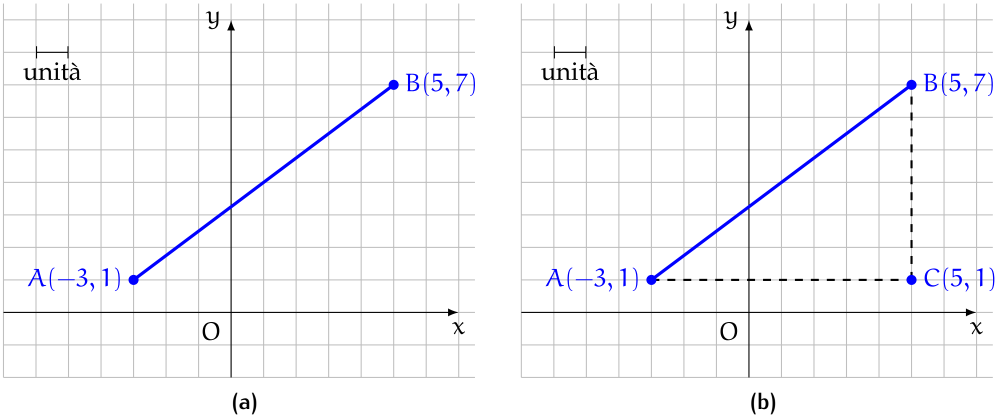


Figura 8: Lunghezza di un segmento obliquo

sugli assi è allineato orizzontalmente con A e verticalmente con B (figura 8b), per cui:

$$x_C = x_B \quad \text{e} \quad y_C = y_A$$

Poiché AC è un segmento orizzontale, si ha:

$$\overline{AC} = |x_C - x_A| = |x_B - x_A| = 8 \tag{4}$$

Poiché BC è un segmento verticale si ha:

$$\overline{BC} = |y_C - y_B| = |y_A - y_B| = 6 \tag{5}$$

Il triangolo ABC è rettangolo in C: i lati AC e BC si chiamano *cateti*, mentre il lato AB si chiama *ipotenusa*. Per il teorema di Pitagora, l'area del quadrato costruito sull'ipotenusa è uguale alla somma delle aree dei quadrati costruiti sui cateti:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 \quad \Longrightarrow \quad \overline{AB} = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2}$$

Sostituendo in quest'ultima formula le relazioni 4 e 5, si ha:

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10$$

Punto medio di un segmento

Definizione 13. Il *punto medio* di un segmento AB è il punto M del segmento che lo divide in due parti congruenti (figura 9).

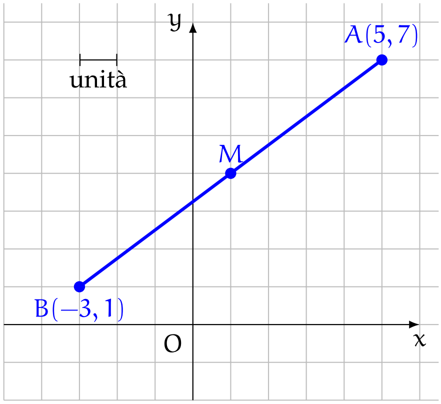


Figura 10: Punto medio di un segmento

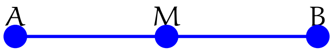


Figura 9: Punto medio di un segmento

Posto $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$, il punto medio $M = (x_M, y_M)$ del segmento AB ha coordinate date dalla formula

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \qquad y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \tag{6}$$

Esercizio 54. Determina le coordinate del punto medio del segmento di estremi $A(5, 7)$ e $B(-3, 1)$.

Soluzione. Il segmento AB è rappresentato nella figura 10. Applichiamo la formula 6 con $x_A = 5 =$, $x_B = -3$, $y_A = 7$ e $y_B = 1$:

$$x_M = \frac{5-3}{2} = 1 \qquad y_M = \frac{7+1}{2} = 4$$

per cui il punto medio M è

$$M(1, 4)$$

□

4.4 ESERCIZI

Chi non risolve esercizi non impara la matematica.

1 Dati i punti $A(5,-2)$ e $B(-1,5)$, $C(-3,-4)$ e $D(5,4)$ disegnali sul piano cartesiano e stabilisci a quale quadrante appartengono. [quarto, secondo, terzo, primo]

2 Dati i punti $A(5,3)$ e $B(-1,7)$ disegna il segmento AB e calcolane il punto medio. [$(2,5)$]

3 Dati i punti $A(-5,3)$ e $B(1,-7)$ disegna il segmento AB e calcolane il punto medio. [$(-2,-2)$]

4 Trova le coordinate dell'estremo B del segmento AB conoscendo le coordinate di $A(-5,-5)$ e del punto medio $M(1,-2)$ del segmento AB. [$(7,1)$]

5 Dati i punti $A(5,3)$ e $B(-1,-5)$ disegna il segmento AB e calcolane la lunghezza. [10]

6 Dati i punti $A(2,5)$ e $B(-4,-3)$ disegna il segmento AB e calcolane la lunghezza. [10]

7 Dati i punti $A(2,3)$ e $B(5,7)$ determina la loro distanza. [5]

8 Dati i punti $A(1,1)$, $B(4,1)$ e $C(4,5)$ disegna il triangolo ABC, classificalo e calcolane perimetro e area. [triangolo rettangolo; 12, 6]

9 Dati i punti $A(3,1)$, $B(11,1)$ e $C(7,4)$ disegna il triangolo ABC, classificalo e calcolane perimetro e area. [triangolo isoscele; 18, 12]

10 Dati i punti $A(2,3)$, $B(-3,3)$, $C(-3,-2)$ e $D(2,-2)$ disegna il quadrilatero $ABCD$, classificalo e calcolane perimetro e area. [quadrato; 20, 25]

11 Dati i punti $A(2,5)$, $B(-1,1)$, $C(2,-3)$ e $D(5,1)$ disegna il quadrilatero $ABCD$, classificalo e calcolane perimetro e area. [rombo; 20, 24]

12 Dati i punti $A(1,1)$, $B(6,1)$, $C(9,5)$ e $D(4,5)$ disegna il quadrilatero $ABCD$, classificalo e calcolane perimetro e area. [parallelogramma; 20, 20]

13 Dati i punti $A(-1,-1)$, $B(-6,-1)$, $D(-9,-5)$ e $C(-4,-5)$ disegna il quadrilatero $ABCD$, classificalo e calcolane perimetro e area. [parallelogramma; 20, 20]

14 Dati i punti $A(8,5)$, $B(4,5)$, $C(1,1)$ e $D(11,1)$ disegna il quadrilatero $ABCD$, classificalo e calcolane perimetro e area. [trapezio isoscele; 24, 28]

15 Dati i punti $A(5,5)$, $B(1,5)$, $C(1,1)$ e $D(8,1)$ disegna il quadrilatero $ABCD$, classificalo e calcolane perimetro e area. [trapezio rettangolo; 20, 22]

16 Un triangolo isoscele ABC, di base AB, ha i vertici nei punto $A(2,0)$, $B(6,2)$, mentre l'ordinata di C è 8. Trova l'ascissa di C [1/2]

17 Verifica che, congiungendo i punti medi dei lati del quadrilatero di vertici $A(-2,1)$, $B(-2,4)$, $C(2,9)$ e $D(4,1)$ si ottiene un rettangolo.

18 Sull'asse x, determina il punto P equidistante dall'origine e dal punto $(8,4)$. $[(5,0)]$

19 Sull'asse y, trova il punto P equidistante dall'origine e dal punto $(-2,5)$. $\left[\left(0,\dfrac{29}{10}\right)\right]$

20 Trova sull'asse x un punto P equidistante dai due punti $A(0,4)$ e $B(6,-4)$. $[(3,0)]$

21 Siano dati i tre vertici consecutivi di un parallelogramma: $A(11,4)$, $B(-1,-1)$, $C(5,7)$. Determina le coordinate del quarto vertice D (ricordando che AC e BD devono avere lo stesso centro). $[D(17,12)]$

22 Indica la risposta corretta.

a. Un punto nel piano cartesiano è individuato da

- A un numero
- B una coppia ordinata di numeri
- C un'equazione
- D nessuna delle risposte precedenti

b. Sia dato il segmento AB di estremi $A(2,6)$ e $B(-4,-2)$. Allora:

- A AB è contenuto nel I quadrante
- B il punto medio di AB è $(1,-2)$
- C la lunghezza di AB è 10
- D AB è un segmento verticale

c. Sia dato il segmento AB di estremi $A(1,3)$ e $B(-2,-1)$. La sua lunghezza è:

- A 3
- B 4
- C 5
- D 6

d. Sia M il punto medio del segmento AB di estremi $A(1,2)$ e $B(3,4)$. Allora M è:

- A $(4,6)$
- B $(2,3)$
- C $(4,3)$
- D $(2,6)$

e. Il perimetro del triangolo ABC di estremi $A(3,0)$, $B(0,4)$ e $C(-3,0)$ vale:

- A 10
- B 12
- C 14
- D 16

f. Il quadrilatero $ABCD$ di estremi $A(3,0)$, $B(0,4)$, $C(-3,0)$ e $D(0,-4)$ è:

- A un quadrato
- B un rettangolo
- C un rombo
- D un triangolo

g. Quale delle seguenti affermazioni è *falsa*?

- A $(-5, 0)$ si trova sull'asse x
- B $(0, -6)$ si trova sull'asse y
- C $(5, 6)$ si trova nel primo quadrante
- D $(-5, 6)$ si trova nel terzo quadrante

h. Il punto $A(-3, 4)$:

- A si trova nel secondo quadrante
- B ha ascissa positiva
- C ha ordinata negativa
- D dista 7 dall'origine

i. Il punto $A(0, -4)$:

- A dista -4 dall'origine
- B si trova sull'asse y
- C ha ascissa non nulla
- D ha ordinata nulla

j. Il quadrilatero $ABCD$ di estremi $A(0, 0)$, $B(7, 0)$, $C(10, 4)$ e $D(3, 4)$ è:

- A un quadrato
- B un rettangolo
- C un rombo
- D un parallelogramma

[Una risposta A, tre B, tre C e tre D]

5 SISTEMI LINEARI

Un'equazione del tipo

$$x + y = 3$$

ha come soluzioni tutte le coppie (x, y) che la soddisfano. Per esempio, sono soluzioni:

- $(3, 0)$, perché $3 + 0 = 3$
- $(2, 1)$, perché $2 + 1 = 3$
- $(1, 2)$, perché $1 + 2 = 3$
- $(0, 3)$, perché $0 + 3 = 3$

Non è difficile intuire che le coppie soluzione sono infinite: se infatti riscriviamo l'equazione nella forma $y = 3 - x$, basta assegnare a x un valore qualsiasi e a y l'opposto di questo valore aumentato di 3 per avere una coppia soluzione. Se però consideriamo anche l'equazione

$$x - y = 1$$

fra le infinite soluzioni della prima e le infinite soluzioni di quest'ultima può darsi che ce ne sia qualcuna in comune. In effetti, la coppia $(2, 1)$ le soddisfa entrambe:

- prima equazione: $x + y = 3 \quad \Longrightarrow \quad 2 + 1 = 3$
- seconda equazione: $x - y = 1 \quad \Longrightarrow \quad 2 - 1 = 1$

Definizione 14. Si definisce *sistema di equazioni* l'insieme di due o più equazioni che devono essere verificate contemporaneamente. L'*insieme soluzione* $\mathcal{S}$ di un sistema è formato dalle soluzioni che verificano tutte le equazioni contemporaneamente.

Per indicare un sistema si scrivono le sue equazioni all'interno di una parentesi graffa aperta. Il sistema delle due equazioni dell'esempio precedente si rappresenta così:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

e una soluzione è data dalla coppia ordinata $(2, 1)$.

Definizione 15. Il *grado di un sistema* è il prodotto dei gradi delle singole equazioni. Un sistema di primo grado si dice *lineare*.

Per esempio:

- il sistema
$$\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=1 \end{cases}$$
è lineare perché entrambe le equazioni sono lineari

- il sistema
$$\begin{cases} y=x^2 \\ y=x \end{cases}$$
è di grado 2 perché la prima equazione ha grado 2, mentre la seconda ha grado 1

- il sistema
$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y=x^2 \end{cases}$$
è di grado 4 perché entrambe le equazioni sono di secondo grado

5.1 SISTEMI DETERMINATI, INDETERMINATI, IMPOSSIBILI

Ci sono sistemi che hanno un numero finito di soluzioni. Un esempio è il sistema presentato all'inizio del capitolo che, come avremo modo di vedere, è verificato solo dalla coppia $(2,1)$. Invece un sistema come

$$\begin{cases} x+y=3 \\ x+y=1 \end{cases}$$

non ha soluzione, perché $x+y$ non può essere uguale contemporaneamente a 1 e a 3, mentre il sistema
$$\begin{cases} x+y=3 \\ 2x+2y=6 \end{cases}$$

ha infinite soluzioni, perché le due equazioni sono equivalenti (se dividi per 2 la seconda equazione ottieni la prima), per cui tutte le infinite coppie che soddisfano la prima equazione soddisfano anche la seconda.

Analogamente a quanto abbiamo fatto per le equazioni, diciamo allora che un sistema è:

- *determinato* se ha un numero finito di soluzioni
- *impossibile* se non ha soluzioni
- *indeterminato* se ha infinite soluzioni

5.2 PRINCIPI DI EQUIVALENZA

Definizione 16. Diciamo che due sistemi sono *equivalenti* se hanno le stesse soluzioni.

Per risolvere un sistema si cerca di passare a un altro a esso equivalente ma di forma più semplice. Per fare ciò ci vengono in aiuto due principi di equivalenza.

Principio 1 (Primo principio di equivalenza)**.** Se in un sistema si sostituisce a un'incognita la sua espressione ricavata da un'altra equazione, si ottiene un sistema equivalente a quello dato.

Principio 2 (Secondo principio di equivalenza)**.** Se in un sistema si sommano membro a membro le sue equazioni e si sostituisce a una di esse l'equazione ottenuta, si ottiene un sistema equivalente a quello dato.

Consideriamo per esempio il sistema

$$\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=1 \end{cases}$$

e ricaviamo l'espressione dell'incognita y dalla prima equazione:

$$y=3-x$$

Per il primo principio possiamo sostituire questa espressione al posto di y nella seconda equazione. Il sistema che si ottiene dalla prima equazione riscritta nella forma $y=3-x$ e dalla seconda dopo la sostituzione è:

$$\begin{cases} y=3-x \\ x-(3-x)=1 \end{cases}$$

e, per il primo principio, possiamo dire che questo sistema è equivalente a quello dato.

Consideriamo sempre il sistema

$$\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=1 \end{cases}$$

Se sommiamo membro a membro le due equazioni otteniamo:

$$(x+y)+(x-y)=3+1$$

Associamo ora all'equazione ottenuta una qualunque delle due del sistema, per esempio la prima:

$$\begin{cases} x+y=3 \\ (x+y)+(x-y)=3+1 \end{cases}$$

Per il secondo principio, il sistema ottenuto ha le stesse soluzioni di quello dato.

Il secondo principio permette anche di sottrarre membro a membro le due equazioni: infatti ciò equivale a cambiare i segni di una delle due equazioni e poi a sommarle.

5.3 RISOLUZIONE DEI SISTEMI LINEARI

In questo paragrafo ci occupiamo della risoluzione dei sistemi lineari, in cui tutte le equazioni sono lineari. In particolare, affrontiamo la risoluzione dei sistemi di due equazioni in due incognite. La forma tipica di un sistema di questo tipo, che si dice *forma normale*, è la seguente:

$$\begin{cases} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{cases}$$

con a, b, c, d, e, f numeri non tutti contemporaneamente nulli.

Un sistema lineare, se è determinato, ha sempre una sola soluzione. Trovarla significa individuare, se esiste, la coppia ordinata di numeri (x, y) che soddisfa il sistema. Possiamo quindi ritenere di averlo risolto se, applicando i principi di equivalenza, riusciamo a trasformare le sue equazioni fino ad arrivare a scrivere

$$\begin{cases} x=k \\ y=h \end{cases}$$

In questo caso diciamo che la coppia soluzione è (k, h). Vediamo ora i principali metodi di risoluzione mediante alcuni esempi.

Metodo di sostituzione

Questo metodo è conseguenza diretta dell'applicazione del primo principio.

Esercizio 55. Risolvi il sistema $\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=1 \end{cases}$ con il metodo di sostituzione.

Soluzione.

- Ricaviamo l'espressione di x oppure di y da una delle due equazioni. Per esempio, ricaviamo y dalla prima equazione:

$$\begin{cases} y=3-x \\ x-y=1 \end{cases}$$

- Applichiamo il primo principio:

$$\begin{cases} y = 3 - x \\ x - (3 - x) = 1 \end{cases}$$

Il vantaggio che deriva dall'applicazione di questo principio è evidente: la seconda equazione contiene ora la sola incognita x e si può risolvere rispetto a questa variabile.

- Svolgiamo i calcoli e risolviamo l'equazione in x:

$$\begin{cases} y = 3 - x \\ x - 3 + x = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} y = 3 - x \\ 2x = 4 \end{cases} \implies \begin{cases} y = 3 - x \\ x = 2 \end{cases}$$

- Applichiamo ancora il primo principio sostituendo l'espressione trovata alla x nella prima equazione:

$$\begin{cases} y = 3 - 2 \\ x = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} y = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Abbiamo così trovato la soluzione del sistema. L'insieme $\mathcal{S}$ delle soluzioni è quindi

$$\mathcal{S} = \{\, (2, 1)\, \}$$ □

Esercizio 56. Risolvi il sistema $\begin{cases} x - 3y = 0 \\ x + y = 4 \end{cases}$ con il metodo di sostituzione.

Soluzione. La cosa più conveniente è ricavare la variabile x dalla prima equazione e sostituire la sua espressione nella seconda:

$$\begin{cases} x = 3y \\ x + y = 4 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 3y \\ 3y + y = 4 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 3y \\ 4y = 4 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 3y \\ y = 1 \end{cases}$$

Sostituiamo il risultato trovato alla y nella prima equazione:

$$\begin{cases} x = 3 \cdot 1 \\ y = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni è dunque

$$\mathcal{S} = \{\, (3, 1)\, \}$$ □

Metodo di riduzione

Questo metodo consiste nel sommare (o sottrarre) opportunamente le due equazioni, applicando il secondo principio, in modo da eliminare una delle variabili da ciascuna equazione.

Esercizio 57. Risolvi il sistema $\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=1 \end{cases}$ con il metodo di riduzione.

Soluzione.

- Eliminiamo la variabile y sommando membro a membro le due equazioni:

$$(x+y)+(x-y)=3+1 \implies x+y+x-y=4 \implies 2x=4 \implies x=2$$

- Associamo ora all'equazione ottenuta una qualunque delle due del sistema, per esempio la prima:

$$\begin{cases} x+y=3 \\ x=2 \end{cases}$$

- Per completare la risoluzione del sistema procediamo per sostituzione, sostituendo il valore di x trovato nella prima equazione e risolviamo:

$$\begin{cases} 2+y=3 \\ x=2 \end{cases} \implies \begin{cases} y=3-2 \\ x=2 \end{cases} \implies \begin{cases} y=1 \\ x=2 \end{cases} \implies \mathcal{S}=\{(2,1)\}$$

□

Esercizio 58. Risolvi il sistema $\begin{cases} x-3y=0 \\ x+y=4 \end{cases}$ con il metodo di riduzione.

Soluzione. Eliminiamo la variabile x sottraendo membro a membro le due equazioni:

$$(x-3y)-(x+y)=0-4 \implies x-3y-x-y=-4 \implies -4y=-4 \implies y=1$$

da cui

$$\begin{cases} x=3y \\ y=1 \end{cases} \implies \begin{cases} x=3\cdot 1 \\ y=1 \end{cases} \implies \begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases} \implies \mathcal{S}=\{(3,1)\}$$ □

Metodo del confronto

Questo metodo è un'applicazione del primo principio di equivalenza.

Esercizio 59. Risolvi il sistema $\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=1 \end{cases}$ con il metodo del confronto.

Soluzione.

- Ricaviamo l'espressione della stessa variabile, la x o la y, in entrambe le equazioni. Per esempio ricaviamo l'espressione di x:

$$\begin{cases} x = 3 - y \\ x = 1 + y \end{cases}$$

- Confrontiamo le due espressioni di x trovate:

$$3 - y = 1 + y$$

Quella ottenuta è un'equazione in una sola incognita. Risolviamola:

$$-2y = -2 \quad \Longrightarrow \quad y = 1$$

- Associamo ora all'equazione ottenuta una qualunque delle due del sistema, per esempio la prima:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ y = 1 \end{cases}$$

- Per completare la risoluzione del sistema procediamo per sostituzione, sostituendo il valore di y trovato nella prima equazione e risolviamo:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ y = 1 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x + 1 = 3 \\ y = 1 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{S} = \{(2, 1)\} \quad \square$$

Esercizio 60. Risolvi il sistema $\begin{cases} x - 3y = 0 \\ x + y = 4 \end{cases}$ con il metodo del confronto.

Soluzione. La cosa più conveniente è ricavare la variabile x da entrambe le equazioni;

$$\begin{cases} x = 3y \\ x = 4 - y \end{cases}$$

Confrontiamo le due espressioni di x trovate:

$$3y = 4 - y \quad \Longrightarrow \quad 4y = 4 \quad \Longrightarrow \quad y = 1$$

da cui

$$\begin{cases} x = 3y \\ y = 1 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = 3 \cdot 1 \\ y = 1 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{S} = \{(3, 1)\} \quad \square$$

Metodo di Cramer

Il metodo di Cramer (dal nome del matematico svizzero Gabriel Cramer) permette di risolvere un qualunque sistema lineare in modo meccanico. Per usare questo metodo, il sistema deve essere scritto nella sua forma normale.

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

In questo caso, i coefficienti delle variabili si possono raggruppare in una tabella bidimensionale in questo modo:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix}$$

dove nella prima colonna abbiamo messo i coefficienti della variabile x e nella seconda i coefficienti della variabile y.

A una tabella di questo tipo si dà il nome di *matrice*, e poiché essa possiede due righe e due colonne si parla di *matrice quadrata di ordine due*. In una matrice di questo tipo si individuano due diagonali: quella dei termini a ed e è la *diagonale principale*, mentre quella dei termini b e d è la *diagonale secondaria*.

A ogni matrice quadrata come questa si può associare un numero che si chiama *determinante*, indicato con $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}$, che si calcola facendo il prodotto dei termini sulla diagonale principale e sottraendogli il prodotto dei termini sulla diagonale secondaria:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} = ae - bd$$

Consideriamo ora la matrice che otteniamo da quella dei coefficienti sostituendo la prima colonna, quella dei coefficienti di x, con la colonna dei termini noti delle equazioni del sistema:

$$\begin{bmatrix} c & b \\ f & e \end{bmatrix}$$

Il suo determinante, che indichiamo con Δx, è dato da:

$$\Delta x = \begin{vmatrix} c & b \\ f & e \end{vmatrix} = ce - bf$$

Infine consideriamo la matrice che otteniamo da quella dei coefficienti sostituendo la colonna dei coefficienti di y con quella dei termini noti delle due equazioni del sistema:

$$\begin{bmatrix} a & c \\ d & f \end{bmatrix}$$

Il suo determinante, che indichiamo con Δy, è dato da:

$$\Delta y = \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} = af - cd$$

Si può dimostrare che:

- se $\Delta \neq 0$, il sistema è *determinato* e la sua soluzione è la coppia $\left(\frac{\Delta x}{\Delta}, \frac{\Delta y}{\Delta}\right)$:

$$\begin{cases} x = \dfrac{\Delta x}{\Delta} \\ y = \dfrac{\Delta y}{\Delta} \end{cases} \quad \text{che corrisponde a} \quad \begin{cases} x = \dfrac{ce - bf}{ae - bd} \\ y = \dfrac{af - cd}{ae - bd} \end{cases}$$

- se $\Delta = 0$, il sistema non è determinato ed è:
  - *indeterminato* se $\Delta x = 0$ e $\Delta y = 0$
  - *impossibile* se $\Delta x \neq 0$ oppure $\Delta y \neq 0$

Il metodo di Cramer, in quanto segue uno schema preciso, si presta bene alla costruzione di algoritmi per risolvere sistemi lineari in modo automatico, con strumenti informatici.

Esercizio 61. Risolvi il sistema $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$ con il metodo di Cramer.

Soluzione. Calcoliamo i tre determinanti:

- determinante della matrice dei coefficienti:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 = -1 - 1 = -2$$

  e poiché $\Delta \neq 0$ il sistema è determinato.

- determinante della matrice che si ottiene da quella dei coefficienti sostituendo la colonna dei coefficienti di x con quella dei termini noti:

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 = -3 - 1 = -4$$

- determinante della matrice che si ottiene da quella dei coefficienti sostituendo la colonna dei coefficienti di y con quella dei termini noti:

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 3 \cdot 1 = 1 - 3 = -2$$

Il sistema ha quindi soluzione:

$$\begin{cases} x = \dfrac{\Delta x}{\Delta} = \dfrac{-4}{-2} = 2 \\ y = \dfrac{\Delta y}{\Delta} = \dfrac{-2}{-2} = 1 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{S} = \{\, (2, 1) \,\}$$ $\square$

Esercizio 62. Risolvi il sistema $\begin{cases} x - 3y = 0 \\ x + y = 4 \end{cases}$ con il metodo di Cramer.

Soluzione. Calcoliamo i tre determinanti:

- $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - (-3) \cdot 1 = 1 + 3 = 4$ e poiché $\Delta \neq 0$ il sistema è determinato
- $\Delta x = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot 1 - (-3) \cdot 4 = 0 + 12 = 12$
- $\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 0 \cdot 1 = 4 - 0 = 4$

Il sistema ha quindi soluzione:

$$\begin{cases} x = \dfrac{\Delta x}{\Delta} = \dfrac{12}{4} = 3 \\ y = \dfrac{\Delta y}{\Delta} = \dfrac{4}{4} = 1 \end{cases} \implies \mathcal{S} = \{ (3, 1) \}$$

□

Esercizio 63. Risolvi il sistema $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + 4y = 1 \end{cases}$ con il metodo di Cramer.

Soluzione.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0$$

Questa volta $\Delta = 0$, quindi il sistema non è determinato. Per decidere se è indeterminato o impossibile calcoliamo Δx: se troviamo che $\Delta x = 0$ dobbiamo calcolare anche Δy; se troviamo che $\Delta x \neq 0$ possiamo subito concludere che il sistema è impossibile:

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 2 = 2$$

Il sistema è quindi impossibile. □

Esercizio 64. Risolvi il sistema $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 4x + 2y = 2 \end{cases}$

Soluzione.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0$$

Il sistema non è determinato. Calcoliamo Δx e, se è uguale a zero, calcoliamo anche Δy:

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 2 = 0 \qquad \Delta y = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0$$

Essendo $\Delta = 0$ e $\Delta x = \Delta y = 0$, il sistema è indeterminato. □

Metodo grafico

Oltre ai metodi algebrici visti fin qui, per risolvere un sistema lineare si può adottare anche il metodo grafico, meno pratico, ma utile per capire cosa rappresenta un sistema lineare. Introduciamo alcuni concetti, che riprenderemo nella classe terza.

Funzioni

Definizione 17. Dati due insiemi A e B, una *funzione* f di *dominio* A e *codominio* B è una relazione che associa a ogni elemento di A uno e un solo elemento di B.

Una funzione specifica in che modo gli elementi del primo insieme, che vengono di solito indicati con x, sono legati a quelli del secondo, che vengono di solito indicati con y.

Se A e B sono insiemi numerici, spesso la funzione che associa gli $x \in A$ agli $y \in B$ si esprime mediante un'espressione di tipo matematico. Per esempio, per indicare che l'elemento y è il doppio dell'elemento x diminuito di 4 si scrive $y = 2x - 4$.

Funzioni lineari

Una funzione si dice *lineare* se è definita da un'equazione del tipo:

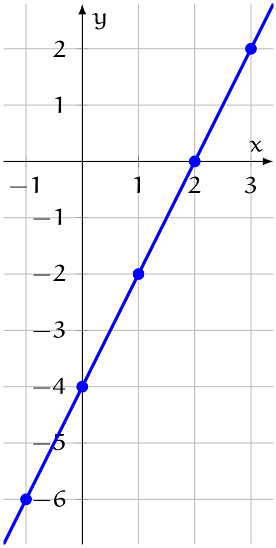
$$y = mx + q$$

Il grafico di una funzione lineare è una retta. Per disegnarla basta determinare alcuni suoi punti (in linea di principio ne bastano due, poiché una retta è univocamente individuata da due suoi punti) e tracciare la retta che passa per essi.

Esercizio 65. Traccia per punti il grafico della funzione $y = 2x - 4$.

Soluzione. Per determinare alcuni punti del grafico della funzione diamo dei valori a scelta alla variabile x e calcoliamo i corrispondenti valori di y. Per esempio, sostituendo 3 al posto di x nell'equazione $y = 2x - 4$ otteniamo:

$$y = 2 \cdot 3 - 4 = 2$$



(a) Grafico

x	$y = 2x - 4$
-1	-6
0	-4
1	-2
2	0
3	2

(b) Alcuni valori

Figura 11: La funzione $y = 2x - 4$

Attribuendo a x i valori -1, 0, 1, 2 e 3 otteniamo la tabella 11b. Rappresentando i punti corrispondenti e congiungendoli otteniamo la retta che costituisce il grafico di $y = 2x - 4$ (figura 11a). □

Esercizio 66. Traccia per punti il grafico della funzione $y = -x + 2$.

Soluzione. La figura 12 mostra il grafico della funzione. □

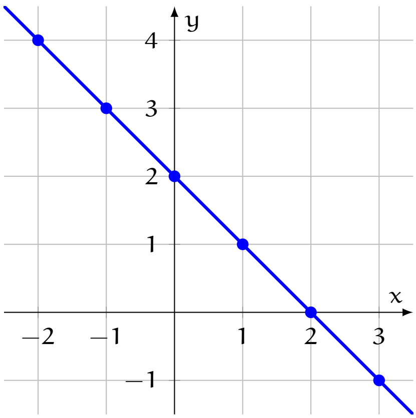
Posizione reciproca di due rette

Sappiamo dalla geometria euclidea che due rette r e s del piano possono essere:

- *incidenti*, se hanno in comune uno e un solo punto
- *parallele distinte*, se non hanno punti d'intersezione
- *coincidenti*

Dal punto di vista della geometria analitica, date due rette di equazioni assegnate, per discutere la loro posizione reciproca si considera il sistema delle loro equazioni:

- se il sistema è *determinato* le due rette sono incidenti e le coordinate del loro punto d'intersezione sono date dalla soluzione del sistema
- se il sistema è *impossibile* le due rette sono parallele distinte



(a) Grafico

x	$y = -x + 2$
-2	4
-1	3
0	2
1	1
2	0
3	-1

(b) Alcuni valori

Figura 12: La funzione $y = -x + 2$

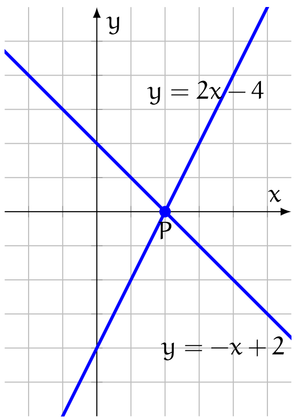


Figura 13: Le rette sono incidenti e $P(2, 0)$ è il loro punto di intersezione

- se il sistema è *indeterminato* le due rette sono coincidenti

Per risolvere graficamente un sistema si tracciano, nel piano cartesiano, le due rette che rappresentano le equazioni del sistema.

Sistemi determinati

Mostriamo con un esempio che, se il sistema è determinato, le due rette si incontrano in un punto, le cui coordinate costituiscono l'unica soluzione del sistema.

Esercizio 67. Risolvi graficamente il sistema $\begin{cases} y = 2x - 4 \\ y = -x + 2 \end{cases}$

Soluzione. Le due rette sono incidenti e $P(2,0)$ è il loro punto di intersezione (figura 13). □

Sistemi impossibili

Vediamo un esempio di sistema impossibile.

Esercizio 68. Risolvi graficamente il sistema $\begin{cases} y = 2x - 4 \\ y = 2x \end{cases}$

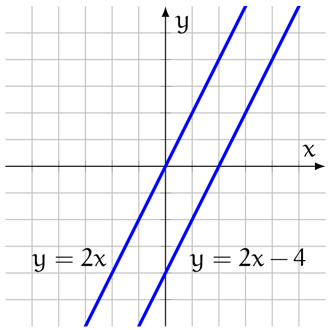


Figura 14: Le rette sono parallele distinte e il sistema è impossibile

Soluzione. Le rette sono parallele distinte e il sistema è impossibile (figura 14). □

Sistemi indeterminati

Vediamo un esempio di sistema indeterminato.

Esercizio 69. Risolvi graficamente il sistema $\begin{cases} y = 2x - 4 \\ y = 2x - 4 \end{cases}$

Soluzione. Le rette sono coincidenti e il sistema è indeterminato (figura 15). □

5.4 PROBLEMI CHE SI RISOLVONO CON I SISTEMI

Sappiamo che le equazioni servono, fra l'altro, a risolvere problemi. Ci sono problemi che si possono risolvere con un'equazione in una sola incognita, ma ci sono anche problemi in cui si hanno due o più incognite. È importante capire che

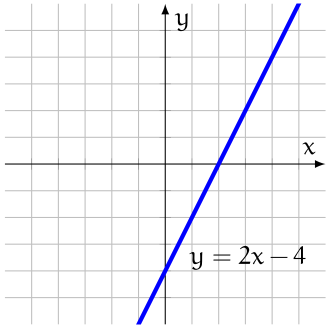


Figura 15: Le rette sono coincidenti e il sistema è indeterminato

il numero di equazioni che formalizzano il problema deve essere pari al numero di incognite, altrimenti il problema non è, in genere, determinato.

Valgono le considerazioni fatte a proposito della risoluzione dei problemi. È quindi indispensabile:

- individuare con precisione l'obiettivo del problema
- scrivere in modo completo i dati
- individuare il campo di variabilità delle incognite e, una volta trovati i loro valori, stabilirne l'accettabilità

Esercizio 70. Un tappezziere deve ricoprire una parete rettangolare con della carta da parati che costa 35 € al metro quadrato. Il committente gli comunica che il doppio di una dimensione è uguale al triplo dell'altra e che il perimetro della figura è lungo 20 m. Qual è l'importo della spesa del materiale che il tappezziere deve inserire nel preventivo?

Soluzione. Per calcolare il costo del materiale dobbiamo conoscere la misura dell'area del rettangolo e quindi dobbiamo determinare le lunghezze dei lati $x > 0$ e $y > 0$.

- La prima informazione ci dice che:

$$2x = 3y$$

- La seconda ci dice che:

$$2(x + y) = 20 \qquad \Longrightarrow \qquad x + y = 10$$

Poiché siamo riusciti a scrivere due equazioni, pari al numero di incognite che abbiamo posto, possiamo formalizzare il problema con il sistema

$$\begin{cases} 2x = 3y \\ x + y = 10 \end{cases}$$

Risolvendolo si ottiene:

$$\begin{cases} 2x = 3(10-x) \\ y = 10 - x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x = 30 - 3x \\ y = 10 - x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 5x = 30 \\ y = 10 - x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 4 \end{cases}$$

Poiché questi due valori soddisfano le limitazioni $x > 0$ e $y > 0$, possiamo dire che i lati del rettangolo sono di $6\,\mathrm{m}$ e $4\,\mathrm{m}$. L'area cercata è quindi $(6 \cdot 4)\,\mathrm{m}^2 = 24\,\mathrm{m}^2$ e il costo del materiale è $24 \cdot 35\,€ = 840\,€$. □

Esercizio 71. Il sig. Rossi ha due terreni che complessivamente hanno una superficie di $45\,000\,\mathrm{m}^2$. Il Comune gli fa sapere che, per far passare dei cavi elettrici, deve espropriare il 2% della superficie del primo terreno e il 3% della superficie del secondo, per un totale di $1000\,\mathrm{m}^2$. Quali sono le superfici di ciascuno dei due terreni rimaste di proprietà?

Soluzione. Riscriviamo i dati in modo schematico:

- superficie complessiva dei due terreni: $45\,000\,\mathrm{m}^2$
- parte espropriata del primo terreno: 2%
- parte espropriata del secondo terreno: 3%
- superficie totale espropriata: $1000\,\mathrm{m}^2$

L'obiettivo del problema è determinare le superfici rimaste al sig. Rossi di ciascuno dei due appezzamenti. Poiché non sappiamo qual è la superficie iniziale dei due terreni e i dati sull'esproprio si riferiscono a esse, conviene indicare con x e y tali superfici. Essendo misure di aree, deve essere $x > 0$ e $y > 0$. Avendo introdotto due incognite dobbiamo trovare due equazioni in queste incognite da scrivere in un sistema.

- La prima informazione ci permette di scrivere la prima equazione:

$$x + y = 45\,000$$

- Per trovare la seconda equazione ragioniamo così: la parte espropriata del primo terreno è $2x/100$, la parte espropriata del secondo è $3y/100$ e in totale sono stati espropriati $1000\,\mathrm{m}^2$, quindi la seconda equazione è:

$$\frac{2}{100}x + \frac{3}{100}y = 1000$$

che, moltiplicando per 100 possiamo scrivere nella forma

$$2x + 3y = 100\,000$$

Il sistema che è modello del problema è dunque il seguente:

$$\begin{cases} x + y = 45\,000 \\ 2x + 3y = 100\,000 \end{cases}$$

Risolvendolo si ottiene:

$$\begin{cases} x = 45\,000 - y \\ 2(45\,000 - y) + 3y = 100\,000 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 45\,000 - y \\ y = 10\,000 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 35\,000 \\ y = 10\,000 \end{cases}$$

Le superfici iniziali dei due terreni sono quindi $35\,000\,\mathrm{m}^2$ e $10\,000\,\mathrm{m}^2$, per cui:

- la parte rimasta del primo terreno è il $(100 - 2)\% = 98\%$ della superficie iniziale, cioè $\dfrac{98}{100} \cdot 35\,000\,\mathrm{m}^2 = 34\,300\,\mathrm{m}^2$
- la parte rimasta del secondo terreno è il $(100 - 3)\% = 97\%$ della superficie iniziale, cioè $\dfrac{97}{100} \cdot 10\,000\,\mathrm{m}^2 = 9700\,\mathrm{m}^2$ □

5.5 ESERCIZI

Chi non risolve esercizi non impara la matematica.

Risolvi i seguenti sistemi con il metodo di sostituzione.

1 $\begin{cases} x = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$ [(1, 0)]

2 $\begin{cases} y = x \\ 2x - y + 2 = 0 \end{cases}$ [(−2, −2)]

3 $\begin{cases} 2y = 2 \\ x + y = 1 \end{cases}$ [(0, 1)]

4 $\begin{cases} 3x + y = 2 \\ x + 2y = -1 \end{cases}$ [(1, −1)]

5 $\begin{cases} x + 2y = 14 \\ 3x - y = 7 \end{cases}$ [(4, 5)]

6 $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ -2x - 4y = 2 \end{cases}$ [impossibile]

7 $\begin{cases} x - y = 0 \\ -2x + 3y = 1 \end{cases}$ [(1, 1)]

8 $\begin{cases} 2x = 3 - x \\ 2x + y = 3 \end{cases}$ [(1, 1)]

9 $\begin{cases} x = 2 \\ x + y = 3 \end{cases}$ [(2, 1)]

10 $\begin{cases} y = -x + 1 \\ 2x + 3y + 4 = 0 \end{cases}$ [(7, −6)]

Risolvi i seguenti sistemi con il metodo di riduzione.

11 $\begin{cases} x + y = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases}$ [(0, 0)]

12 $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 2x - y = -1 \end{cases}$ [(0, 1)]

13 $\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = -2 \end{cases}$ [(−1, 1)]

14 $\begin{cases} 5y + 2x = 1 \\ 3x + 2y + 4 = 0 \end{cases}$ [(−2, 1)]

15 $\begin{cases} -3x + y = 2 \\ 5x - 2y = 7 \end{cases}$ [(−11, −31)]

16 $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2y - 3x = 1 \end{cases}$ [(1, 2)]

17 $\begin{cases} x + y = 2 \\ -x - y = 2 \end{cases}$ [impossibile]

18 $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 4x - 2y = 8 \end{cases}$ [indeterminato]

19 $\begin{cases} 5x + 2y = -2 \\ 3x - 2y = 2 \end{cases}$ [(0, −1)]

20 $\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ x + 4y = 8 \end{cases}$ [(0, 2)]

Risolvi i seguenti sistemi con il metodo del confronto.

21 $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$ [(2, −1)]

22 $\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = 2x \end{cases}$ [impossibile]

23 $\begin{cases} 3x = y - 1 \\ 3y = x + 3 \end{cases}$ [(0, 1)]

24 $\begin{cases} x + y = -1 \\ x - y = 5 \end{cases}$ [(2, −3)]

25 $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 2x - y = -1 \end{cases}$ [(0, 1)]

26 $\begin{cases} 2x - y + 5 = 0 \\ -x - y + 2 = 0 \end{cases}$ [(−1, 3)]

27 $\begin{cases} x + y - 7 = 0 \\ x - y - 3 = 0 \end{cases}$ [(5, 2)]

28 $\begin{cases} x + 2y - 14 = 0 \\ 2y + x + 2 = 0 \end{cases}$ [impossibile]

29 $\begin{cases} x+2y=5 \\ 3x-y=1 \end{cases}$ $[(1,2)]$

30 $\begin{cases} 22x-4y=24 \\ x+y=7 \end{cases}$ $[(2,5)]$

Risolvi i seguenti sistemi con la regola di Cramer.

31 $\begin{cases} x-3y=2 \\ x-2y=2 \end{cases}$ $[(2,0)]$

32 $\begin{cases} 2x+2y=3 \\ 3x-3y=2 \end{cases}$ $\left[\left(\frac{13}{12},\frac{5}{12}\right)\right]$

33 $\begin{cases} 3x+y=-3 \\ -2x+3y=2 \end{cases}$ $[(-1,0)]$

34 $\begin{cases} 6x-2y=5 \\ 2x+y=0 \end{cases}$ $\left[\left(\frac{1}{2},-1\right)\right]$

35 $\begin{cases} 10x-20y=-11 \\ x+y-1=0 \end{cases}$ $\left[\left(\frac{3}{10},\frac{7}{10}\right)\right]$

36 $\begin{cases} 2x-3y+1=0 \\ 4x+6y=0 \end{cases}$ $\left[\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{6}\right)\right]$

37 $\begin{cases} x+2y=1 \\ 2x+4y=1 \end{cases}$ [impossibile]

38 $\begin{cases} 3x+2y=4 \\ 6x+4y=8 \end{cases}$ [indeterminato]

39 $\begin{cases} 2x-4y=0 \\ x+7y=9 \end{cases}$ $[(2,1)]$

40 $\begin{cases} 5x-2y=7 \\ 5y-3x=11 \end{cases}$ $[(3,4)]$

Risolvi i seguenti sistemi con il metodo che preferisci.

41 $\begin{cases} x-2y=3 \\ 4x+8y=12 \end{cases}$ $[(3,0)]$

42 $\begin{cases} x-2y=3 \\ 2x-4y=5 \end{cases}$ [impossibile]

43 $\begin{cases} x-2y=3 \\ 2x-6y=12 \end{cases}$ $[(-3,-3)]$

44 $\begin{cases} \frac{1}{2}x-\frac{3}{2}y=-2 \\ \frac{5}{4}x-\frac{15}{4}y=-\frac{5}{2} \end{cases}$ [impossibile]

45 $\begin{cases} x-y=3 \\ -x+y=1 \end{cases}$ [impossibile]

46 $\begin{cases} \frac{x}{2}=-\frac{y}{2}+1 \\ x+y=2 \end{cases}$ [indeterminato]

47 $\begin{cases} 2x=1+3y \\ -y-2x=3 \end{cases}$ $[(-1,-1)]$

48 $\begin{cases} -x+2y=-1 \\ 3x-y=3 \end{cases}$ $[(1,0)]$

49 $\begin{cases} x+2y=3 \\ 3x-y=2 \end{cases}$ $[(1,1)]$

50 $\begin{cases} 2x-y=1 \\ x+2y=3 \end{cases}$ $[(1,1)]$

51 $\begin{cases} 3x-y=5 \\ x-2y=5 \end{cases}$ $[(1,-2)]$

52 $\begin{cases} 3x-2y=2 \\ 2y-2x=-\frac{4}{3} \end{cases}$ $\left[\left(\frac{2}{3},0\right)\right]$

53 $\begin{cases} \frac{1}{3}x-\frac{3}{2}y+1=0 \\ 9y-2x-6=0 \end{cases}$ [indeterminato]

54 $\begin{cases} -\frac{2}{3}y+3x=y \\ x-\frac{1}{2}y+3=0 \end{cases}$ $[(-30,-54)]$

55 $\begin{cases} 5y+\frac{3}{2}x=-2 \\ 3x+10y-3=0 \end{cases}$ [impossibile]

56 $\begin{cases} 2x+y=0 \\ x-2y=-5 \end{cases}$ $[(-1,2)]$

57 $\begin{cases} 2x+2y=6 \\ x-2y=-3 \end{cases}$ $[(1,2)]$

58 $\begin{cases} \frac{1}{3}x+3y+2=0 \\ 2x+\frac{1}{2}y=\frac{11}{2} \end{cases}$ $[(3,-1)]$

59 $\begin{cases} 2x-y=3 \\ x-2y=0 \end{cases}$ $[(2,1)]$

60 $\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = 1 \\ \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y = 1 \end{cases}$ $[(1,1)]$

61 $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 4x + \frac{1}{2}y = \frac{5}{2} \end{cases}$ $\left[\left(\frac{1}{2}, 1\right)\right]$

62 $\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ 4x + 2y + 6 = 0 \end{cases}$ [impossibile]

63 $\begin{cases} 2x - y = -1 \\ x + \frac{1}{2}y = -\frac{1}{2} \end{cases}$ $\left[\left(-\frac{1}{2}, 0\right)\right]$

64 $\begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y = 1 \\ 3x - 2y = 3 \end{cases}$ [impossibile]

65 $\begin{cases} \frac{x+4y}{6} - 3 = 0 \\ \frac{x}{2} - \frac{y}{4} = 0 \end{cases}$ $[(2,4)]$

66 $\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 4y - 6x = -2 \end{cases}$ [indeterminato]

67 $\begin{cases} 2x - 3y = 2 \\ 6x - 9y = 6 \end{cases}$ [indeterminato]

68 $\begin{cases} x + 4y - 1 = 3 \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + 1 = -\frac{x}{6} - 1 \end{cases}$ $[(-4,2)]$

69 $\begin{cases} \frac{x-4y}{3} = x - 5y \\ x - 2 = 6y + 4 \end{cases}$ $[(-66,-12)]$

70 $\begin{cases} \frac{2}{3}x - y + \frac{1}{3} = 0 \\ x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3} = 0 \end{cases}$ $\left[\left(-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right)\right]$

71 $\begin{cases} \frac{1}{2}y - \frac{2}{3}y = 2 \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y = 1 \end{cases}$ $[(21,-12)]$

72 $\begin{cases} y - \frac{3x-4}{2} = 1 - \frac{y}{4} \\ 2y - 2x = -\frac{4}{3} \end{cases}$ $\left[\left(\frac{2}{3}, 0\right)\right]$

73 $\begin{cases} 3x + y = 2 \\ 3x - y = 0 \end{cases}$ $\left[\left(\frac{1}{3}, 1\right)\right]$

Risolvi i seguenti esercizi.

74 La somma di due numeri razionali è 16 e il doppio del primo aumentato di 4 uguaglia la differenza tra 5 e il doppio del secondo. Stabilisci, dopo aver formalizzato il problema con un sistema lineare, se è possibile determinare i due numeri. [impossibile]

75 Trova due numeri sapendo che la loro somma è 37 e la loro differenza è 5. $[21, 16]$

76 Il doppio della somma di due numeri è uguale al secondo numero aumentato del triplo del primo, inoltre aumentando il primo numero di 12 si ottiene il doppio del secondo diminuito di 6. $[18, 18]$

77 Trova due numeri la cui somma è 57 e di cui si sa che il doppio del primo diminuito della metà del secondo è 49. $[31, 26]$

78 Vero o falso?

a. Le soluzioni di un sistema lineare sono le soluzioni comuni a tutte le sue equazioni. V F

b. Le soluzioni di un sistema lineare in due incognite sono costituite da coppie di numeri. V F

c. Se si moltiplicano le equazioni di un sistema per 2, anche la soluzione risulta moltiplicata per 2. V F

d. Un sistema di quarto grado è sempre composto da due equazioni di secondo grado. V F

e. Due sistemi sono equivalenti se e solo se hanno le stesse soluzioni. V F

f. Nel metodo di sostituzione si ricava sempre l'incognita x dalla prima equazione. V F

g. Un sistema è impossibile se non ha soluzioni. V F

h. Un sistema lineare è determinato quando ha una sola soluzione. V F

i. Se un sistema è impossibile, allora tutte le sue equazioni sono impossibili. V F

j. Se un sistema è lineare, allora tutte le sue equazioni sono lineari. V F

[5 affermazioni vere e 5 false]

79 Vero o falso?

a. Il metodo di sostituzione non si può applicare se i termini noti delle equazioni del sistema lineare sono nulli. V F

b. Il determinante di una matrice 2×2 è nullo solo se una riga (o una colonna) ha tutti gli elementi nulli. V F

c. Per risolvere un sistema lineare con il metodo del confronto si ricava la stessa incognita da tutte le equazioni. V F

d. Dato un sistema lineare in forma normale, se il rapporto fra i coefficienti di x è uguale al rapporto fra i coefficienti di y, allora il determinante è nullo. V F

e. Se il determinante di un sistema lineare è nullo, allora il sistema non è determinato. V F

f. Se il determinante di un sistema lineare è diverso da zero e Δy è uguale a zero, allora $y = 0$. V F

g. Nel metodo di sostituzione si deve sostituire l'espressione trovata per una delle incognite da una delle equazioni, nell'altra equazione, al posto della stessa incognita. V F

h. Quando si risolve un sistema lineare con il metodo di sostituzione si ottiene un sistema a esso equivalente. V F

i. Uno dei passaggi che occorre compiere quando si risolve un sistema lineare con il metodo di sostituzione è trasformare una delle equazioni in una a essa equivalente. V F

j. Si può applicare il metodo del confronto solo quando le incognite hanno coefficiente unitario. V F

[7 affermazioni vere e 3 false]

80 Indica la risposta corretta.

a. Quale tra le seguenti coppie di numeri *non* è soluzione dell'equazione $3x - 2y + 4 = 0$?

A $(0, 2)$ B $\left(\frac{1}{3}, -\frac{5}{2}\right)$ C $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ D $\left(\frac{2}{3}, 3\right)$

b. Individua la soluzione del sistema lineare

$$\begin{cases} 2x + 3y - 5 = 0 \\ x - 3y + 2 = 0 \end{cases}$$

$\boxed{\text{A}}$ $(1, 1)$ $\boxed{\text{B}}$ $\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$ $\boxed{\text{C}}$ $\left(0, \frac{5}{3}\right)$ $\boxed{\text{D}}$ $(-2, 0)$

c. Una fra le seguenti affermazioni, riferite al sistema

$$\begin{cases} 3x - 4y - 2 = 0 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

è *falsa*. Quale?

$\boxed{\text{A}}$ i termini noti sono -2 e 3

$\boxed{\text{B}}$ è lineare

$\boxed{\text{C}}$ ha come soluzione $(2, 1)$

$\boxed{\text{D}}$ $(0, -3)$ non è soluzione

d. Siano dati i seguenti due sistemi

$$\begin{cases} x + y = 5^3 \\ x + y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y = 1 \\ x + x^2 y = 2 \end{cases}$$

Allora:

$\boxed{\text{A}}$ i sistemi sono entrambi lineari

$\boxed{\text{B}}$ il primo sistema è lineare, mentre il secondo è di terzo grado

$\boxed{\text{C}}$ il primo sistema è di terzo grado, mentre il secondo è lineare

$\boxed{\text{D}}$ i sistemi sono entrambi di terzo grado

e. Sia dato il sistema

$$\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 5x + y = -1 \end{cases}$$

Se lo si vuole risolvere con il metodo di sostituzione, dal punto di vista del calcolo è più semplice:

$\boxed{\text{A}}$ ricavare x dalla prima equazione

$\boxed{\text{B}}$ ricavare x dalla seconda equazione

$\boxed{\text{C}}$ ricavare y dalla prima equazione

$\boxed{\text{D}}$ ricavare y dalla seconda equazione

f. Il sistema

$$\begin{cases} 3y - 2(1 + 5y) = 5 \\ x = 1 + 5y \end{cases}$$

rappresenta il secondo passaggio della risoluzione di un sistema con il metodo di sostituzione. La soluzione del sistema è:

A $(4, 1)$ B $(4, -1)$ C $(-4, 1)$ D $(-4, -1)$

g. Dato il sistema

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

sui due sistemi seguenti si può affermare che:

$$\begin{cases} 2x = 4 \\ x - y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2y = 4 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

A sono entrambi equivalenti al sistema dato

B solo il primo è equivalente al sistema dato

C solo il secondo è equivalente al sistema dato

D nessuno dei due è equivalente al sistema dato

h. Il sistema

$$\begin{cases} y = \dfrac{3 - 2x}{4} \\ y = \dfrac{5x - 9}{7} \end{cases}$$

è stato ottenuto da uno solo dei seguenti sistemi. Quale?

A $\begin{cases} 2x + 4y + 3 = 0 \\ 5x - 7y + 9 = 0 \end{cases}$ C $\begin{cases} 2x + 4y - 3 = 0 \\ 5x - 7y - 9 = 0 \end{cases}$

B $\begin{cases} 2x + 4y + 3 = 0 \\ 5x - 7y - 9 = 0 \end{cases}$ D $\begin{cases} 2x - 4y + 3 = 0 \\ 5x + 7y - 9 = 0 \end{cases}$

i. È dato il sistema

$$\begin{cases} 4x - 3y - 2 = 0 \\ -8x + 6y + 4 = 0 \end{cases}$$

Quale tra le seguenti affermazioni è *falsa*?

A Il sistema non ha soluzioni C il sistema ha infinite soluzioni

B $(1/2, 0)$ è una soluzione del sistema D $(0, 2/3)$ non è soluzione del sistema

j. Dato il sistema

$$\begin{cases} 2x - 5y = 3 \\ 3x + 2y = -1 \end{cases}$$

i fattori per cui moltiplicare le due equazioni, affinché i coefficienti della y siano opposti, sono:

A 10 per entrambe le equazioni

B 2 per la prima equazione e 5 per la seconda

C -5 per la prima equazione e 10 per la seconda

D 2 per la prima equazione e -5 per la seconda

[Tre risposte A, quattro B, una C e due D]

81 Indica la risposta corretta.

a. Dato il sistema

$$\begin{cases} 3x - 5y = 2 \\ 4x + 3y = -5 \end{cases}$$

il determinante Δy è

A $\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$ B $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}$ C $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 4 \end{vmatrix}$ D $\begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}$

b. Dato il sistema

$$\begin{cases} -3x + 7y = 15 \\ 4x + 2y = 5 \end{cases}$$

per ricavare l'incognita x applicando il metodo di riduzione, si può:

A moltiplicare la prima equazione per 2 e la seconda per -7 e poi sottrarre la seconda equazione dalla prima

B moltiplicare la prima equazione per 7 e la seconda per 2 e poi sommare le due equazioni

C moltiplicare la prima equazione per 2 e la seconda per 7 e poi sommare le due equazioni

D moltiplicare la prima equazione per 2 e la seconda per 7 e poi sottrarre la seconda equazione dalla prima

c. Dato il sistema

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

quale fra le seguenti affermazioni è *falsa*?

A Se si applica il metodo di sostituzione si ottiene il sistema $\begin{cases} y = 5 - x \\ x - (5 - x) = 1 \end{cases}$

B Se si applica il metodo di riduzione si ottiene il sistema $\begin{cases} 2x = 6 \\ x - y = 1 \end{cases}$

C Se si applica il metodo del confronto si ottiene il sistema $\begin{cases} x = 5 - y \\ x = 1 + y \end{cases}$

D Se si applica il metodo di Cramer si ottiene $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}$ $\quad y = \dfrac{\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}$

d. Il sistema

$$\begin{cases} x = \dfrac{1-3y}{4} \\ x = \dfrac{y-3}{4} \end{cases}$$

è equivalente a uno e uno solo dei seguenti sistemi. Quale?

A $\begin{cases} 4x+3y=1 \\ 4x-y=-3 \end{cases}$

C $\begin{cases} 4x+3y=1 \\ 4x+y=-3 \end{cases}$

B $\begin{cases} 4x-3y=1 \\ 4x-y=-3 \end{cases}$

D $\begin{cases} 4x+3y=-1 \\ 4x-y=-3 \end{cases}$

e. Individua la soluzione del sistema

$$\begin{cases} x+y=5 \\ 3x-y=7 \end{cases}$$

A $(2,3)$ B $(3,2)$ C $(4,1)$ D $(1,4)$

f. Individua i metodi di risoluzione che sono stati applicati al sistema

$$\begin{cases} 2x+y=5 \\ x-y=1 \end{cases}$$

per ottenere rispettivamente

$$\begin{cases} y=5-2x \\ x-(5-2x)=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x+y=5 \\ 3x=6 \end{cases}$$

A in entrambi sostituzione

B nel primo riduzione, nel secondo sostituzione

C nel primo sostituzione, nel secondo riduzione

D nel primo riduzione, nel secondo confronto

g. Quale delle seguenti equazioni deve essere sostituita ai puntini nel sistema

$$\begin{cases} 2x-5y=1 \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

in modo che il suo determinante sia uguale a -2?

A $-2x+6y=0$

C $-2x-6y=3$

B $2x+6y=3$

D $2x-6y=3$

[Una risposta A, due B, una C e tre D]

82 Indica la risposta corretta.

a. Quale fra i seguenti sistemi lineari è ridotto in forma normale?

A $\begin{cases} 5x - 2y = 2 \\ y = 3x - 1 \end{cases}$

C $\begin{cases} x + y + 3 = 0 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases}$

B $\begin{cases} 4x - 3y = 1 \\ 5x + 7y = -2 \end{cases}$

D $\begin{cases} 3x + y = 1 \\ x^2 - (x-1)^2 + y = 2 \end{cases}$

b. Consideriamo un'equazione lineare in due incognite e l'equazione che si ottiene moltiplicando entrambi i suoi membri per uno stesso numero $k \neq 0$. Quante soluzioni ha il sistema costituito da queste due equazioni?

A nessuna B una C due D infinite

c. Una sola fra le seguenti equazioni, posta a sistema con l'equazione $3x - 2y + 1 = 0$, rende il sistema impossibile. Quale?

A $9x - 6y - 3 = 0$

C $3x + 2y - 1 = 0$

B $2x - 3y + 1 = 0$

D $3x + 2y + 1 = 0$

d. Il valore del determinante: $\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$ è:

A -13 B -7 C 7 D 13

e. Dati i sistemi

$$\begin{cases} x - 2y = -1 \\ 2x - 4y = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - 2y = -1 \\ 2x - y = -2 \end{cases}$$

si può affermare che:

A sono entrambi indeterminati

B il primo è impossibile e il secondo è indeterminato

C il primo è impossibile e il secondo è determinato

D il primo è indeterminato e il secondo è determinato

f. Individua fra i valori indicati quello che rende il seguente sistema impossibile:

$$\begin{cases} ax + 2y = 3 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$$

A $a = -4$ B $a = -2$ C $a = 2$ D $a = 4$

g. Quale fra i seguenti sistemi è *indeterminato*?

A $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 4y = 0 \end{cases}$ B $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$ C $\begin{cases} x + 5y = 2 \\ 0x + 0y = 2 \end{cases}$ D $\begin{cases} x + 5y = 2 \\ x - 5y = 2 \end{cases}$

h. Quale delle seguenti tabelle esprime una relazione *lineare* tra le due variabili x e y?

A

x	y
0	3
1	0
2	−1

B

x	y
1	5
2	8
3	10

C

x	y
1	5
2	7
3	9

D

x	y
1	5
2	6
3	8

i. Quale dei seguenti sistemi formalizza il seguente problema: «la somma di x con il doppio di y è 10 e la differenza tra il triplo di x e il doppio di y è 5»?

A $\begin{cases} x+y^2=10 \\ x^3-2y^2=5 \end{cases}$

C $\begin{cases} x^2+y=10 \\ x^3-2y^2=5 \end{cases}$

B $\begin{cases} x+2y=10 \\ 3x-2y=5 \end{cases}$

D $\begin{cases} 2x+y=10 \\ 2x-3y=5 \end{cases}$

j. Quale dei seguenti sistemi costituisce il modello algebrico del seguente problema: «sono stati venduti in tutto 1000 biglietti per le rappresentazioni teatrali che si terranno sabato e domenica; il numero dei biglietti venduti per il sabato supera di 50 il doppio dei biglietti venduti per la domenica»?

A $\begin{cases} x+y=1000 \\ x=2\cdot 50+y \end{cases}$

C $\begin{cases} x+y=1000 \\ x=50+2y \end{cases}$

B $\begin{cases} x=1000+y \\ x+2y=50 \end{cases}$

D $\begin{cases} x=1000+y \\ x=50+y^2 \end{cases}$

[Due risposte A, quattro B, tre C e una D]

83 Indica la risposta corretta.

a. Il sistema $\begin{cases} ax-9y=1 \\ x+3y=-1 \end{cases}$ è determinato se e solo se:

A $a\neq -4$ B $a\neq -3$ C $a\neq -2$ D $a\neq -1$

b. Quale dei seguenti sistemi traduce il problema seguente? «Il perimetro di un rettangolo misura 150 cm. Sapendo che la differenza tra la base e l'altezza è 25 cm, quanto misurano i lati del rettangolo?»

A $\begin{cases} x+y=150 \\ x-y=25 \end{cases}$

C $\begin{cases} 2x+2y=150 \\ 2x-2y=25 \end{cases}$

B $\begin{cases} 2x+2y=150 \\ x-y=25 \end{cases}$

D $\begin{cases} x+y=150 \\ x=25y \end{cases}$

c. Per quale valore del parametro k il sistema $\begin{cases} 3x - ky = k \\ 6x + 2y = 5 \end{cases}$ *non* è determinato?

$\boxed{\text{A}}$ $k = 1$ $\boxed{\text{B}}$ $k = -\frac{2}{5}$ $\boxed{\text{C}}$ $k = \frac{2}{5}$ $\boxed{\text{D}}$ $k = -1$

d. Quanto vale il determinante Δ della matrice dei coefficienti del sistema $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 3 \end{cases}$?

$\boxed{\text{A}}$ -2 $\boxed{\text{B}}$ -1 $\boxed{\text{C}}$ 1 $\boxed{\text{D}}$ 2

e. Se si applica il metodo del confronto rispetto all'incognita x, quale delle seguenti è l'equazione che risolve il sistema $\begin{cases} x - 4y = 4 \\ x - y = 3 \end{cases}$?

$\boxed{\text{A}}$ $2x - 5y = 7$ $\boxed{\text{C}}$ $4y - 4 = y + 3$

$\boxed{\text{B}}$ $4y + 4 = y + 3$ $\boxed{\text{D}}$ $4y + 4 = y - 3$

f. Quale delle seguenti sostituzioni è corretta per risolvere il sistema $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$?

$\boxed{\text{A}}$ $y = 2 - 3x$ $\boxed{\text{B}}$ $y = 1 - x$ $\boxed{\text{C}}$ $y = 1 - 2x$ $\boxed{\text{D}}$ $x = 1 - 2y$

g. Quale dei seguenti sistemi è determinato?

A $\begin{cases} 3x-5y=6 \\ 6x-10y=12 \end{cases}$

B $\begin{cases} 3x-5y=6 \\ 6x-10y=6 \end{cases}$

C $\begin{cases} 3x-5y=6 \\ 3x+5y=6 \end{cases}$

D $\begin{cases} 3x-5y=6 \\ 3x-5y=6 \end{cases}$

h. Quale valore *non* deve assumere il parametro k affinché il sistema $\begin{cases} 3x-ky=1 \\ x+3y=0 \end{cases}$ sia determinato?

A $k=1$ B $k=3$ C $k=-9$ D $k=-0$

i. Affermare che due sistemi sono *equivalenti* significa che:

A hanno lo stesso grado

B si risolvono nello stesso modo

C hanno gli stessi coefficienti

D hanno le stesse soluzioni

j. Quale dei seguenti è un sistema lineare di due equazioni in due incognite?

A $\begin{cases} xy=2 \\ x:y=3 \end{cases}$ B $\begin{cases} x^2-y=1 \\ x+y^2=1 \end{cases}$ C $\begin{cases} x=1-y \\ x=1-z \end{cases}$ D $\begin{cases} 2=x-y \\ y=1 \end{cases}$

[Una risposta A, tre B, due C e quattro D]

84 Indica la risposta corretta.

a. Un sistema lineare si dice *determinato*:

A quando ha una sola soluzione

B quando ha una coppia di soluzioni

C quando ha almeno una soluzione

D in nessuno dei casi precedenti

b. Il sistema $\begin{cases} 7x-6y=2 \\ 3x+6y=8 \end{cases}$ ha soluzione

A $\left(\frac{5}{6}, 1\right)$ B $(2, 8)$ C $\left(1, -\frac{5}{6}\right)$ D $\left(1, \frac{5}{6}\right)$

c. Un sistema si dice *impossibile* quando:

A è molto difficile da risolvere

B ha più di due incognite

C non ha soluzioni

D ha infinite soluzioni

d. Le soluzioni di un'equazione lineare in due incognite del tipo $ax + by + c = 0$ sono:

A tutti gli infiniti numeri reali	C certe coppie di numeri reali
B tutte le coppie di numeri reali	D nessuna delle risposte precedenti

e. Quale dei seguenti sistemi è di terzo grado?

A $\begin{cases} xy = 3 \\ x^3 + y^3 = 3 \end{cases}$ B $\begin{cases} x + y = 3 \\ x^3 + y^3 = 3 \end{cases}$ C $\begin{cases} x = 3 - y \\ 3x + 3y = 3 \end{cases}$ D $\begin{cases} x + y = 3 \\ x^2 + y^2 = 3 \end{cases}$

f. Quanto deve valere k affinché la matrice dei coefficienti del sistema $\begin{cases} x + ky = 0 \\ x - (k+2)y = k \end{cases}$ abbia il determinante nullo?

A $k = -1$ B $k = 0$ C $k = 1$ D $k = 2$

g. Quale delle seguenti equazioni è equivalente all'equazione $3x - 2y = 2y + 6$?

A $3x = 6$ B $3x + 4y = 6$ C $3x - 4y = 6$ D $4y - 6 = -3x$

h. Due numeri hanno somma uguale a 20 e differenza uguale a 16; allora il loro prodotto è:

A 18 B 36 C 48 D 64

i. Individua la soluzione del sistema

$$\begin{cases} 4x - 2y = 2 \\ 3x - 2y = 3 \end{cases}$$

A $(1, 3)$ B $(1, -3)$ C $(-1, 3)$ D $(-1, -3)$

j. Individua la soluzione del sistema

$$\begin{cases} 2x + 6y = 3 \\ 4x - 3y = 1 \end{cases}$$

A $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$ B $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ C $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right)$ D $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$

[Due risposte A, tre B, tre C e due D]

6 PROVE INVALSI

Le prove Invalsi (Istituto Nazionale per la VALutazione del Sistema di Istruzione e formazione), che nelle scuole superiori coinvolgono le classi seconde e quinte, valutano l'apprendimento degli studenti italiani. Questo capitolo, rivolto alle classi seconde, contiene esercizi di preparazione alle prove Invalsi di matematica.

6.1 ALGEBRA

Esercizio 72. A una corsa campestre partecipa il 60% degli alunni di una scuola. Dopo i primi 3 km il 30% degli alunni partecipanti si ritira e, dopo altri 5 km, si ritira il 40% dei restanti. Tutti gli altri arrivano al traguardo. Se gli alunni della scuola sono 1000, quanti arrivano al traguardo?

A 219 B 252 C 300 D 350

Soluzione. Gli alunni che arrivano al traguardo sono il 60% del 70% del 60% dei 1000 alunni iscritti, cioè:

$$1000 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}6 = 252$$

La risposta esatta è la B. □

Esercizio 73. Quanto fa $16^{100} : 2$?

A 8^{99} B 8^{100} C 16^{50} D 2^{399}

Soluzione.

$$16^{100} : 2 = (2^4)^{100} = 2^{400} : 2 = 2^{400-1} = 2^{399}$$

La risposta esatta è la D. □

Esercizio 74. L'insegnante chiede: «Se n è un numero intero qualsiasi, cosa si ottiene sommando i tre numeri $2n+1$, $2n+3$ e $2n+5$?» Anna afferma: «Si ottiene sempre il triplo di uno dei tre numeri». Bruno risponde: «Si ottiene sempre un numero dispari». Carla dice: «Si ottiene sempre un multiplo di 3». Chi ha ragione?

[A] solo Anna [B] solo Bruno [C] solo Carla [D] tutti e tre

Soluzione. Poiché

$$(2n+1)+(2n+3)+(2n+5) = 6n+9 = 3(2n+3)$$

si ottiene il triplo del numero $2n+3$, cioè il triplo del numero intermedio (che è dispari), quindi hanno ragione tutti e tre. La risposta esatta è la D. □

Esercizio 75. Se k è un numero intero negativo, qual è il maggiore tra i numeri seguenti?

[A] $5+k$ [B] $5 \cdot k$ [C] $5-k$ [D] 5^k

Soluzione. Per ogni k negativo, $5+k$ è minore di 5, $5 \cdot k$ è negativo, 5^k è minore di 1 e $5-k$ è maggiore di 5. La risposta giusta è la C. □

Esercizio 76. La grandezza y è inversamente proporzionale al quadrato della grandezza x e, per $x=2$, si ha $y=4$. Se $x=8$, quanto vale y?

[A] $1/4$ [B] $1/2$ [C] 2 [D] 4

Soluzione. Se y è inversamente proporzionale al quadrato di x, allora:

$$y = \frac{k}{x^2}$$

dove k è una costante di proporzionalità. Per trovare k basta sostituire nell'equazione precedente 2 al posto di x e 4 al posto di y:

$$4 = \frac{k}{2^2} \quad \Longrightarrow \quad k = 16 \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{16}{x^2}$$

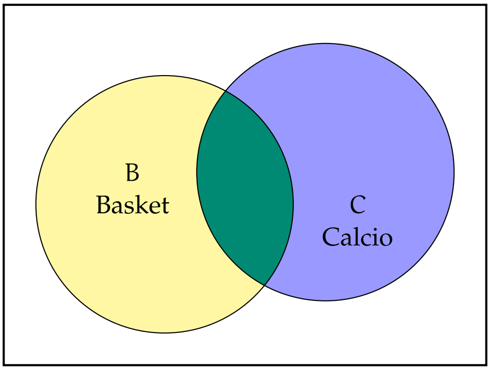
Se $x=8$ si ha:

$$y = \frac{16}{8^2} = \frac{16}{64} = \frac{1}{4}$$

La risposta esatta è la A. □

Esercizio 77. Su 100 alunni di una scuola, 82 alunni giocano a calcio, 26 giocano a basket, 10 non giocano né a calcio né a basket. Quanti alunni giocano sia a calcio che a basket?

$\boxed{\text{A}}$ 6 $\boxed{\text{B}}$ 8 $\boxed{\text{C}}$ 10 $\boxed{\text{D}}$ 18



Soluzione. Il grafico precedente rappresenta la situazione: B è l'insieme degli alunni che giocano a basket e C è l'insieme degli alunni che giocano a calcio. Il numero di alunni che giocano a calcio o a basket, pari ai 100 alunni della scuola meno i 10 alunni che non giocano né a calcio né a basket, è uguale al numero di alunni che giocano a calcio (82) più il numero di alunni che giocano a basket (26) meno il numero x di alunni che giocano sia a calcio che a basket:

$$100 - 10 = 82 + 26 - x \implies x = 82 + 26 + 10 - 100 = 18$$

La risposta esatta è la D. □

Esercizio 78. È data l'equazione

$$(2k - 3)x + 1 - k = 0$$

in cui x è l'incognita e k è un numero reale. Per quale valore di k la soluzione dell'equazione è 1?

$\boxed{\text{A}}$ -1 $\boxed{\text{B}}$ 0 $\boxed{\text{C}}$ 1 $\boxed{\text{D}}$ 2

Soluzione. Se 1 è soluzione dell'equazione nell'incognita x, allora:

$$(2k - 3) \cdot 1 + 1 - k = 0 \implies 2k - 3 + 1 - k = 0 \implies k = 2$$

La risposta esatta è la D. □

Esercizio 79. Giorgia vuole misurare l'altezza di un obelisco che si trova nella piazza principale della sua città. A una certa ora, l'obelisco proietta un'ombra di 6,4 metri, e un palo alto 2,5 metri, che si trova nella stessa piazza, proietta un'ombra di 0,8 metri. Qual è l'altezza dell'obelisco? (Supponi che la piazza sia orizzontale e che l'obelisco e il palo siano verticali.)

$\boxed{\text{A}}$ 18 $\boxed{\text{B}}$ 20 $\boxed{\text{C}}$ 22 $\boxed{\text{D}}$ 24

Soluzione. Se x è l'altezza in metri dell'obelisco, si ha:

$$x : 6{,}4 = 2{,}5 : 0{,}8 \quad \Longrightarrow \quad 0{,}8x = 6{,}4 \cdot 2{,}5 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{6{,}4 \cdot 2{,}5}{0{,}8} = 20$$

La risposta esatta è la B. □

Esercizio 80. La disequazione $x^2 + 1 \geqslant 0$ è verificata:

$\boxed{\text{A}}$ per nessun x $\boxed{\text{B}}$ per ogni x $\boxed{\text{C}}$ solo se $x \geqslant 1$ $\boxed{\text{D}}$ solo se $x \geqslant 0$

Soluzione. La somma di un numero non negativo (x^2) con 1 è sicuramente positiva perché è maggiore o uguale a 1. La risposta esatta è la B. □

Esercizio 81. Una sorgente di montagna alimenta di continuo un serbatoio con $5\,\text{m}^3$ d'acqua ogni settimana. Oggi il serbatoio contiene $100\,\text{m}^3$ d'acqua e un villaggio inizia a prelevare $7\,\text{m}^3$ d'acqua la settimana. Scrivi l'espressione che rappresenta il numero n di m^3 d'acqua contenuti nel serbatoio in funzione del numero t di settimane. Dopo quante settimane il serbatoio sarà vuoto?

$\boxed{\text{A}}$ 2 $\boxed{\text{B}}$ 5 $\boxed{\text{C}}$ 50 $\boxed{\text{D}}$ 52

Soluzione. Ogni settimana il serbatoio perde $2\,\text{m}^3$ d'acqua, risultato della differenza tra i $5\,\text{m}^3$ con cui è alimentato e i $7\,\text{m}^3$ prelevati dal villaggio. Il numero n di m^3 d'acqua contenuti nel serbatoio in funzione del numero t di settimane è dato dalla relazione:

$$n = 100 - 2t$$

Per determinare dopo quante settimane il serbatoio sarà vuoto basta trovare per quale valore di t si ha $n = 0$ nell'equazione precedente:

$$n = 0 \quad \Longrightarrow \quad 100 - 2t = 0 \quad \Longrightarrow \quad t = 50$$

quindi il serbatoio sarà vuoto dopo 50 settimane. La risposta esatta è la C. □

Esercizio 82. Un parcheggio propone ai clienti tre tariffe:

- tariffa A: 15 euro per tutta la giornata (24 ore);
- tariffa B: 1 euro all'ora;
- tariffa C: la prima ora gratis e 1,20 euro per ogni ora successiva.

Mario deve lasciare al parcheggio l'auto per otto ore. Quale tariffa gli conviene scegliere?

$\boxed{\text{A}}$ tariffa A $\boxed{\text{B}}$ tariffa B $\boxed{\text{C}}$ tariffa C $\boxed{\text{D}}$ tariffe A o C

Soluzione. Per otto ore di parcheggio, con la tariffa A si spendono 15 euro, con la tariffa B se ne spendono 8 e con la C si spendono $7 \cdot 1{,}20\,€ = 8{,}40\,€$. La risposta esatta è la B. □

Esercizio 83. Un palo verticale è piantato in uno stagno. Un quinto del palo è interrato nel fondale, un sesto è immerso in acqua e la parte del palo che esce dall'acqua è lunga 8,9 metri. Quant'è lungo circa il palo?

$\boxed{\text{A}}$ 12,02 m $\boxed{\text{B}}$ 13,03 m $\boxed{\text{C}}$ 14,05 m $\boxed{\text{D}}$ 15,07 m

Soluzione. Se x è la lunghezza in metri del palo, si ha:

$$\frac{1}{5}x + \frac{1}{6}x + 8{,}9 = x \quad \Longrightarrow \quad \frac{6x + 5x + 267}{30} = \frac{30x}{30} \quad \Longrightarrow \quad 19x = 267 \quad \Longrightarrow \quad x \approx 14{,}05$$

La risposta esatta è la C. □

Esercizio 84. Senza usare la calcolatrice, disponi in ordine crescente i numeri 16^4, 3^{13}, 4^9 e 2^{14}.

Soluzione. Poiché

$$16^4 = (2^4)^4 = 2^{16} \qquad 4^9 = (2^2)^9 = 2^{18}$$

si ha che $2^{14} < 16^4 < 4^9$. Inoltre:

$$4^9 = 2^{18} = \underbrace{2 \cdot \ldots \cdot 2}_{18 \text{ volte}} = \underbrace{(2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot \ldots \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2)}_{6 \text{ terne}} = \underbrace{8 \cdot \ldots \cdot 8}_{6 \text{ volte}} = 8^6 < 9^6 = 3^{12} < 3^{13}$$

quindi $2^{14} < 16^4 < 4^9 < 3^{13}$. □

Esercizio 85. Lorenza afferma: «La relazione $x/2 < x$ è soddisfatta per ogni numero reale x». Lorenza ha ragione?

Soluzione. Poiché la frase riguarda una totalità di oggetti, basta provare che non vale anche solo in un caso per dichiararla falsa. Per esempio, se $x = -1$, la disuguaglianza è falsa. Questo controesempio prova che Lorenza non ha ragione. □

Esercizio 86. Marco sostiene che se n è un numero intero positivo qualsiasi, allora $n^2 + n + 1$ è un numero primo. Marco ha ragione?

Soluzione. Marco non ha ragione perché, per esempio, per $n = 4$ si ottiene $4^2 + 4 + 1 = 21$, che non è primo. □

Esercizio 87. Giulia afferma: «Per ogni numero intero n maggiore di 1, $(n-1)n(n+1)$ è divisibile per 6». Giulia ha ragione?

Soluzione. Giulia ha ragione. Infatti fra tre numeri interi consecutivi c'è sempre (almeno) un multiplo di 2 (un numero pari) e c'è un multiplo di 3; quindi il prodotto di tre numeri interi consecutivi è divisibile per 6. □

6.2 GEOMETRIA

Esercizio 88. Nel piano cartesiano la retta di equazione $y = 3x - 5$ e la retta di equazione $y = \frac{k}{2}x - 1$ sono parallele. Quanto vale k?

A	2	B	3	C	5	D	6

Soluzione. Poiché due rette sono parallele se hanno lo stesso coefficiente angolare, basta porre $k/2 = 3$, da cui $k = 6$. La risposta esatta è la D. □

Esercizio 89. Qual è l'area del poligono rappresentato nella seguente figura 1?

A	15	B	16,5	C	18	D	19,5

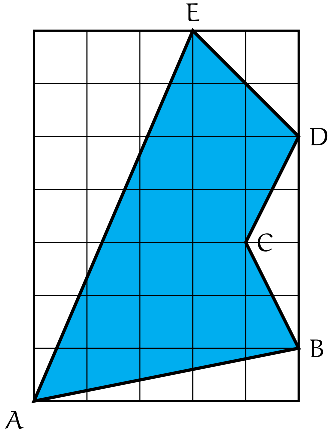


Figura 1

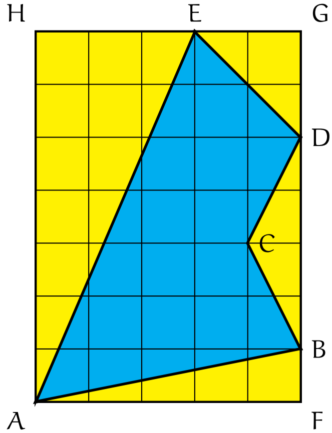


Figura 2

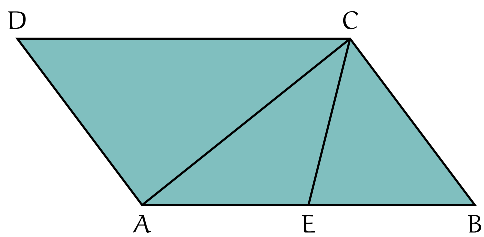
Soluzione. Un modo per calcolare l'area è quello suggerito nella figura 2: si sottraggono dall'area del rettangolo AFGH le aree dei triangoli rettangoli AFB, DGE e AEH e del triangolo isoscele BCD:

$$(35 - 2{,}5 - 2 - 10{,}5 - 2)\,\mathrm{m}^2 = 18\,\mathrm{m}^2$$

La risposta esatta è la C. □

Esercizio 90. La figura seguente mostra il parallelogramma ABCD, con E punto medio di AB. Qual è il rapporto tra l'area del triangolo AEC e l'area del parallelogramma?

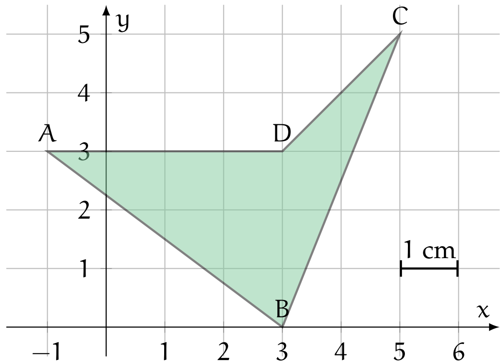
A 1/4 B 1/3 C 2/5 D 1/2



Soluzione. Il triangolo ABC ha area uguale alla metà dell'area del parallelogramma. L'area del triangolo AEC è la metà di quella del triangolo ABC (hanno infatti le basi AE e AB che stanno nel rapporto 1 : 2 per ipotesi, e la stessa altezza relativa). Quindi l'area di AEC è 1/4 dell'area del parallelogramma. La risposta esatta è la A. □

Esercizio 91. Qual è l'area del quadrilatero ABCD rappresentato nella figura seguente?

$\boxed{\text{A}}$ 5 $\boxed{\text{B}}$ 7 $\boxed{\text{C}}$ 9 $\boxed{\text{D}}$ 11



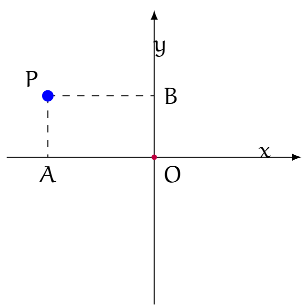
Soluzione. L'area del quadrilatero ABCD è la somma delle aree dei triangoli ABD e BDC:

$$\left(\frac{3 \cdot 4}{2} + \frac{3 \cdot 2}{2}\right) \text{cm}^2 = 9\,\text{cm}^2$$

La risposta esatta è la C. □

Esercizio 92. La circonferenza disegnata nella figura seguente ha come centro l'origine degli assi cartesiani; P è un suo punto; i punti A e B sono le proiezioni sugli assi cartesiani di P. Il diametro della circonferenza è 12 cm. Qual è la lunghezza del segmento AB?

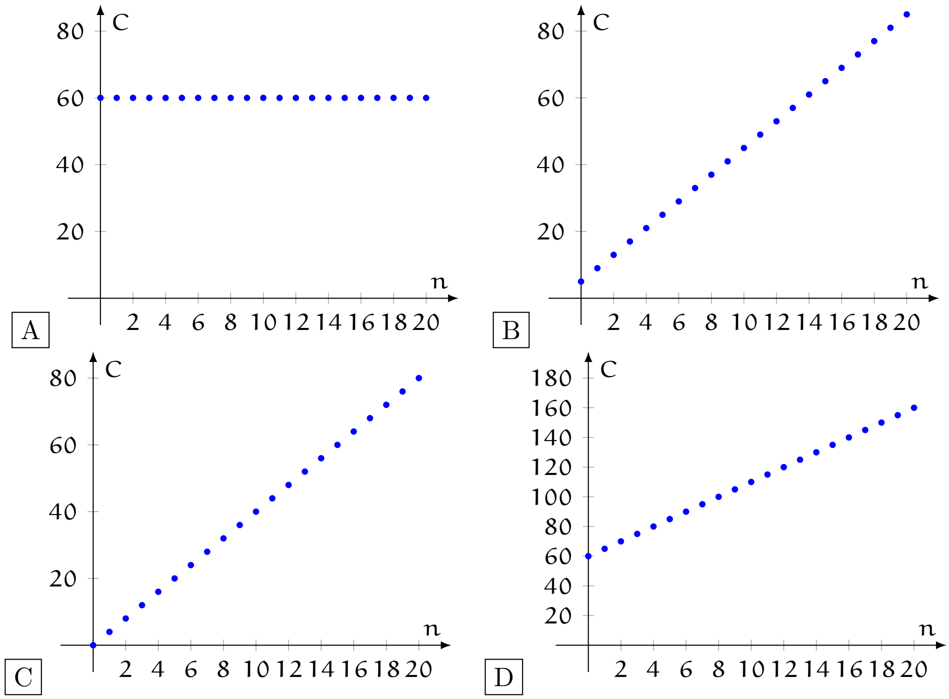
$\boxed{\text{A}}$ 5 cm $\boxed{\text{B}}$ 6 cm $\boxed{\text{C}}$ 10 cm $\boxed{\text{D}}$ 12 cm



Soluzione. Osserviamo che AOBP è un rettangolo. Poiché le diagonali di un rettangolo sono uguali, $AB = OP$. Poiché OP è un raggio, $OP = (12\,\text{cm})/2 = 6\,\text{cm}$. Quindi $AB = 6$ cm. La risposta esatta è la B. □

Esercizio 93. Per frequentare una palestra Paolo deve pagare una quota fissa di 60 euro più 5 euro per ogni ingresso. Quale tra i grafici seguenti descrive il costo C (in euro) della palestra in funzione del numero n di ingressi?

[A] grafico A   [B] grafico B   [C] grafico C   [D] grafico D



Soluzione. L'ordinata all'origine della retta che descrive il costo in funzione del numero di ingressi deve essere 60, pari alla quota fissa in euro che è necessario pagare se si vuole frequentare la palestra. Tranne il grafico A, che però rappresenta una funzione costante, l'unico grafico che rispetta questa condizione è il grafico D. Si può verificare che per ogni incremento unitario di n (numero di ingressi) il costo aumenta di 5 euro, coerentemente con i dati indicati nel testo. La risposta esatta è la D. □

Esercizio 94. Un capitano vede dalla sua nave che il faro A sulla costa si trova esattamente in direzione nord-est (NE), mentre il faro B si trova esattamente in direzione est (E). Nella mappa rappresentata nella seguente figura 1 segna con un punto la posizione della nave.

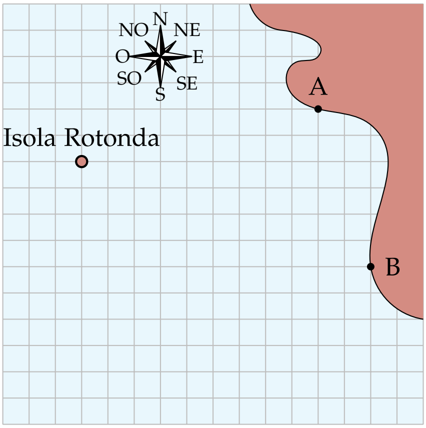


Figura 1

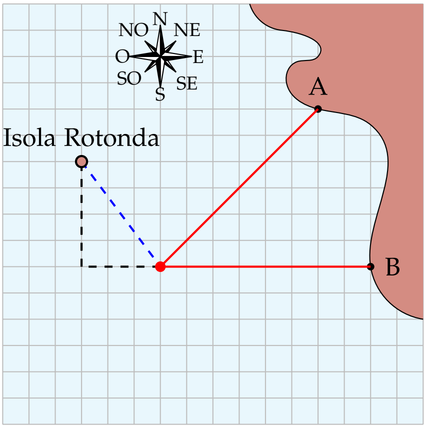
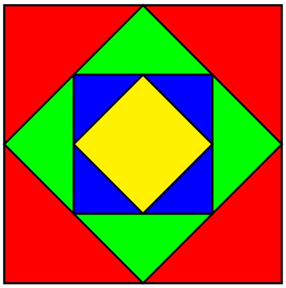


Figura 2

Soluzione. Tracciamo due semirette, a partire dai punti A e B della costa verso il mare, nel modo seguente: da A lungo le diagonali dei quadrati del reticolato (verso sud-ovest) e da B lungo l'orizzontale (ovest). Il punto di intersezione delle due semirette indica la posizione della nave (a partire dall'Isola Rotonda: 4 quadretti verso sud e 3 verso est; figura 2). □

Esercizio 95. La figura seguente è stata costruita inserendo nel quadrato più grande un secondo quadrato i cui vertici sono i punti medi dei lati del primo. Si è ripetuta la stessa procedura, inserendo altri due quadrati. Se l'area del quadrato più grande è $64\,\text{cm}^2$, quanto misura il lato del quadrato più piccolo?

A $\sqrt{2}\,\text{cm}$ B $2\,\text{cm}$ C $2\sqrt{2}\,\text{cm}$ D $4\,\text{cm}$



Soluzione. Passando dal quadrato più grande a quello che lo segue nella successione l'area si dimezza, e così per ogni successivo quadrato. Quindi l'area del quadrato più piccolo è $64/2^3\,\text{cm}^2 = 64/8\,\text{cm}^2 = 8\,\text{cm}^2$ e il suo lato misura $\sqrt{8}\,\text{cm} = 2\sqrt{2}\,\text{cm}$. La risposta esatta è la C. □

6.3 PROBABILITÀ E STATISTICA

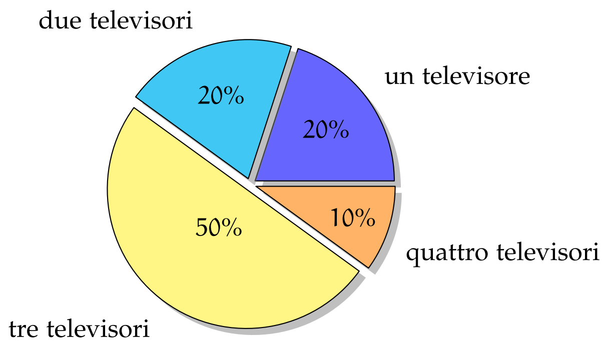
Esercizio 96. Un'urna contiene 40 palline: 23 sono rosse e 17 blu. Si estraggono contemporaneamente due palline dall'urna. Entrambe sono blu. Senza reintrodurre le due palline estratte, si estrae dall'urna una terza pallina. Qual è la circa probabilità che anche la terza pallina sia blu?

[A] 37% [B] 39% [C] 41% [D] 43%

Soluzione. La probabilità è il rapporto tra i casi favorevoli ($17 - 2 = 15$) e i casi possibili ($23 + 15 = 38$), cioè $15/38 \approx 39\%$. La risposta esatta è la B. □

Esercizio 97. Un sondaggio condotto su un gruppo di 60 studenti sul numero di televisori presenti nelle loro case ha dato i risultati riportati nel grafico seguente. Quanti studenti hanno in casa meno di tre televisori?

[A] 20 [B] 24 [C] 30 [D] 40



Soluzione. Gli studenti che hanno in casa meno di tre televisori (uno o due) sono il $(20 + 20)\% = 40\%$; su un totale di 60, essi corrispondono a $60 \cdot 40/100 = 24$. La risposta esatta è la B. □

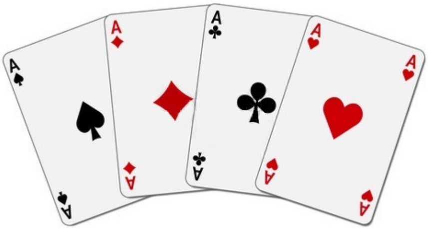
Esercizio 98. Da un controllo di qualità è emerso che una macchina ha prodotto 14 pezzi difettosi su un totale di 1200 pezzi. Che stima è ragionevole fare del numero di pezzi difettosi su una produzione di 2150 pezzi?

[A] 20 [B] 21 [C] 22 [D] 25

Soluzione. La frequenza relativa del numero di pezzi difettosi, cioè $14/1200$, può essere considerata come una stima della probabilità di produrre un pezzo difettoso. Su questa base è ragionevole attendersi che su 2150 pezzi prodotti ve ne siano $(14/1200) \cdot 2150 \approx 25$, cioè 25 pezzi approssimando all'intero più vicino. La risposta esatta è la D. $\square$

Esercizio 99. Da un mazzo di 52 carte da poker (composto da 13 carte per ognuno dei semi: cuori, quadri, fiori, picche) sono stati tolti i 4 assi. Si estrae una carta a caso. Qual è la probabilità che sia di cuori?

A	10%	B	15%	C	20%	D	25%



Soluzione. La probabilità è il rapporto fra i casi favorevoli $(13-1 = 12)$ e i casi possibili $(52-4=48)$:

$$\frac{12}{48} = \frac{1}{4} = \frac{25}{100} = 25\%$$

La risposta esatta è la D. $\square$

Esercizio 100. Da un mazzo di 52 carte da poker sono state tolte alcune carte di fiori. Dopo questa operazione la probabilità di estrarre, a caso, una carta di fiori è $6/45$. Quante carte di fiori sono state tolte?

A	6	B	7	C	8	D	10

Soluzione. La probabilità è il rapporto fra i casi favorevoli $(13-x)$ e i casi possibili $(52-x)$:

$$\frac{13-x}{52-x} = \frac{6}{45}$$

Quindi:

$$45(13-x) = 6(52-x) \quad \Longrightarrow \quad 585-45x = 312-6x \quad \Longrightarrow \quad x = 7$$

La risposta esatta è la B. $\square$

Esercizio 101. Un test di matematica è stato proposto a due gruppi di studenti. Il primo gruppo, composto da 20 studenti, ha ottenuto un punteggio medio di 85 e il secondo, composto da 80 studenti, ha ottenuto un punteggio medio di 65. Qual è il punteggio medio ottenuto dai 100 studenti dei due gruppi?

A 67 B 69 C 70 D 75

Soluzione. Applichiamo la formula della una media pesata:

$$\frac{20 \cdot 85 + 80 \cdot 65}{100} = 69$$

La risposta esatta è la B. □

Esercizio 102. Una stazione meteorologica nelle Alpi ha misurato le temperature, in gradi centigradi (°C), durante un giorno di dicembre. La tabella seguente riporta i dati raccolti. Che cosa ne possiamo dedurre?

A La temperatura massima è $-1\,°C$.

B La temperatura minima è $-8\,°C$.

C La differenza tra le temperature massima e minima, è $11\,°C$.

D La temperatura media è $-7\,°C$.

Ora	1	4	7	10	13	16	19	22
Temperatura (°C)	−8	−10	−10	−3	+1	−1	−3	−6

Soluzione. La temperatura massima è $+1\,°C$ (si registra alle ore 13) e quella minima è $-10\,°C$ (si registra alle 4 e alle 7). La differenza tra la temperatura massima e la temperatura minima è:

$$[1 - (-10)]\,°C = 11\,°C$$

mentre la temperatura media è:

$$\frac{-8 - 10 - 10 - 3 + 1 - 1 - 3 - 6}{8}\,°C = -5\,°C$$

La risposta esatta è la C. □

6.4 ESERCIZI

Chi non risolve esercizi non impara la matematica.

1 Indica la risposta corretta.

a. L'espressione $a^{43} + a^{44}$ è uguale a

A $a^{44 \cdot 43}$ B $a^{43} \cdot (a+1)$ C a^{87} D $2a^{87}$

b. Si lancia 300 volte un dado non truccato a 6 facce. Quante volte ci si aspetta di ottenere un numero maggiore di 4?

A circa 100 volte B circa 50 volte C circa 30 volte D circa 150 volte

c. È noto che π è un numero irrazionale. Questo significa che è un numero decimale:

A periodico
B limitato
C periodico misto
D illimitato non periodico

d. Una bibita è venduta in lattine di forma cilindrica con il diametro di base di 6 cm e l'altezza di 9 cm. Qual è la capacità della lattina?

A esattamente $\frac{1}{4}$ di litro
B poco più di $\frac{1}{4}$ di litro
C poco più di $\frac{1}{2}$ di litro
D esattamente più di $\frac{1}{4}$ di litro

e. Il numero π può essere definito come:

A il rapporto tra l'area di un cerchio e il suo raggio
B il rapporto tra la lunghezza di una circonferenza e il suo diametro
C il rapporto tra l'area di un cerchio e il suo diametro
D il rapporto tra la lunghezza di una circonferenza e il suo raggio

f. Ruotando di un giro completo un trapezio rettangolo attorno al lato perpendicolare alle basi si ottiene:

A un cono
B un cilindro con una cavità conica
C un tronco di cono
D un cilindro e un cono sovrapposto

g. Il rapporto tra gli spigoli di due cubi è 5. Qual è il rapporto tra i loro volumi?

[A] 5 [B] 15 [C] 25 [D] 125

[Una risposta A, tre B, una C e due D]

2 Indica la risposta corretta.

a. Su un vasetto di yogurt alla vaniglia da 125 g sono indicati gli ingredienti. In particolare, si legge: «preparazione dolciaria alla vaniglia: 11%». Quanti grammi di preparazione dolciaria alla vaniglia sono presenti, circa, nel vasetto?

[A] 13,8 [B] 1,3 [C] 11,0 [D] 11,4

b. Un automobilista percorre i primi 120 km di un certo percorso alla velocità media di 60 km/h e i successivi 120 km alla velocità media di 120 km/h. Qual è la sua velocità media durante l'intero percorso?

[A] 70 km/h [B] 80 km/h [C] 90 km/h [D] 100 km/h

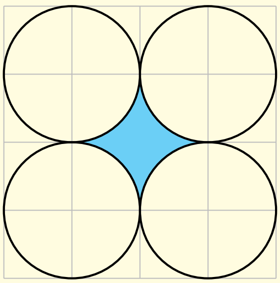
c. Il polinomio $x^3 - 8$ è divisibile per

[A] $x+8$ [B] $x-2$ [C] $x+4$ [D] $x-4$

d. Considera un quadrato di lato a. Se si aumenta il lato a del 20%, si ottiene un nuovo quadrato di lato b. Di quanto aumenta in percentuale l'area del quadrato di lato b rispetto all'area del quadrato di lato a?

[A] Del 20% [B] Del 40% [C] Del 44% [D] Del 120%

e. Quattro circonferenze, ciascuna con diametro 10 cm, sono tangenti a due a due come mostrato nella figura seguente.



Quanto misura il perimetro della regione colorata? (Ricorda che la lunghezza di una circonferenza si calcola moltiplicando il suo diametro per π e che l'area di un cerchio si ottiene moltiplicando il quadrato del suo raggio per π.)

[A] 4π [B] 5π [C] 10π [D] 20π

f. Se a è un numero compreso tra 0 e 1 ($0 < a < 1$), allora:

A $a < \sqrt{a} < \frac{1}{a} < a^2$

B $\frac{1}{a} < \sqrt{a} < a < a^2$

C $a^2 < a < \sqrt{a} < \frac{1}{a}$

D $\sqrt{a} < a < a^2 < \frac{1}{a}$

g. Una confezione di yogurt riporta la seguente tabella di valori medi nutrizionali (per 100 g di yogurt):

Proteine	2,8 g
Carboidrati	16,3 g
Grassi	3,2 g

Quanti grammi di carboidrati, circa, sono presenti in un vasetto di yogurt da 125 g?

A 7,7 B 13,0 C 16,3 D 20,4

[Una risposta A, due B, tre C e una D]

3 Indica la risposta corretta.

a. L'espressione $a^{37} + a^{38}$ è uguale a

A $2a^{75}$ B a^{75} C $a^{37}(a+1)$ D $a^{37 \cdot 38}$

b. Si sa che $2^{10} = 1024$. Quale tra le seguenti potenze di 10 è quella che più si avvicina a 2^{70}?

A 10^7 B 10^{14} C 10^{21} D 10^{24}

c. Nel foglietto illustrativo contenuto nella confezione di un farmaco, alla voce "Effetti collaterali" si legge che il 2% dei pazienti trattati con il farmaco ha accusato vertigini, mentre il 7% dei pazienti trattati con il farmaco ha avuto bruciori di stomaco. I due tipi di effetti collaterali sono indipendenti l'uno dall'altro. Qual è la probabilità che un paziente che ha assunto il farmaco manifesti entrambi gli effetti collaterali?

A 9% B 0,14% C 14% D 0,9%

d. Quale tra le frasi seguenti è la negazione della proposizione «Tutti i numeri interi sono dispari»?

A Tutti i numeri interi sono pari

B Nessun numero intero è dispari

C Almeno un numero intero è pari

D Qualche numero intero è dispari

e. La disequazione $x^2 > 0$ è verificata:

A per ogni $x \neq 0$ B per ogni x C solo se $x < 0$ D solo se $x > 0$

f. L'equazione $x(x-1) = 6$ ha tra le sue soluzioni:

A $1/6$ B 3 C 6 D 7

g. Solo una delle affermazioni seguenti è vera. Quale?

A Ogni triangolo ha un centro di simmetria

B Tutti i triangoli equilateri hanno un centro di simmetria

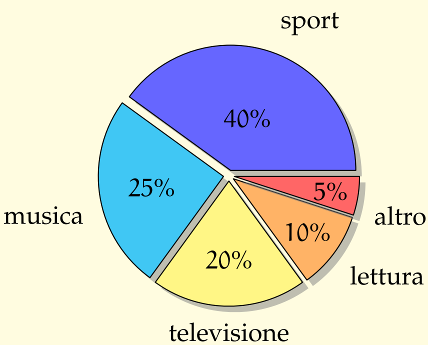
C Ogni triangolo ha almeno un asse di simmetria

D Alcuni triangoli hanno un asse di simmetria

[Una risposta A, due B, tre C e una D]

4 Indica la risposta corretta.

a. Un'indagine sull'attività preferita nel tempo libero, fatta su un campione di 220 studenti di una scuola con 700 studenti in tutto, ha dato i risultati rappresentati nel grafico seguente.



Qual è la probabilità che estraendo a caso uno studente del campione si ottenga un alunno che dedica il tempo libero alla lettura?

A $1/220$ B $1/10$ C $1/5$ D $1/70$

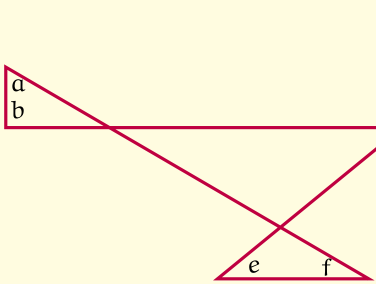
b. Quale delle seguenti disuguaglianze è corretta?

A $\dfrac{3}{100} < 0{,}125 < \dfrac{1}{3} < 0{,}65$ C $0{,}65 < 0{,}125 < \dfrac{1}{3} < \dfrac{3}{100}$

B $0{,}125 < \dfrac{3}{100} < 0{,}65 < \dfrac{1}{3}$ D $\dfrac{1}{3} < \dfrac{3}{100} < 0{,}65 < 0{,}125$

c. Qual è la somma degli angoli a, b, c, d, e, f nella figura seguente?

[A] 180 ř [B] 270 ř [C] 360 ř [D] 450 ř



d. Quanto fa $\left(\frac{1}{2}+1\right):\left(1-\frac{1}{2}\right)+1$?

[A] 1 [B] 7/4 [C] 2 [D] 4

e. Elena compie gli anni in giugno. Di seguito è riportato il calendario di giugno 2015, dove sono evidenziati i giorni festivi.

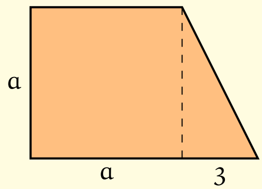
Giugno 2015

Lun	Mar	Mar	Gio	Ven	Sab	Dom
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	27
29	30					

Qual è la probabilità che Elena compia gli anni in un giorno festivo?

[A] 1/3 [B] 1/4 [C] 1/5 [D] 1/6

f. Scrivi la formula che esprime il valore dell'area A della figura seguente al variare della lunghezza a.



[A] $a+\frac{3}{2}$ [B] $a^2+\frac{3}{2}$ [C] $a\left(a+\frac{3}{2}\right)$ [D] $a\left(a+\frac{2}{3}\right)$

g. Anna e Bruna partono per una breve vacanza. Decidono che Anna pagherà per il cibo e Bruna per l'alloggio. Questo è il riepilogo delle spese che ciascuna di loro ha sostenuto.

	Anna	**Bruna**
Lunedì	35 €	27 €
Martedì	30 €	30 €
Mercoledì	21 €	49 €

Al ritorno fanno i conti per dividere in parti uguali le spese. Quanti euro deve dare Anna a Bruna per far sì che entrambi abbiano speso la stessa somma di denaro?

A 6 € B 10 € C 20 € D 26 €

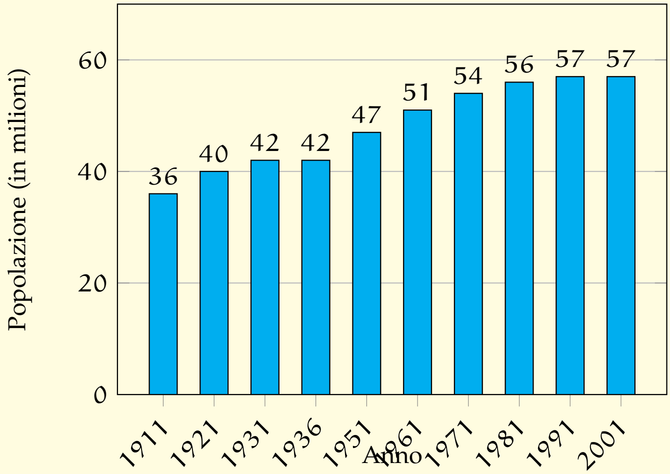
[Una risposta A, due B, due C e due D]

5 Indica la risposta corretta.

a. Il numero $(\sqrt{3})^{10}$ è uguale a:

A 3^5 B $\sqrt{3^5}$ C $\sqrt[20]{3}$ D $\sqrt[10]{3}$

b. Il grafico seguente rappresenta la popolazione residente (espressa in milioni) nei censimenti dal 1911 al 2001.



Quale delle affermazioni seguenti è vera?

A I censimenti sono stati fatti regolarmente ogni dieci anni.

B La popolazione è rimasta invariata negli ultimi tre censimenti.

C Dal 1911 al 1921 la popolazione è aumentata di quattro milioni di persone.

D Dal 1936 al 1951 la popolazione è aumentata di quattro milioni di persone.

c. L'insegnante dice: «Sia n un numero intero. Il numero $n(n-1)$ è sempre pari? Oppure sempre dispari? Oppure può essere qualche volta pari e qualche volta dispari?». Alcuni studenti rispondono in questo modo:

- Angela: «Può essere sia pari che dispari, perché n è un numero qualsiasi».
- Barbara: «È sempre dispari, perché $n-1$ indica un numero dispari».
- Chiara: «È sempre pari, perché $3 \cdot (3-1)$ fa 6, che è pari».
- Diana: «È sempre pari, perché n e $n-1$ sono numeri consecutivi e quindi uno dei due deve essere pari».

Chi ha ragione e fornisce la spiegazione corretta?

$\boxed{\text{A}}$ Angela $\boxed{\text{B}}$ Barbara $\boxed{\text{C}}$ Chiara $\boxed{\text{D}}$ Diana

d. Il prezzo p (in euro) di una padella dipende dal suo diametro d (in centimetri) secondo la formula $p = \frac{1}{15}d^2$. Quale delle affermazioni seguenti è vera?

$\boxed{\text{A}}$ Il prezzo della padella è direttamente proporzionale al suo diametro.

$\boxed{\text{B}}$ Il prezzo della padella è inversamente proporzionale al suo diametro.

$\boxed{\text{C}}$ Il prezzo della padella aumenta all'aumentare del suo diametro.

$\boxed{\text{D}}$ Il rapporto tra il diametro della padella e il suo prezzo è 15.

e. Nella scuola di Martina il punteggio massimo delle verifiche è 100. Martina ha un punteggio medio di 60 nelle sue prime quattro verifiche. Alla quinta verifica prende 80. Qual è la media dei punteggi di Martina dopo tutte e cinque le verifiche?

$\boxed{\text{A}}$ 60 $\boxed{\text{B}}$ 64 $\boxed{\text{C}}$ 70 $\boxed{\text{D}}$ 80

f. La figura seguente mostra le orme di un uomo che cammina.

La lunghezza P del passo è la distanza tra la parte posteriore di due orme consecutive. Per gli uomini, la formula $n/P = 140$ fornisce una relazione approssimata tra n e P, dove n è il numero di passi al minuto e P è la lunghezza del passo in metri. Se la formula si applica all'andatura di Marco che fa 70 passi al minuto, qual è la circa lunghezza del passo di Marco?

$\boxed{\text{A}}$ 0,20 m $\boxed{\text{B}}$ 0,25 m $\boxed{\text{C}}$ 0,40 m $\boxed{\text{D}}$ 0,50 m

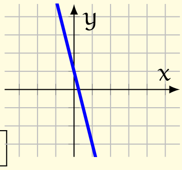
g. Le misure dei lati di un rettangolo si riducono del 20%. Di quanto diminuisce in percentuale l'area del rettangolo?

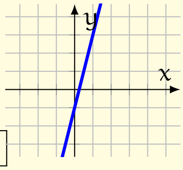
A 20% B 36% C 40% D 64%

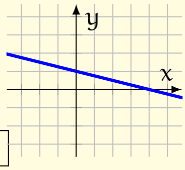
[Una risposta A, due B, due C e due D]

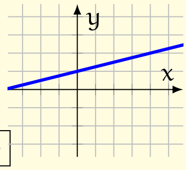
6 Indica la risposta corretta.

a. Uno dei grafici seguenti rappresenta la funzione $y = 1 - 4x$. Quale?

A


B


C


D


b. La stampante S_1 in un minuto stampa il triplo delle pagine della stampante S_2. Quando S_1 e S_2 lavorano contemporaneamente stampano in tutto 24 pagine al minuto. Se S_2 viene sostituita con una stampante identica a S_1, quante pagine potranno essere stampate complessivamente in un minuto?

A 24 B 30 C 36 D 48

c. Le persone, durante le attività sportive, non dovrebbero superare una determinata frequenza del battito cardiaco, frequenza che varia in funzione dell'età. Il numero massimo di battiti al minuto che non dovrebbe essere superato si può calcolare sottraendo a 220 l'età x del soggetto. Inoltre, perché un allenamento in palestra sia efficace, il numero dei battiti y dovrebbe essere mantenuto in un intervallo compreso tra il 70% e il 90% della frequenza cardiaca massima consigliata. Quale delle disuguaglianze seguenti esprime il numero di battiti da mantenere in un allenamento efficace?

A $70 \cdot (220 - x) \leqslant y \leqslant 90 \cdot (220 - x)$ C $220 - 0{,}9 \cdot x \leqslant y \leqslant 220 - 0{,}7 \cdot x$

B $0{,}7 \cdot (220 - x) \leqslant y \leqslant 0{,}9 \cdot (220 - x)$ D $0{,}9 \cdot 220 - x \leqslant y \leqslant 0{,}7 \cdot 220 - x$

d. Un atomo di idrogeno è formato da un protone, la cui massa è circa $2 \cdot 10^{-27}$ kg, e da un elettrone, la cui massa è circa $9 \cdot 10^{-31}$ kg. Quale tra i valori seguenti approssima meglio la massa totale dell'atomo di idrogeno?

A $2 \cdot 10^{-27}$ kg B $11 \cdot 10^{-31}$ kg C $11 \cdot 10^{-58}$ kg D $18 \cdot 10^{-58}$ kg

e. Nelle ultime elezioni è andato a votare il 70% dei cittadini. Di questi il 20% ha votato per il partito A. Quale percentuale di cittadini ha votato per il partito A?

A 14% B 20% C 50% D 60%

f. Un triangolo ha un lato di 6 cm e uno di 10 cm. Quale tra le seguenti *non* può essere la misura della lunghezza del terzo lato?

A 6,5 cm   B 10 cm   C 15,5 cm   D 17 cm

g. Andrea, Beatrice, Carlotta e Dario vogliono fare un'indagine statistica sui gusti degli studenti delle scuole superiori della loro città.

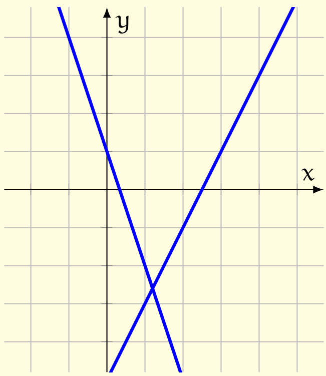
- Andrea propone di intervistare tutti i 245 alunni delle classi quinte di due scuole superiori della città;
- Beatrice propone di intervistare un numeroso gruppo, scelto a caso, di ragazzi all'uscita da una discoteca della città;
- Carlotta propone di intervistare 200 studenti, scelti a caso tra tutti gli studenti delle scuole superiori della città;
- Dario propone di pubblicare le domande dell'intervista sul giornalino della sua scuola e di raccogliere le risposte pervenute.

In assenza di altre informazioni, il campione più rappresentativo per l'indagine è quello proposto da

A Andrea   B Beatrice   C Carlotta   D Dario

[Tre risposte A, una B, due C e una D]

7 La figura seguente mostra i grafici delle funzioni $f(x) = 2x - 5$ e $g(x) = -3x + 1$.



Indica se ciascuna delle affermazioni seguenti è vera o falsa.

a. $f(x) = g(x)$ se e solo se $x = 1{,}2$ V F

b. $f(x) > 0$ se e solo se $x > 0$ V F

c. $f(x) = 0$ se e solo se $x = 2{,}5$ V F

d. $g(x) > f(x)$ se e solo se $x < 1{,}2$ V F

[Tre affermazioni vere e una falsa]

8 Indica la risposta corretta.

a. In quale delle seguenti coppie di numeri il numero 2,25 è maggiore del primo numero ma minore del secondo?

A 1 e 2 B 2 e 5/2 C 5/2 e 11/4 D 11/4 e 3

b. Qual è il numero successivo della sequenza 2, 3, 8, 63, ...?

A 125 B 126 C 504 D 3968

c. Qual è il numero successivo della sequenza 2, 4, 9, 20, 43, ...?

A 86 B 88 C 90 D 92

d. Quale numero va *escluso* nella sequenza 5, 8, 15, 18, 21, 25, 28, 35, ...?

A 8 B 18 C 21 D 28

e. Qual è la lettera successiva della sequenza B, E, H, M, ...?

A O B P C Q D R

f. La frazione 3/2 è:

A compresa tra 1 e 2
C compresa tra 2 e 3
B maggiore di 2
D minore di 1

g. Sia n un numero. Quando n è moltiplicato per 7 e aumentato di 6, si ottiene 41. Quale delle equazioni seguenti rappresenta questa relazione?

A $7n + 6 = 41$ B $7n - 6 = 41$ C $7n \cdot 6 = 41$ D $7(n + 6) = 41$

h. Se 4 moltiplicato per un numero fa 48, quanto vale un terzo del numero?

A 4 B 8 C 12 D 16

i. Le potenze $(4/3)^2$ e $4^2/3$ hanno lo stesso valore?

A No, la prima vale 16/3 e la seconda 16/9.

B No, la prima vale 16/9 e la seconda 16/3.

C Sì, valgono entrambe 16/3.

D Sì, valgono entrambe 9/16.

j. Indica l'affermazione *falsa*. Se sommiamo tre numeri consecutivi dispari si ottiene:

A sempre un numero dispari

B un multiplo di tre

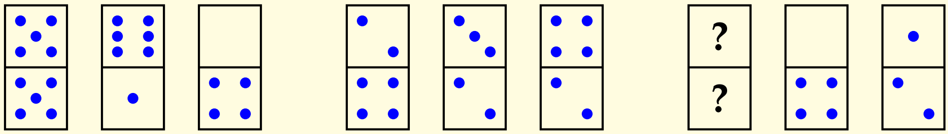
C a volte un pari, a volte un dispari

D il triplo di uno dei tre numeri

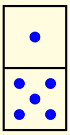
[Tre risposte A, tre B, tre C e una D]

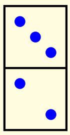
9 Indica la risposta corretta.

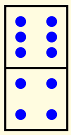
a. Data la sequenza

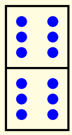


individua la tessere mancante fra quelle proposte.

A 

B 

C 

D 

b. Nell'uguaglianza seguente, a ogni simbolo corrisponde un dato valore:

$$\odot + \odot + \odot + \odot + \otimes + \otimes = \odot + \odot + \otimes + \otimes + \otimes + \otimes + \oplus$$

Sapendo che $\otimes + \otimes = \odot$, quanto vale $\oplus$?

A zero

B $\otimes$

C $\otimes + \otimes$

D $\otimes + \otimes + \otimes$

c. Qual è la lettera successiva della sequenza Z, 7, U, 11, S, 15, Q, 19, ... ?

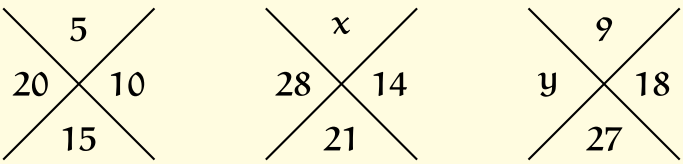
A O, 23

B Q, 21

C 23, O

D S, 17

d. Completa la sequenza seguente.



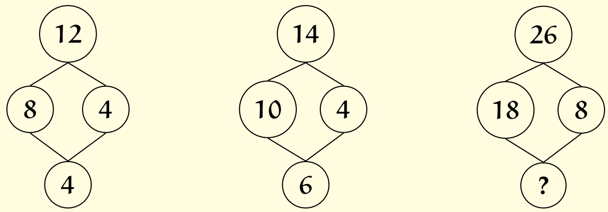
A $x = 8, y = 36$

B $x = 7, y = 37$

C $x = 7, y = 36$

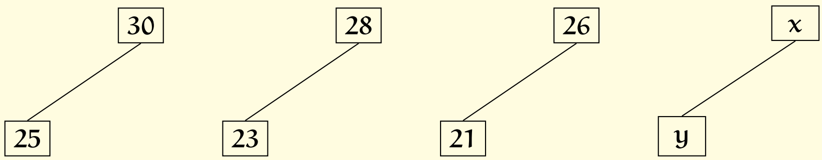
D $x = 35, y = 34$

e. Completa la sequenza seguente.



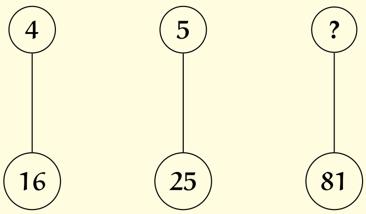
A 10 B 12 C 14 D 16

f. Completa la sequenza seguente.



A $x = 25, y = 19$ B $x = 25, y = 20$ C $x = 24, y = 18$ D $x = 24, y = 19$

g. Qual è il numero mancante?



A 6 B 7 C 9 D 27

[Due risposte A, due B, una C e due D]

10 Indica la risposta corretta.

a. Aggiungendo 1 al prodotto di un numero intero n per lo stesso numero aumentato di 2, si ottiene:

A un numero dispari

B un numero pari

C un quadrato perfetto

D non si può sapere

b. La radice quadrata di 100 000 è circa uguale a:

A 100 B 300 C 1000 D 5000

c. Se n è un numero intero pari, com'è il prodotto $(n+1)\cdot(n-1)$?

$\boxed{\text{A}}$ Pari, perché se si aggiunge 1 e si toglie 1 il risultato è sempre pari.

$\boxed{\text{B}}$ Pari, perché la differenza tra $n+1$ e $n-1$ è sempre 2.

$\boxed{\text{C}}$ Dispari, perché il prodotto di due numeri dispari è sempre dispari.

$\boxed{\text{D}}$ I dati non sono sufficienti per rispondere.

d. Se il numero intero n è dispari, com'è il prodotto $n\cdot(n+5)$?

$\boxed{\text{A}}$ Dispari, perché il prodotto di due numeri dispari è dispari.

$\boxed{\text{B}}$ Pari, perché il fattore $n+5$ è pari.

$\boxed{\text{C}}$ Pari, perché la somma di due numeri dispari e sempre pari

$\boxed{\text{D}}$ Non ci sono dati sufficienti per rispondere.

e. Quali tra le quantità seguenti è la minore?

$\boxed{\text{A}}$ il 20% di 300 $\boxed{\text{B}}$ i 2/7 di 140 $\boxed{\text{C}}$ il 16% di 400 $\boxed{\text{D}}$ i 6/5 di 45

f. Se a è il doppio di b che è i 5/6 di c, quanto vale a?

$\boxed{\text{A}}$ $\frac{5}{3}c$ $\boxed{\text{B}}$ $\frac{5}{3}b$ $\boxed{\text{C}}$ $\frac{5}{6}c$ $\boxed{\text{D}}$ $\frac{5}{6}b$

g. Il numero $\sqrt{0{,}09}$ è uguale a:

$\boxed{\text{A}}$ 0,003 $\boxed{\text{B}}$ 0,03 $\boxed{\text{C}}$ 3/10 $\boxed{\text{D}}$ 0,81

h. All'interno di un cubo di lato a c'è una cavità cubica di lato b. Quanto vale il volume del cubo cavo?

$\boxed{\text{A}}$ a^2-b^2 $\boxed{\text{B}}$ b^2-a^2 $\boxed{\text{C}}$ a^3+b^3 $\boxed{\text{D}}$ a^3-b^3

i. Qual è la lettera successivo della sequenza C, F, I, N, Q, ...?

$\boxed{\text{A}}$ T $\boxed{\text{B}}$ O $\boxed{\text{C}}$ R $\boxed{\text{D}}$ Z

j. Ogni volta che supera un esame, Paolo festeggia bevendo un'aranciata. Quindi:

$\boxed{\text{A}}$ se Paolo beve un'aranciata, allora ha superato un esame.

$\boxed{\text{B}}$ se Paolo non supera un esame, allora non beve mai un'aranciata.

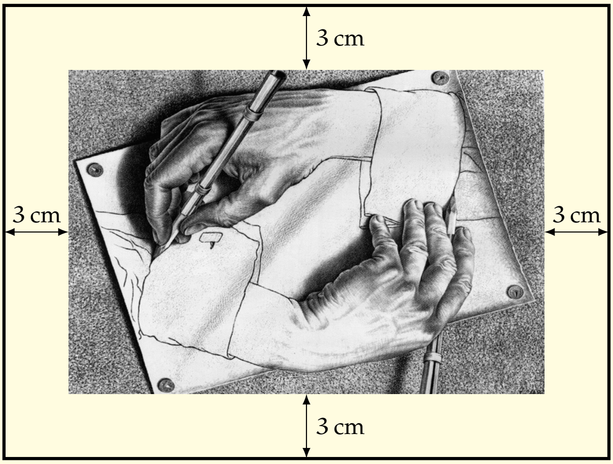
$\boxed{\text{C}}$ Paolo beve un'aranciata solo se ha superato un esame.

$\boxed{\text{D}}$ se Paolo non beve un'aranciata, allora non ha superato un esame.

[Due risposte A, tre B, tre C e due D]

11 Indica la risposta corretta.

a. Franco incolla su un cartoncino una fotografia rettangolare di dimensioni $22\,\text{cm} \times 15\,\text{cm}$. Attorno alla fotografia resta una cornice larga $3\,\text{cm}$, come si vede nella figura seguente.



Qual è l'area del cartoncino?

A $450\,\text{cm}^2$ B $504\,\text{cm}^2$ C $525\,\text{cm}^2$ D $588\,\text{cm}^2$

b. Un sacchetto contiene 15 caramelle alla menta e 25 caramelle al limone. Con 100 caramelle alla menta e 180 caramelle al limone, qual è il numero massimo di sacchetti con la stessa composizione del sacchetto precedente che si possono riempire?

A 4 B 5 C 6 D 7

c. Considera l'equazione $y = 2x + k$. Per quale valore di k essa rappresenta una retta che passa per il punto di coordinate $(1, 5)$?

A $k = 0$ B $k = 1$ C $k = 2$ D $k = 3$

d. In una gara motociclistica una moto ha il 30% di probabilità di vincere la gara se il terreno è bagnato e il 60% di probabilità di vincere se il terreno è asciutto. La probabilità che il giorno della gara il terreno sia asciutto è del 20%. Qual è la probabilità che la moto vinca la gara?

A 20% B 30% C 36% D 60%

e. A una conferenza sono presenti 90 persone. Le donne sono 14 più degli uomini. Quanti sono gli uomini?

A 31 B 38 C 59 D 76

f. Due urne A e B contengono ciascuna tre biglietti numerati con i numeri 1, 2 e 3. Si estrae un biglietto dall'urna A e poi un biglietto dall'urna B e si sommano i due numeri estratti. Fra tutte le possibili somme, qual è la più probabile?

A 3 | B 4 | C 5 | D 6

g. Con una bilancia si è misurata dieci volte la massa di una lastra di alluminio, ottenendo le misure seguenti in chilogrammi:

10,55	10,76	10,60	10,87	10,64	10,67	10,84	10,46	10,55	10,70

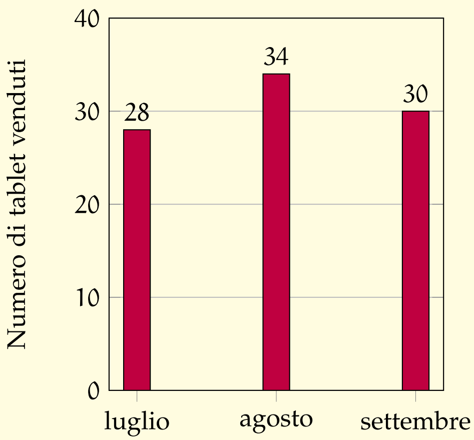
Quale tra le grandezze seguenti è più adatta a rappresentare la massa della lastra di alluminio?

A la varianza | B la moda | C la mediana | D la media

[Una risposta A, due B, due C e due D]

12 Indica la risposta corretta.

a. Il grafico seguente riporta il numero di tablet venduti nei mesi di luglio, agosto e settembre da un negozio di informatica. Negli altri nove mesi dell'anno lo stesso negozio ha venduto in media 18 tablet al mese.



Qual è il numero medio mensile di tablet venduti in quell'anno dal negozio?

A circa 21 | B circa 24 | C circa 28 | D circa 31

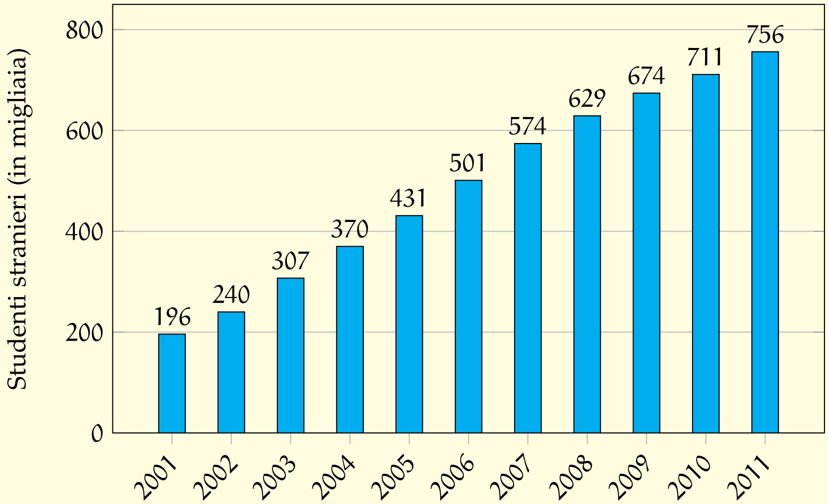
b. Ai soci di un supermercato un detersivo è venduto, con lo sconto del 20%, al prezzo di 1,40 €. Quanto costa quel detersivo ai clienti che non sono soci del supermercato e che quindi non hanno diritto allo sconto?

A 1,12 € | B 1,68 € | C 1,75 € | D 2,80 €

c. Quanto fa $\left(1-\frac{1}{7}\right):\left(1+\frac{1}{7}\right)$?

A	3/4	B	6/7	C	7/8	D	4/3

d. Il grafico seguente mostra il numero di studenti stranieri presenti in Italia dal 2001 al 2011, espresso in migliaia.



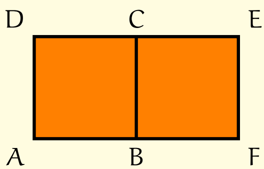
Di quanto sono aumentati in percentuale gli studenti stranieri nel 2008 rispetto al 2006?

A	circa del 20%	B	circa del 26%	C	circa del 64%	D	circa dell'80%

e. L'espressione $\left(a-\frac{1}{a}\right)^2$ si può scrivere come:

A	$a^2-\left(\frac{1}{a}\right)^2$	B	$\frac{a^4+1}{a^2}$	C	$\frac{a^2-2a+1}{a^2}$	D	$a^2+\frac{1}{a^2}-2$

f. Il rettangolo AFED è formato da due quadrati congruenti ABCD e BFEC con un lato in comune.



Il perimetro di ciascuno dei quadrati misura 36 cm. Quanto misura il perimetro del rettangolo AFED?

A	48 cm	B	50 cm	C	52 cm	D	54 cm

g. Lisbona, Coimbra e Beja sono tre città del Portogallo. In linea d'aria, Lisbona dista circa 180 km da Coimbra e circa 140 km da Beja. La distanza in linea d'aria tra Beja e Coimbra è:

A maggiore di 320 km

C compresa fra 40 km e 320 km

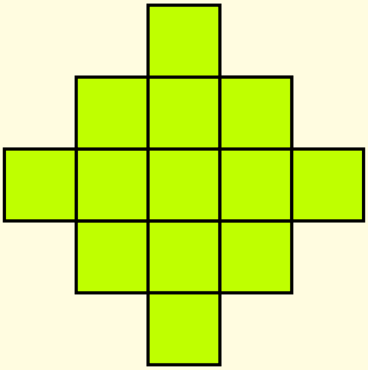
B circa 40 km

D circa 320 km

[Due risposte A, una B, due C e due D]

13 Indica la risposta corretta.

a. La figura seguente è composta da 13 quadrati, tutti di lato 1 cm.



Se il lato di ciascun quadrato si dimezza, allora l'area della figura diventa:

A $3\,\text{cm}^2$ B $3{,}25\,\text{cm}^2$ C $3{,}5\,\text{cm}^2$ D $3{,}75\,\text{cm}^2$

b. Una casa editrice propone all'autore di un libro di scegliere uno tra due tipi di contratto relativi al suo compenso.

- *Contratto forfettario*: compenso di 50 000 euro, indipendentemente dal numero di copie vendute.
- *Contratto a partecipazione*: compenso di 5000 euro, a cui si aggiunge il 10% del prezzo di copertina per ogni copia venduta.

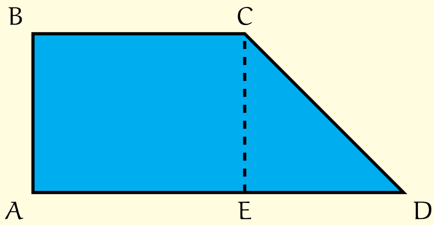
Il prezzo di copertina del libro è di 30 euro. Qual è il numero di copie che bisogna vendere perché il compenso ottenuto con il contratto a partecipazione sia uguale a quello ottenuto con il contratto forfettario?

A 10 000 B 12 500 C 15 000 D 17 500

c. Considera la retta passante per i punto $A(-1,3)$ e $B(2,1)$. Il coefficiente angolare della retta AB è:

A $-2/3$ B $2/3$ C $-3/2$ D $3/2$

d. Osserva la figura seguente.



Se si fa ruotare il trapezio rettangolo $ABCD$ di un giro completo attorno alla sua base *minore*, si ottiene:

- [A] un cilindro e un cono sovrapposti
- [B] un tronco di cono
- [C] un cilindro e due coni sovrapposti
- [D] un cilindro con una cavità conica

e. Agli alunni di una classe si chiede per quanto tempo al giorno, in media, usano la connessione a Internet con i loro dispositivi (computer, tablet, smartphone). La tabella seguente riporta i risultati del sondaggio.

Tempo di connessione (in minuti)	**Numero di alunni**
Da 0 fino a 60	2
Più di 60 fino a 120	4
Più di 120 fino a 180	12
Più di 180 fino a 300	8

Quale tra le espressioni seguenti permette di calcolare il tempo medio giornaliero di connessione a Internet degli alunni della classe?

- [A] $\dfrac{30+90+150+240}{4}$
- [B] $\dfrac{60\cdot 2+120\cdot 4+180\cdot 12+300\cdot 8}{2+4+12+8}$
- [C] $\dfrac{2+4+12+8}{4}$
- [D] $\dfrac{30\cdot 2+90\cdot 4+150\cdot 12+240\cdot 8}{2+4+12+8}$

f. Una fabbrica usa due macchine, M_1 e M_2, che lavorano indipendentemente l'una dall'altra. Ciascuna delle due macchine produce chiavette USB da 16 GB e da 32 GB, nelle percentuali descritte dalla tabella seguente.

	Chiavette da 16 GB	**Chiavette da 32 GB**	**Totale**
M_1	18%	42%	60%
M_2	22%	18%	40%
Totale	40%	60%	100%

Qual è la probabilità di estrarre dalla produzione della fabbrica una chiavetta da 16 GB prodotta da M_1?

- [A] 18%
- [B] 22%
- [C] 24%
- [D] 40%

g. Sia n un qualsiasi numero intero. Allora:

A $3n$ è dispari

B $n^2 + 1$ è pari

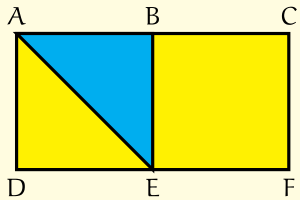
C $2n + 1$ è dispari

D $(2n + 1)^2$ è pari

[Due risposte A, una B, due C e due D]

14 Indica la risposta corretta.

a. Nella figura seguente, sia $AC = x$.



Sapendo che i quadrilateri $ABED$ e $BCFE$ sono quadrati, quanto vale l'area del triangolo ABE?

A $x^2/8$

B $x^2/4$

C $x^2/2$

D x^2

b. Andrea frequenta una scuola composta da un liceo scientifico, un liceo classico e un istituto tecnico. Nell'ultimo anno, gli studenti sono stati 1125, di cui 675 iscritti al liceo scientifico. Che percentuale rappresentano gli iscritti al liceo scientifico?

A 40%

B 50%

C 60%

D 70%

c. Quando la discoteca "Blue Moon" era la più in voga del momento, l'ingresso costava 30 euro. Ora, dopo un periodo di insuccessi, i gestori hanno deciso di ridurre il prezzo, abbassandolo a 20 euro. Qual è stata la diminuzione percentuale del prezzo?

A 10%

B 20%

C $33,\overline{3}\%$

D 50%

d. Per comprare il suo smartphone, Luca deve versare al momento dell'acquisto 120 euro, cioè il 40% del prezzo totale; il resto verrà pagato in rate mensili. Quanto costa, complessivamente, lo smartphone scelto da Luca?

A 48 euro

B 180 euro

C 200 euro

D 300 euro

e. Siano a, b, c, d quattro numeri diversi da zero, tali che $a/b = c/d$. Allora $\dfrac{ab}{bc}$ è uguale a:

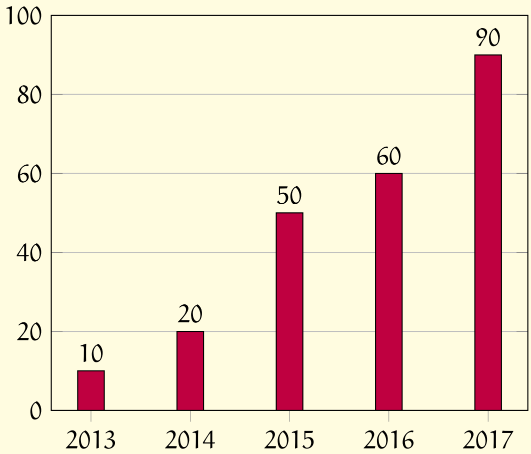
A a/b

B 1

C c/d

D b/a

f. Il grafico seguente riporta le percentuali di studenti di una scuola che hanno uno smartphone.



Quale tra le affermazioni seguenti *non* può essere ricavata dal grafico?

- A — Nei primi due anni, gli studenti senza smartphone erano la maggioranza.
- B — Il numero di studenti che hanno uno smartphone è aumentato negli anni.
- C — Nel 2015, metà degli studenti della scuola aveva uno smartphone.
- D — La percentuale di studenti senza smartphone è diminuita negli anni.

g. A sei gruppi di persone è stato chiesto di provare per quindici giorni due dentifrici, D_1 e D_2, e di scegliere il migliore. I risultati sono stati i seguenti.

	Gruppo 1	**Gruppo 2**	**Gruppo 3**	**Gruppo 4**	**Gruppo 5**	**Gruppo 6**
D_1	12	3	12	8	13	6
D_2	9	14	9	12	6	4

Quante preferenze ha ottenuto mediamente ciascun dentifricio?

A 6 B 7 C 8 D 9

[Una risposta A, due B, due C e due D]

15 Quanti sono i numeri interi compresi fra 1 e 1995 che *non* sono divisibili né per 2 né per 5? [798]

16 In un gioco si conta da 1 a 100 e si applaude ogni volta che si incontra un multiplo di 3 o un numero che termina per 3. Quante volte si applaude? [39]

17 Sulla lavagna è scritto il numero 1. La sola mossa permessa è cancellare il numero scritto e sostituirlo con il suo doppio o il suo quadrato. Qual è il numero più grande che si può ottenere in otto mosse? [2^{128}]

18 Il piano tariffario di un cellulare prevede un costo di 0,15 euro per lo "scatto alla risposta" più 0,12 euro per minuto o frazione di minuto di conversazione. Per esempio, se parlo un minuto e un secondo pago $(0{,}15 + 0{,}24)$ euro, come se parlassi esattamente due minuti.

a. Quanto si spende per una telefonata che dura 7 minuti e 10 secondi?

b. Se nel cellulare mi è rimasto un credito di 4 euro e voglio fare una telefonata, quanti minuti al massimo può durare?

[1,11 euro; 32 minuti]

19 Da alcuni anni, in un parco si somministra a una specie di alberi un prodotto per eliminare un parassita che ne causa la morte. I grafici seguenti rappresentano rispettivamente il numero di alberi sottoposti a trattamento negli anni (figura 1) e il numero di alberi guariti (figura 2). Indica se ciascuna delle affermazioni seguenti è vera o falsa.

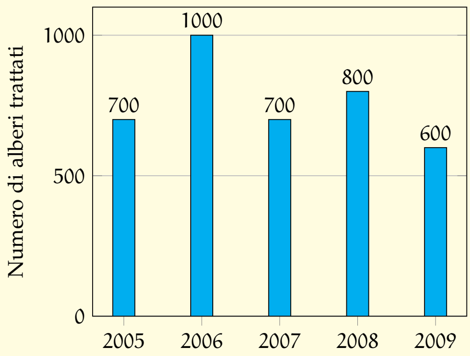


Figura 1

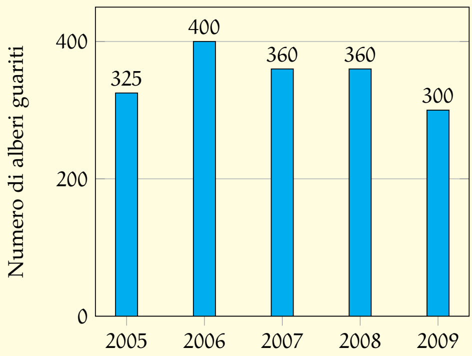


Figura 2

a. Nel 2009 la percentuale di alberi guariti rispetto a quelli trattati è inferiore a quella del 2006. V F

b. Nei cinque anni sono stati fatti circa 3800 trattamenti. V F

c. Nel 2005 è guarito meno del 40% degli alberi trattati. V F

[Un'affermazione vera e due false]

20 In una funzione del tipo $f(x) = ax + b$, il numero a si dice *pendenza*. Inoltre si dice *zero* di una funzione $f(x)$ ogni valore di x per cui $f(x) = 0$. Indica se ciascuna delle affermazioni seguenti è vera o falsa.

a. Le funzioni del tipo $f(x) = b$, con $b \neq 0$, non hanno zeri. V F

b. Lo zero della funzione $f(x) = 3x$ è -3. V F

c. Nelle funzioni del tipo $f(x) = b$, la pendenza è 0. V F

d. Lo zero della funzione $f(x) = x - 5$ è 5. V F

[Tre affermazioni vere e una falsa]

21 Il grafico seguente rappresenta la posizione s (in km) in funzione del tempo t (in h) di un oggetto che si muove su una traiettoria rettilinea. Indica se ciascuna delle affermazioni seguenti è vera o falsa.

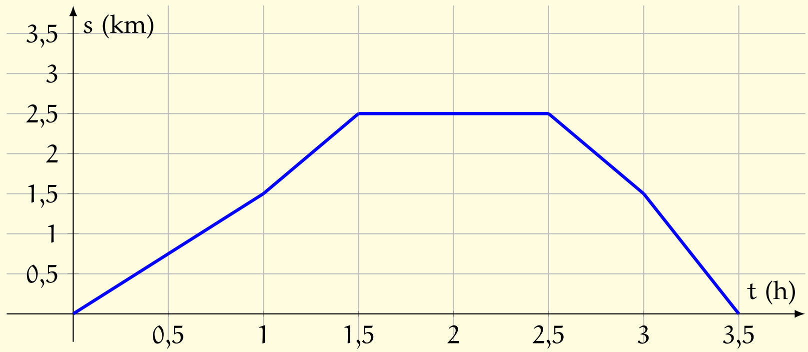
a. L'oggetto ha impiegato 3,5 h per compiere l'intero percorso. V F

b. L'oggetto ha percorso in totale 2,5 km. V F

c. L'oggetto è rimasto nella stessa posizione per 1 h. V F

d. Nella prima ora e mezza, l'oggetto si è mosso alla velocità media di 2,5 km/h. V F

[Due affermazioni vere e due false]



22 Siano dati i numeri reali a e b. Indica se ciascuna delle affermazioni seguenti è vera o falsa.

a. Se $a = 2$, allora $a^2 = 4$. V F

b. Se $a^2 = 4$, allora $a = 2$. V F

c. Se $a \cdot b = 0$, allora $a = 0$. V F

d. Se $a = 0$, allora $a \cdot b = 0$. V F

e. Se $a^2 = 0$, allora $a = 0$. V F

[Tre affermazioni vere e due false]

23 La tabella seguente indica di quanto è aumentata ogni anno in percentuale la produzione di un'azienda rispetto all'anno precedente negli anni dal 2010 al 2015.

Anno	2010	2011	2012	2013	2014	2015
Aumento percentuale annuo	+2%	+5%	+12%	+8%	+4%	+8%

Indica se ciascuna delle affermazioni seguenti è vera o falsa

a. Dal 2014 al 2015 la produzione è raddoppiata. V F

b. Dal 2012 al 2013 la produzione è diminuita. V F

c. Nel periodo 2010-2015 il massimo di produzione si è avuto nel 2015. V F

[Un'affermazione vera e due false]

24 Indica se ciascuna delle seguenti affermazioni relative a numeri interi è vera o falsa.

a. Se il prodotto di due interi è divisibile per 6, allora uno dei due fattori è divisibile per 6. V F

b. Se $a + b$ è divisibile per 2, allora sia a che b sono divisibili per 2. V F

c. Se a è un multiplo di 3 e b è un multiplo di 4, allora $a \cdot b$ è un multiplo di 6. V F

[Un'affermazione vera e due false]

25 Una lavanderia a gettoni lavora con orario continuato dalle 9 alle 18. Ogni lavatrice fa cicli di lavaggio della durata di 33 minuti, cui si devono aggiungere 10 minuti per l'operazione di carico e 5 per lo svuotamento. Quanti lavaggi completi, compresi di carico e svuotamento, può fare al massimo una lavatrice in un giorno? [11]

26 Nella tabella seguente, d rappresenta la distanza in metri fra l'abitazione e la scuola di ciascuno degli alunni di una classe.

Distanza dalla scuola	$100 \leqslant d < 500$	$500 \leqslant d < 1000$	$1000 \leqslant d < 1500$	$d \geqslant 1500$
Numero di alunni	2	8	5	10

a. Quanti sono gli alunni che abitano a meno di 1 km dalla scuola?

b. Qual è la percentuale di alunni che abitano a meno di 1,5 km dalla scuola?

[10; 60%]

27 Osserva la tabella seguente, che riporta la distribuzione di frequenza degli stipendi mensili dei dipendenti di un'azienda.

Stipendio (€)	1000	1300	1800	3500	5000
N. dipendenti	12	145	20	8	6

Indica se ciascuna delle affermazioni seguenti è vera o falsa.

a. La moda della distribuzione è 145. V F

b. La mediana della distribuzione è 1300 euro. V F

c. La media della distribuzione è minore di 1800 euro. V F

[Due affermazioni vere e una falsa]